

Sterke rekenaars en het rijtje van 100

Probleemgericht, productief oefenen in een plusklas

Verrijken van het rekenaanbod

Op de Julianaschool kennen we alweer geruime tijd een plusklas voor rekenen-wiskunde, bedoeld voor sterke rekenaars. Tijdens de gewone rekenlessen krijgen zij een compact basisaanbod met daaraan toegevoegd verrijksstof. Op donderdag worden de leerlingen in de plusklas nog eens extra uitgedaagd. We richten ons daarbij onder andere op rekenpuzzels en breinkrakers. Onderstaand probleem is daar een voorbeeld van en heb ik in de plusklas aan leerlingen uit groep 5 en 6 voorgelegd:

Het volgende rijtje is gemaakt door steeds de voorgaande twee getallen bij elkaar op te tellen:

3 – 5 – 8 – 13 – 21

Er is begonnen met twee willekeurige getallen. Maak nu zelf ook zo'n rijtje van vijf getallen, maar dan één waarvan het laatste getal zo dicht mogelijk in de buurt van 100 uitkomt (Van den Heuvel-Panhuizen en Treffers, 1998).

Als we de uitwerkingen van de leerlingen analyseren, herkennen we enkele kenmerkende eigenschappen van sterke rekenaars.

Jasper (groep 5)

We beginnen met het werk van Jasper. Zoals te zien in afbeelding 1 zoekt hij zijn twee startgetallen in de buurt van

Sterke rekenaars komen tekort als zij alleen een compact programma doorwerken en daarnaast zelfstandig opdrachten maken. Deze leerlingen profiteren enorm van een leerkracht die hen op de juiste wijze weet uit te dagen. In onderstaand voorbeeld beschrijft de auteur het werken met een plusklas voor rekenen aan de hand van een probleemgerichte, productieve oefenactiviteit die een beroep doet op het eigen initiatief van leerlingen.

twintig: 'Als je 100 door vijf deelt is het twintig, dus daarom denk ik dat.' Deze eerste startgetallen leiden niet tot het gewenste resultaat van 100 en daarom hoogt Jasper beide startgetallen met één op. De 100 komt daarmee wel meer in zicht, maar nog niet voldoende. Daarom doet hij nog een keer hetzelfde. Bij deze derde poging vormen 18 en 20 de startgetallen die leiden tot een einduitkomst van 96.

Het werk van Jasper

Op basis van de eerste ophoging was het te voorspellen dat er weer vijf bij de einduitkomst zouden komen, maar

zover heeft Jasper nog niet gedacht. Hij zit in een trial-and-error fase, maar kiest de getallen nu ook weer niet lukraak. Er zit wel degelijk systeem in de ophoging van de startgetallen. Er hoeft bij de vierde poging niet veel meer bij het eindgetal te komen, dus hoogt Jasper nu alleen het eerste getal op en het tweede niet. Als hij op 98 uitkomt, begint hij te juichen. 'Als ik er nog één bij doe, ben ik er.' Jasper is nu inmiddels wel gericht op het effect dat een ophoging van een startgetal heeft op het eindgetal van het rijtje.

Dit kunstje eenmaal begrepen, zoekt Jasper naar een andere aanpak. 'Weet je wat, ik ga eens bij 100 beginnen. Dat kan ook.' Hij zoekt twee getallen die samen 100 zijn, te weten 39 en 61. Dit levert het volgende tussenresultaat op: .. – .. – 39 – 61 – 100. Dan berekent hij welk getal hij nodig heeft om samen met 39 tot 61 te komen. Juist, 22. Er staat nu: .. – 22 – 39 – 61 – 100. Op de puntjes vooraan noteert Jasper 17, want 17 en 22 is samen 39. Weer twee mogelijke startgetallen ge-

vonden, maar nu door terug te redeneren.

We hebben nu al twee manieren om het gegeven rekenprobleem op te lossen. De leerlingen zijn erdoor 'gegrepen'. Zeker mijn opmerking dat ik wel zeventien paren van mogelijke startgetallen heb gevonden, motiveert om door te gaan.

Stijn (groep 5)

Stijn begint met het getal 17 en kiest daar een tweede getal bij (zie afbeelding 2). Ook Stijn zoekt het in de richting van de twintig, startgetallen die tenminste aanzienlijk groter zijn dan die in het voorbeeldrijtje dat op 21 uitkomt (zie inleiding artikel). Als het rijtje dat start met 17 en 15 uiteindelijk niet leidt tot het gewenste eindgetal 100, houdt Stijn bij volgende pogingen het eerste getal (17) constant. Het tweede getal kiest hij hoger, omdat de uitkomst groter moet worden. Opnieuw komt er geen 100 uit. Bij een derde poging ligt de uitkomst wel heel dicht bij 100.

17 · 15 · 32 · 47 · 79
17 · 18 · 35 · 53 · 88
17 · 21 · 38 · 59 · 97
17 · 22 · 39 · 61 · 100

Het werk van Stijn

Voordat Stijn het tweede getal weer groter gaat maken, vraag ik hem naar zijn plan.

Stijn: Ik denk drie erbij of minder dan drie.

Erica: Kun je het ook precies weten? Wat gebeurde er met de uitkomst toen je het tweede getal met drie ging ophogen?

Stijn: Toen is er negen bij gekomen.

Erica: En bij de volgende ophoging van het tweede getal?

Stijn: Toen is het van 88 naar 97 gegaan. Oh, dat is ook negen erbij.

Erica: Wat zou je nu willen met de uitkomst?

OP NAAR DE VOLGENDE BEREKENING, WANT DE JUF HEEFT GEZEGD DAT ER MEERDERE OPLOSSINGEN ZIJN.

Stijn: Drie erbij. Wacht eens even ... Nu weet ik het. Ik hoef er maar één bij te doen. 21 wordt 22. Ik heb 'm!

Nadat de 100 was bereikt, verscheen er direct een dikke streep onder de uitkomst. Op naar de volgende berekening, want de juf heeft gezegd dat er meerdere oplossingen zijn.

Mees (groep 6)

Mees besluit na drie mogelijke oplossingen te hebben gevonden over te gaan op een nieuwe uitdaging. Hij vraagt mij of er ook startgetallen zijn met breuken. Dat mag hij zelf gaan uitzoeken! Mees start met een heel getal (15) en voegt als tweede getal een gemengde breuk toe: $2\frac{1}{2}$ (zie afbeelding 3). Die kiest hij opvallend klein, gezien de drie oplossingen die hij al heeft gevonden: 5 en 30, 23 en 18, 20 en 20.

15 $2\frac{1}{2}$ 17 $\frac{1}{2}$ 20 $37\frac{1}{2}$
15 $27\frac{1}{2}$ $42\frac{1}{2}$ 70 $112\frac{1}{2}$
15 $21\frac{1}{4}$ $36\frac{1}{4}$ $57\frac{1}{2}$ $93\frac{3}{4}$
15 $27\frac{1}{3}$ $42\frac{1}{3}$ $69\frac{2}{3}$ 112
15 $21\frac{1}{3}$ $36\frac{1}{3}$ $57\frac{2}{3}$ 94
15 $24\frac{1}{3}$ $39\frac{1}{3}$ $63\frac{2}{3}$ 107
15 $23\frac{1}{3}$ $38\frac{1}{3}$ $61\frac{2}{3}$ 100

Het werk van Mees

De tweede poging maakt hij dit goed door er bij het tweede getal meteen 25 bij te doen. Het eerste getal (15) houdt hij tot aan de laatste poging constant. De startgetallen 15 en $27\frac{1}{2}$ leiden tot een getal dat groter is dan 100 en opnieuw tot een gemengde breuk, terwijl Mees daar een heel getal wil hebben. Vervolgens kiest Mees het tweede getal weer wat kleiner en gaat over op een andere breuk, namelijk een kwart. Waarschijnlijk in de hoop dat

hij die onderweg kan kwijtraken. Maar nee, die levert als vijfde getal een gemengde breuk op met drie vierde erin. Nog een poging, nu met een derde. Vreemd genoeg gaat Mees deze breuk weer combineren met het hele getal 27 dat zojuist tot een te groot eindgetal leidde. Maar ... de breuk van een derde kan hij gaandeweg wel wegwerken. Dit is te verklaren, want het tweede getal in het rijtje van 100 gaat drie keer mee in de optellingen. Dat maakt hem tot één hele. De breuk met een derde mag van Mees dus wel in het spel blijven. Het vraagt nog enkele pogingen om op de tweede plek in het rijtje bij deze breuk het passende hele getal te vinden. De aanhouder wint. 15 en $23\frac{1}{3}$ leiden tot een rijtje van 100!

Maarten (groep 6)

Maarten gaat na zijn eerste succesvolle vondst een 'theorie' formuleren, zoals hij dat zelf noemt. 'Er moet een regel voor zijn, ik weet het zeker.' Uiteindelijk schrijft hij op wat in afbeelding 4 is te lezen.

Heb je iets te weinig?
Tel bij het eerste getal de helft op van wat je nog moet.
Heb je iets te veel?
Haal van het eerste getal de helft af van wat je teveel hebt.

Het werk van Maarten

Zijn theorie licht hij toe met een voorbeeld:

Heb je iets te weinig? Tel bij het eerste getal de helft op van wat je nog moet. Bijvoorbeeld: $32 - 10 - 42 - 52 - 94$ Je moet dus nog zes. De helft van zes is drie. Als je die bij 32 optelt, krijg je het rijtje: $35 - 10 - 45 - 55 - 100$.

BIJ EEN GROOT PROBLEEMOPLOSSEND VERMOGEN PAST OOK DE BESLISSING OM EENS VANUIT EEN ANDER PERSPECTIEF TE REDENEREN

Maarten heeft duidelijk gekeken naar de effecten van het ophogen van een getal. Hij richt zich daarbij op het eerste getal. Sandra, die ook op zoek is gegaan naar een regel, voegt er nog aan toe wat je met het getal op de tweede plaats moet doen om het gewenste effect te realiseren. Zij heeft, net als Stijn, gezien dat een ophoging van het tweede getal met één tot een einduitkomst plus drie.

Rekenen met letters

Nu de kinderen zelf op zoek zijn gegaan naar een regel lijkt de tijd rijp voor een oplossing met behulp van algebra. Als we nu het eerste startgetal eens 'a' noemen. En a kan dan ingevuld worden met elk getal dat je maar wilt. De kinderen kunnen hierin wel meegaan. 'Dan is de tweede zeker b,' zegt Mees. Inderdaad, die noemen we 'b' en kan ook voor elk getal staan (zelfs voor een getal met een breuk erin!). Op het bord staat: $a - b -$. Dan hoor ik in koor dat ik na het volgende streepje een 'c' moet opschrijven. Maar daarin ga ik niet mee. Ik wil van de kinderen weten wat we met het eerste en het tweede getal in ons rijtje van 100 hebben gedaan. 'Die hebben we bij elkaar opgeteld.' Dus dat doen we ook met onze a en b. De kinderen

pakken het direct op en maken het rijtje af:

$$a - b - a + b - a + 2b - 2a + 3b.$$

We spreken af dat we (net als echte wiskundigen) geen keerteken tussen het getal en de letter schrijven. Maar we weten wel heel goed dat we daar moeten vermenigvuldigen. 'En wat weten we nu over $2a + 3b$? Wat willen we daar eigenlijk mee?', leg ik aan de kinderen voor. 'Die moet 100 zijn,' weet Maarten. Op het bord noteren we dat zo: $2a + 3b = 100$.

Kunnen we nu zomaar getallen gaan invullen? Mees heeft daarover al nagedacht. 'Als je twee keer a doet, houd je altijd een even getal over. Dus drie keer b moet ook even zijn, anders kan het nooit honderd worden.' Daar staan we even wat uitgebreider bij stil om iedereen de kans te geven deze redenering te volgen. We concluderen vervolgens dat b dan een even getal moet zijn (terwijl a even of oneven mag zijn). Want een oneven getal keer drie levert opnieuw een oneven getal op en dat willen we niet. Het is

nu tijd om een even getal te roepen dat we voor b kunnen gaan invullen! Om een lang verhaal kort te maken... we hebben alle zeventien oplossingen met hele startgetallen gevonden. Ze leiden allemaal tot een rijtje van 100. Maar dan ontdekken mijn slimme rekenaars nog iets moois. Je kunt ook negatieve getallen invullen. Kijk maar:

$-1 - 34 - 33 - 67 - 100$
 $-4 - 36 - 32 - 68 - 100$

Een nieuwe wereld ligt aan onze voeten ...

Sterke rekenaars

Als we het werk van de begaafde leerlingen uit dit artikel op een rijtje zetten, zien we verschillende aanpakken terug. De startfase van het oplossen van het rijtje van 100 wordt vooral gekenmerkt door een proces van trial-and-error. Eerst worden twee 'willekeurige' startgetallen gekozen. 'Willekeurig' tussen aanhalingstekens, omdat achter de keuze van deze getallen meestal wel een redenering schuilgaat. Vervolgens wordt met en-



Fotograaf Jasper Oostlander

kele berekeningen het rijtje tot en met vijf getallen compleet gemaakt. Dit proces herhaalt zich slechts een aantal keer. Al snel krijgen de leerlingen oog voor een 'regel'. Ze richten zich op de gevolgen van het verhogen/verlagen van startgetallen voor de einduitkomst. Sommige leerlingen proberen de structuur en regelmaat te ontdekken door één van beide startgetallen constant te houden of ze verhogen of verlagen de beide getallen heel bewust met hetzelfde getal. We zien bij Jasper ook de behoefte om eens via een andere weg tot een oplossing te komen. Hij redeneert vanaf het eindgetal terug naar het begin.

Van Gerven (2009) verwijst in het 'Handboek Hoogbegaafdheid' (2009, p. 18-19) naar gedragingen en leereigenschappen die kenmerkend zijn voor begaafde kinderen.

Een aantal daarvan is te herkennen in het werk van mijn sterke rekenaars, te weten:

'ER MOET EEN REGEL VOOR ZIJN, IK WEET HET ZEKER.'

- *Snel van begrip en grote denk- en leerstappen kunnen maken*

De leerlingen konden vlot meedenken in het 'rekenen met letters' en ze pakten ook makkelijk hints op in de richting van het zoeken naar consequenties van het verhogen of verlagen van startgetallen. Sterke rekenaars lopen vaak ook vooruit in de leerstof, waardoor Mees bijvoorbeeld bij het rijtje van 100 al met breuken kon rekenen terwijl die in de klas nog niet waren aangeboden.

- *Beschikken over een groot probleemoplossend en analyserend vermogen*

De leerlingen zijn na de fase van trial-and-error gaan zoeken naar regels. Ze houden een getal constant of verhogen/verlagen startgetallen volgens een vaste structuur. Ze proberen daarmee grip te

krijgen op het probleem in het rijtje van 100. Ze analyseren de gevolgen van hun handelingen. Bij een groot probleemoplossend vermogen past ook de beslissing om eens vanuit een ander perspectief te redeneren, zoals Jasper deed toen hij vanaf 100 ging terugredeneren.

- *Creatief denkvermogen tonen en buiten de reguliere kaders denken*

Dit herkennen we bij Mees die zich afvroeg of er ook startgetallen met breuken kunnen bestaan. En ook Maarten en Sandra tonen een creatief initiatief door hun eigen 'theorie' te formuleren.

- *Uitdagingen zoeken en groot doorzettingsvermogen tonen*

De leerlingen zijn uitdagingen niet uit de weg gegaan. Het feit dat ik zeventien paren van mogelijke start-



Fotograaf Jasper Oostlander



Fotograaf Jasper Oostlander

getallen had gevonden, stimuleerde hen om hun tanden in het probleem te zetten en ze ook allemaal te vinden. Ze hielden bij hoeveel pogingen zij nodig hadden om tot een nieuw paar van geschikte startgetallen te komen met de bedoeling steeds het 'record' te verbeteren. Niemand heeft het zoeken van oplossingen opgegeven. Uitdagingen werden ook gezocht in het verlaten van de hele getallen; breuken en negatieve getallen werden ingebracht.

- *Perfectionistisch ingesteld zijn*
Niemand nam genoegen met een rijtje dat op 98 uitkwam. Alleen een einduitkomst van precies 100 was acceptabel. Dit was overigens ook herkenbaar bij de ouders van deze leerlingen. Zij hebben op een ouderinformatieavond hetzelfde probleem voorgelegd gekregen. De ouders wilden ook alleen maar op 100 uitkomen. Bovendien waren zij ook meer gecharmeerd van een oplossing waarbij de getallen in het rijtje van 100 oplopen van klein naar groot. De kinderen hebben daaraan echter geen aandacht besteed. $35 - 10 - 45 - 55 - 100$ was voor hen ook een prima rijtje.
- *In staat tot zelfreflectie*
Op verschillende momenten reflek-

teerden de kinderen op hun handelen. Zeker bij het ontdekken van een regel en het vaststellen van consequenties voor de einduitkomst. Ik zag de kinderen vaak leren van voorgaande stappen. Niet altijd, maar in de meeste gevallen wel. In het werk van Mees is te zien dat hij niet te lang met één bepaalde noemer van een breuk blijft rekenen, maar op basis van een ongewenste einduitkomst weer vlot overgaat tot een poging met een nieuwe noemer. Mooi was ook de interactie tussen de kinderen die uitnodigt tot reflecteren op het eigen handelen. Door de theorie van Maarten werd Sandra geprikkeld om ook te zoeken naar een regel die bij verhoging of verlaging van het tweede startgetal past.

Vanwege deze mooie gedragingen en leereigenschappen is het een feest om met sterke rekenaars te werken. Overigens is het rijtje van 100 niet alleen een geschikte rekenpuzzel voor sterke rekenaars. Ook voor de andere leerlingen in de groep biedt het probleem voldoende mogelijkheden om op eigen niveau ermee aan de slag te gaan. De opdracht valt onder het probleemgerichte, productieve oefenen dat meer eigen initiatief van de kinderen

vraagt dan gericht oefenen. Al komt het gericht oefenen ook min of meer in het rijtje van 100 aan de orde. Immers, ongemerkt oefenen de kinderen volop sommen in het getalengebied tot 100. En dat is ook waardevol voor de begaafde leerlingen, want dol op automatiseren en memoriseren zijn ze meestal niet...

Met dank aan de leerlingen van de Juliana-school in Bilthoven. De namen van de kinderen zijn gefingeerd.

De foto's van bij dit artikel beelden niet de besproken kinderen af.

De auteur is docent rekenen-wiskunde op de Marnix Academie en leerkracht van de plusklas rekenen op de Juliana-school in Bilthoven

Literatuur

- Gerven, E. van (red.) (2009). *Handboek Hoogbegaafdheid*. Assen: Koninklijke Van Gorcum.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den & A. Treffers (1998). *Oefenen. Module behorende bij de Nationale Cursus Rekencoördinator (NCRC)*. Utrecht: Freudenthal Instituut.