



Met het oog op het leren van rekenen-wiskunde in het digitale tijdperk^{1,2}

R. Noss

London University, Department of Mathematics

Reken-wiskundige betekenissen gaan gelijk op met representaties. In dit artikel wordt ingegaan op de veranderende rollen van rekenen-wiskunde en nieuwe representaties die voortkomen uit de alomtegenwoordigheid van rekenmodellen, om vervolgens de implicaties hiervan na te gaan voor het leren van rekenen-wiskunde. Tot de kennis die nodig is om te overleven in moderne samenlevingen hoort het ontwikkelen van een meta-epistemologische houding - dat wil zeggen het ontwikkelen van een gevoel van mechanismen voor de onderliggende modellen bij sociale en professionele communicatie. Ik laat dit zien aan de hand van recent onderzoek aan de reken-wiskundige epistemologie - kennistheorie - van bouwkundigen. Uiteindelijk kom ik zo uit bij wat dit betekent voor het ontwerpen van een reken-wiskundige leeromgeving in de toekomst, waarbij ik inga op enkele gegevens uit het 'Playground Project'.

1 Inleiding

Gattegno was een van de hoogleraren en lerarenopleiders aan mijn instituut, die een van zijn collega's zich herinnerde als '(was) always experimenting with the latest gadgetry from coloured blocks to electrical devices' (Dixon, 1986, pag. 73). Ik voel me verwant met Gattegnos obsessie voor nieuwigheden, maar daar gaat het mij hier niet om. Ik denk namelijk dat achter deze obsessie een grote interesse schuilt voor onderwijs in het algemeen, en reken-wiskundeonderwijs in het bijzonder. Wat zou Gattegno gedacht hebben van computers zoals wij die nu kennen, waarbij een laptop van nog geen twee kilo een grotere rekenkracht heeft dan een kamer vol apparaten in zijn tijd, waarbij die laptop ook nog eens draadloos verbonden is met het internet en aldus met miljarden pagina's aan informatie? Het spreekt voor zich dat het voor Gattegno bij deze nieuwe technologie liefde op het eerste gezicht zou zijn geweest - zoals dat ook voor mij gold - en dat het voor hem niet moeilijk geweest zou zijn te bedenken hoe dit zou kunnen worden uitgebuit ten bate van het reken-wiskundeonderwijs.

Ik ga in dit artikel in op twee zaken waarover ik graag met hem van gedachten had willen wisselen. Ik doe dit in de vorm van een betoog, omdat een gedachtewisseling niet meer tot de mogelijkheden behoort.

Het eerste punt betreft het verschil tussen de computer en alle andere nieuwigheden waarmee Gattegno wellicht had willen spelen. Ik wil zeker niet beweren dat 'de computer' (een woord dat eigenlijk niets zegt) een onontkoombare invloed heeft op het leren. Maar het is wel zinvol om na te gaan of de computer verandert óf dat het de representaties van lerenden zijn die veranderen, daarbij ondersteund door het nieuwe medium. Echter, er is dui-

delijk sprake van een verandering en dat moeten we mijns inziens aangrijpen.

De moeilijkheden bij het benutten van deze mogelijkheden brengt me bij mijn tweede punt. De (Cuisenaire) staafjes van Gattegno kunnen makkelijk worden omgezet in een computerversie. Ik ben er zelfs zeker van dat een korte zoektocht op internet al leidt tot het vinden van meer dan één variant. Maar wat zou een computerversie toevoegen aan de staafjes van Gattegno? Vanuit een didactisch perspectief is dit een belangrijke vraag. Een fundamentele vraag betreft de manier waarop de kennis die gemodelleerd is door de staafjes, getransformeerd kan worden door het medium te veranderen van hout naar pixels op een computerscherm. En verder, wat betekent het wanneer we spreken van kennis 'gemodelleerd' via een technologie: kunnen we aannemen dat kennis ongeschonden de overgang van de ene technologie naar de andere kan maken? Deze epistemologische vragen brengen ons terug bij didactische vragen: hoe kunnen nieuwe kentheorieën en bijbehorende concrete en dynamische representaties leiden tot het omvormen van het leren in zowel cognitief als sociaal opzicht?

Deze kwesties roepen een groot aantal zaken op die hier onbesproken moeten blijven, maar tonen tegelijkertijd de complexe problemen aan waarmee de maatschappij wordt geconfronteerd door de toegenomen rekenkracht van machines. De kwesties tonen wellicht het erkennen van representaties als centraal element van de wiskunde en als een bijdrage aan onze collectieve zoektocht naar een beter inzicht hoe leerlingen reken-wiskundige ideeën begrijpen. Kaput & Shaffer (2002) wijzen op de socio-genetische basis voor representatiesystemen voor wiskunde. Zij geven aan hoe representaties en notatiesystemen zich in de loop van de tijd ontwikkelden en ons lezen en beschrijven van de wereld, inclusief de wiskundige we-

reld, vormden. Zij laten ook zien hoe reken-wiskundige notaties zich ontwikkelden in een periode van vele duizenden jaren, hoe deze notaties slechts de intellectuele elite dienden en hoe gekozen representaties afgeleid waren van beschikbare statische media (vgl. Kaput, Noss & Hoyles, 2002).

Ik geef hiervan een voorbeeld van buiten de wiskunde. Laten we daarvoor kijken naar een van de beroemdste schilderijen ter wereld, 'Gezicht op Delft' van Johannes Vermeer (figuur 1). Zoals iedereen weet is het een gezicht op de stad, 'gewoon' een gezicht. Ik benadruk het woord 'gewoon', omdat het schilderij zo waarheidsgetrouw als mogelijk laat zien hoe de stad eruitzag. (Natuurlijk moeten we eigenlijk zeggen 'wat Vermeer zag', maar laten we dit filosofische debat over de bemiddelde rol van de observator hier niet aangaan. Het is zomaar een gezicht, een dat zelfs voorziet in een waarheidsgetrouw beeld.)

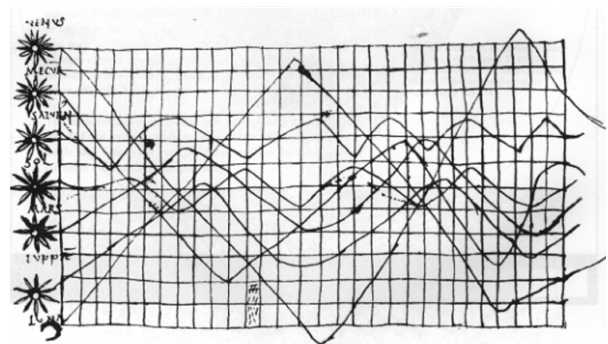


figuur 1: Vermeers gezicht op Delft

Wat zien we? Water, wolken, schaduwen, gebouwen (waarvan enkele er nu nog staan) en lopende mensen of mensen die er wellicht gewoon maar staan. Het lijkt bijna een ongepaste vraag: zien we wat we zien? Maar de vraag lijkt gemakkelijk, omdat we teruggaan in de tijd. In zijn boek 'The World on Paper' laat Olson (1994) zien hoe Hollandse schilders in de zeventiende eeuw de tot dan toe overheersende rol van tekst als algemene manier om de wereld te begrijpen, ter discussie stelden. Hij laat ook zien hoe, door oppervlakkige beschrijvingen te verruilen voor diepgaande verhalende elementen, Vermeers school de betekenissen die behoorden bij verf als medium veranderde. Of, zoals een van Vermeers tijdgenoten noteerde, hij maakte dat 'wolken werden gezien als wolken en niet als symbolen voor de hemel'.

Tekst is overigens niet altijd het medium geweest om de wereld te representeren. Het was vooral de uitvinding van het drukken van schrift die toestond dat tekst kon worden

gezien als representatie. Deze nieuwe technologie voorzag in een gemeenschappelijke vorm voor de productie en interpretatie van teksten. Deze technische en sociale verandering benadrukte de beschrijvende kracht van tekst, waarmee de betekenis ervan los kwam te staan van de auteur. Vermeer vocht beschrijvingen in teksten aan als een manier om te laten zien hoe dingen waren, en dat was een verandering in interpretatie die zijn tijdgenoten deed opschrikken en die zij zich nog eigen moesten maken.³ Het is moeilijk om ons voor te stellen welke geweldige verandering het schilderij in beeld brengt; het *is* moeilijk op waarde te schatten omdat wij het als iets vanzelfsprekend beschouwen. Het is belangrijk om er bewust van te zijn dat representatiesystemen een cruciale rol spelen bij het betekenis geven aan bepaalde situaties. Zij bieden ons de mogelijkheid te communiceren over betekenissen en deze te construeren op een manier die (letterlijk) ondenkbaar zou zijn zonder deze systemen. De manier waarop betekenissen en representaties verweven kunnen raken en, meer fundamenteel, hoe doorzichtig het representatieve medium in de loop van de tijd wordt, is zichtbaar in het volgende voorbeeld (Tufte, 1983, pag.28). Figuur 2 toont een grafisch weergegeven tijdreeks die de inclinatie van de planeten aan de hemel beschrijft.



figuur 2: een grafisch weergegeven reeks uit de tiende eeuw, Tufte, 1983, pag.28

Volgens Tufte is dit het oudst bestaande voorbeeld van een grafische tijdreeks, en is het duizend jaar oud. De grafiek komt uit een tekst die op kloosterscholen werd gebruikt en was hoogstwaarschijnlijk dus bedoeld als communicatiemiddel. Het is interessant dat de volgende grafiek die een tijdreeks weergeeft pas achthonderd jaar later opdook, niet alleen omdat het bijna een millennium duurde voordat deze representatie van gegevens werd geaccepteerd, maar ook dat, toen de representatie eenmaal breed werd geaccepteerd, het *de* representatie werd om een bepaald soort informatie over te dragen. Volgens Tufte waren in de periode 1974-1980 driekwart van alle gepubliceerde grafieken grafische tijdreeksen.

Ik kan niet nagaan of Tufte tot in detail gelijk heeft, maar we kunnen aannemen dat zijn observatie in essentie correct is. Dit laat zien dat zodra een representatie onze cultuur is binnengetroten, we grote moeite hebben om die vervolgens te onderscheiden van de wiskundige symbo-

len zelf. (We kunnen deze onzichtbaarheid van de representatie goed zien als we een ongebruikelijke, maar triviale verandering aanbrengen, bijvoorbeeld als we in de gangbare uitdrukking $y = ax + b$ de letters a en b als variabelen beschouwen en x en y als constanten. We zullen overigens in het vervolg zien dat dit soort ‘willekeurige’ veranderingen niet zo triviaal zijn wanneer ze verband houden met rekentechnieken.)

Als laatste kanttekening bij de kracht van representaties wil ik iets naar voren brengen dat ik beschouw als een centraal thema, namelijk de manier waarop wiskundige kennis functioneert in overleg tussen beroepsbeoefenaren. Het volgende is een citaat van een werkbouwkundige. (Ik zal hier later meer over schrijven en dan ook de context schetsen.)

‘... bouwkundige kennis omvat veel geschiedenis; om te komen tot het punt waarop al het gedrag van straling kan worden gegeneraliseerd tot een enkele vectorvergelijking, die welhaast te onderwijzen is aan een kind van tien, betekent een onvoorstelbare gecondenseerde indikking van miljoenen manjaren werk. De tienjarige van nu kan dingen die Newton niet kon.’

Vele anderen observeerden dit (zie hiervoor onder andere de bespreking van diSessa over de manier waarop Galileo’s bewerking van beweging als natuurkundig verschijnsel kan worden herschreven met algebraïsche middelen die Galileo niet ter beschikking had, en daarmee bijna triviaal wordt (diSessa, 2000)). Dit geldt evenzeer op cultureel en sociaal niveau als op individueel niveau. De bouwkundige van het bovenstaande citaat speelde een sleutelrol bij de bouw van het nieuwe dak van het British Museum in Londen (fig.3).



figuur 3: het dak van ‘the Great Court’, British Museum, Londen

Dit is een structuur met meer dan drieduizend tegels waarvan er geen twee gelijk zijn, bestaand uit zo’n drie kilometer ijzeren stangen die minder dan drie millimeter

afwijken. Het ontwerp - en natuurlijk de constructie - van zo’n bouwwerk zou onmogelijk zijn geweest zonder een computer. Maar dat een computer een bepaald ontwerp mogelijk maakt, is niet het belangrijkste: ontwerpen met de computer leidt tot een nieuwe manier van denken. Het helpt ontwerpers bij het ontwerpen en biedt tegelijkertijd de mogelijkheid het ontwerp voorstelbaar te maken voor anderen.

De constructie van het dak van het British Museum laat niet alleen een andere manier van berekenen zien, maar geeft ook een voorbeeld van de manier waarop rekenkundige representaties culturen opnieuw kunnen vormen. Deze transformatie in representaties vormt *het* centrale gegeven in ‘post-industriële’ samenlevingen, maar is, volgens mij onvoldoende theoretisch doordacht vanuit de wiskunde en de reken-wiskundendidactiek. Ik wil daarom enkele vragen formuleren die dit oproept.

2 Wiskunde in kenniseconomieën

Moderne samenlevingen in de ontwikkelde wereld - de zogenoemde kenniseconomieën - zijn meer ‘verwiskundigd’ dan ooit. Systemen die ons sociale en professionele leven beheersen zijn in essentie wiskundig van aard. In zo’n wereld geldt dat je, om de wereld waarin je leeft te begrijpen, moet leren denken in termen van relaties tussen de veelal wiskundige elementen in die wereld en modellen die hieraan ten grondslag liggen. Dat wil overigens niet zeggen dat iedereen een wiskundige zou moeten zijn, maar enige kennis van deze modellen is nodig om te voorkomen dat men een te beperkte of misleidende kijk heeft op deze systemen. Elders (Noss, 1997) besprak ik de economische en sociale implicaties van deze situatie, en ga daarop hier niet in. In plaats daarvan ga ik in op de implicaties voor het leren gebruiken van rekenen-wiskunde.

Beschouw daartoe het eenvoudige voorbeeld uit figuur 4. Wanneer de grafiek van een tijdserie de meest geliefde representatie van onze tijd is, dan staat de tabel met numerieke data op een goede tweede plaats. Het creëren van dergelijke tabellen met een spreadsheetprogramma is zo alledaags geworden, dat we kunnen stellen dat het kunnen werken met spreadsheets tegenwoordig tot de wiskundige geletterdheid behoort. En dit betreft niet alleen het leggen van relaties tussen getallen, maar ook tussen hele kolommen met getallen. Het is in deze situatie niet onredelijk om te stellen dat deze nieuwe manier van werken ook van invloed is op wat we als een ‘natuurlijke’ uitdrukking zien. Wanneer we bijvoorbeeld de functie willen beschrijven die bij de tabel van figuur 4 past, dan gaat de traditionele voorkeur uit naar de vorm $f(x) = 3x + 4$ in plaats van de vorm:

$$\begin{aligned} f(0) &= 4 \\ f(N) &= f(N-1) + 3 \end{aligned}$$

0	4
1	7
2	10
3	13
...	...

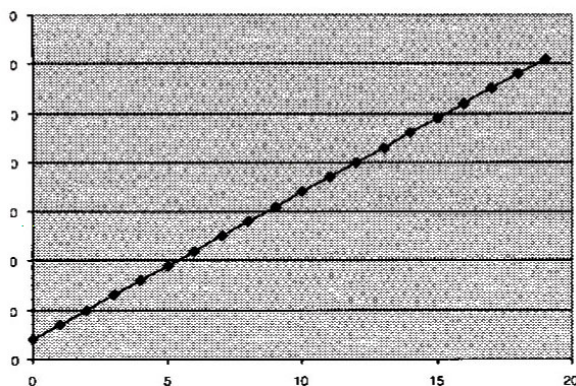
a. standaard vorm in tabel

$$f(x) = 3x + 4$$

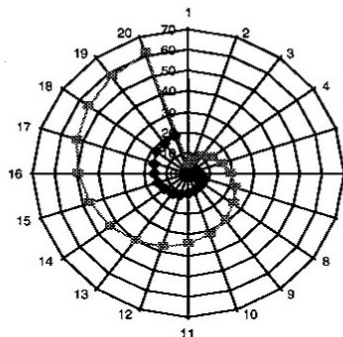
b. standaard gesloten representatie

$$\begin{aligned} f(0) &= 4 \\ f(N) &= f(N-1) + 3 \end{aligned}$$

c. recursieve definitie



d. grafiek gemaakt door een spreadsheetprogramma



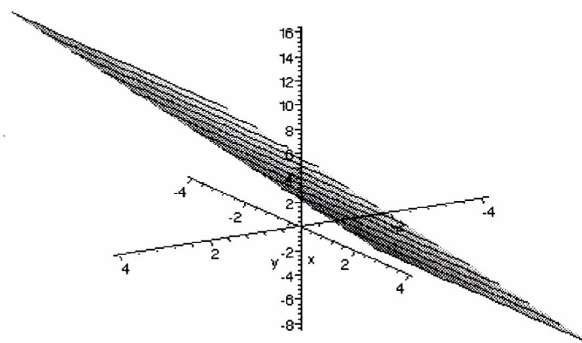
e. onbekende en onbruikbare representatie gemaakt door hetzelfde spreadsheetprogramma

figuur 4: enkele representaties voor de functie f

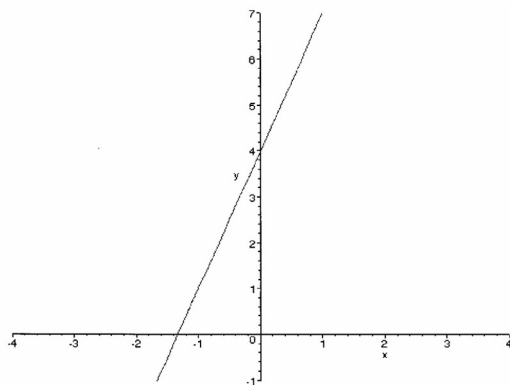
Deze recursieve definitie wordt in het algemeen beschouwd als didactisch complexer en hoort daarom - in ieder geval in het Verenigd Koninkrijk - niet tot het verplichte curriculum. Dit ondanks het gegeven dat veel, wellicht alle leerlingen geneigd zullen zijn de getalrelaties op een verticale manier te lezen (tel er 3 bij op) - dat wil zeggen tot het moment dat zij worden aangespoord het anders te doen dan waar de context aanleiding toe geeft (zie Cuoco (1995) voor de implicaties van het gebruik van computers als geavanceerde rekenmachines bij het ondersteunen van het overdenken van functies).

De grafieken die met één druk op de knop kunnen worden gemaakt, geven niet alleen de traditionele grafiek (links-onder in figuur 4), maar ook enkele meer ongebruikelijke exemplaren - die net zo makkelijk beschikbaar komen voor de gebruiker van de spreadsheet. De grafiek rechts vraagt een nadere doordenking, maar is - voor zover ik kan nagaan - redelijk nutteloos!

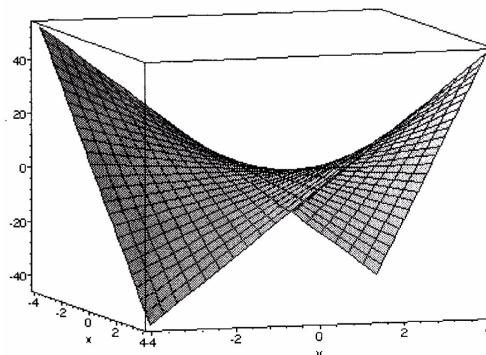
Wat grafieken als deze dan ook laten zien, is dat het net zo belangrijk is om nieuwe representaties kritisch te kunnen bekijken, als om meer gebruikelijke representaties te kunnen interpreteren.



figuur 5b: een grafiek van dezelfde functie, maar waarbij de variabelen anders gekozen zijn



figuur 5a: een grafiek van de functie $y = 3x + 4$



figuur 5c: een grafiek van een geheel andere functie $z = 3xy + 4$ (waarbij de assen voor de zichtbaarheid een afgesloten ruimte suggereren).

Ik wijs de lezers van (statische) tekst erop dat deze grafieken dynamisch zijn, wat zoveel wil zeggen als dat (b) en (c) kunnen worden rondgedraaid en aldus verkend.

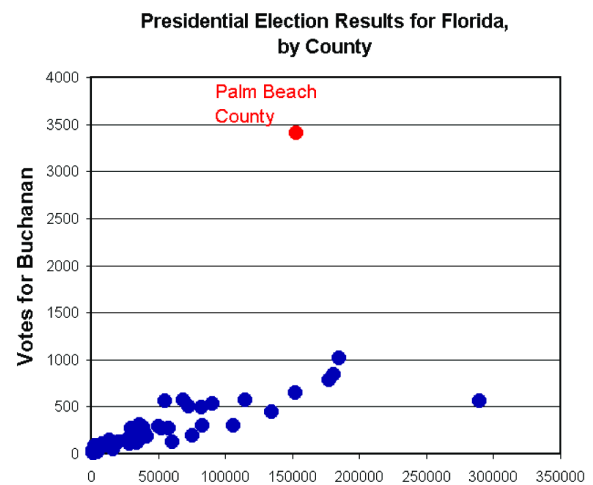
Ook is het de moeite waard om de vergelijking $y = 3x + 4$ te laten voorstellen door het grafische rekenmachineprogramma dat ik gratis bij mijn computer kreeg (Avitzur, e.a., 2000). Of $z = 3x + 4$: merk op dat een 'willekeurige' naamsverandering van de variabele y hier meer dan willekeurige consequenties heeft (zie figuur 5)! Of $z = 3xy + 4$. Dit is natuurlijk niet dezelfde functie en ook niet tweedimensionaal. In een dynamisch medium, terwijl we kijken hoe het oppervlak ronddraait en nagaan wat voor ding het is, worden we aangemoedigd het ondenkbare te denken: zijn drie dimensies noodzakelijkerwijs moeilijker te begrijpen dan twee? Moeten we nog altijd voor lief nemen dat een nette voortgang van twee dimensies naar (voor sommige) drie op een of andere manier 'natuurlijk' is? Wat is 'natuurlijk' eigenlijk, nu het vanzelfsprekender is dingen op een computerscherm te visualiseren dan op enige andere manier? Er is uiteraard wat voor te zeggen dat wij op z 'n minst net zo'n rijke verzameling intuïties hebben verworven door met onze handen over oppervlakken te aaien, als door het gedachte-experiment van het reizen over een eendimensionale lijn (een verzameling punten), die een functie representeert.⁴ Er is opvallend weinig onderzoek gedaan dat de vigerende epistemologische en didactische uitgangspunten op deze manier ter discussie stelt (zie voor een uitzondering Papert (1996)). Dat neemt niet weg dat er op z 'n minst duidelijke richtingen zijn waarin onderzoek zou kunnen doorgaan. Ik ga daarop later in.

De veranderingen in representaties, die mogelijk worden gemaakt door nieuwe technologieën, vragen om een heroverweging van leerlijnen en het opbouwen van kennis in relatie tot de leeromgevingen waarin dit gebeurt. Eveneens vraagt het om een heroverweging van de maatschappelijke gevolgen. Laat ik met een beschrijving toelichten wat ik bedoel als ik zeg dat individuen iets moeten begrijpen van de onderliggende modellen in alledaagse en beroepssituaties.

Een relatief recent voorbeeld. Een van de opmerkelijke aspecten van de discussie rond de Amerikaanse presidentsverkiezingen was de mate waarin de media - in ieder geval in het Verenigd Koninkrijk - hun uitspraken over wie werkelijk gewonnen had baseerden op statistisch materiaal. De media werden overspoeld met informatie over het aantal stemmen, het percentage stemmen in ieder kiesdistrict, informatie uit peilingen gedaan voor en direct na de verkiezingen, enzovoort.

Tussen al die informatie vond ik enkele interessante voorbeelden die meer waren dan zomaar informatie. Figuur 6 laat een van de grafieken zien die ik op het internet vond en die gemaakt werd door twee statistici. In de grafiek zijn het aantal stemmen op Bush tegen die op Bucha-

nan uitgezet voor ieder kiesdistrict in de staat Florida. Aan de grafiek is goed te zien dat er - met één belangrijke uitzondering, die correspondeert met de uitgebrachte stemmen in het omstreken Palm Beach - een grote correlatie is tussen het aantal stemmen op Bush en die op Buchanan.



figuur 6: verkiezingsuitslagen van de staat Florida per kiesdistrict: Bush versus Buchanan (G. Adams en C. Fastnow)

Het onderliggende model gaat uit van de volgende hypothese: hoe conservatiever het district (waardoor Bush meer stemmen zou binnenhalen dan de democratische kandidaat Gore), hoe waarschijnlijker het wordt dat het aantal stemmen op Buchanan - hoewel veel kleiner in aantal - verhoudingsgewijs groter zou worden vanwege de extreem conservatieve denkbeelden van Buchanan. En dat is wat figuur 6 laat zien. De grafiek biedt echter niet alleen informatie. Door de data in een scatterplot te representeren krijgen we nieuwe kennis (maar helaas geen zekerheid) over de onwaarschijnlijkheid van het resultaat van Palm Beach, over het uitzonderlijke van deze uitslag en over de juistheid van het onderliggende model over stemmen op Bush en Buchanan.

Dit voorbeeld brengt me bij een tweede thema, gelegen op het kruispunt van het gemeenschappelijke en het individuele. Namelijk dat de mogelijkheid om dit soort omzetting van informatie in kennis te begrijpen een cruciaal aspect is van het functioneren in de 21^{ste} eeuw. Dit tijdsgewricht vraagt om een kritische blik op representaties en de ontwikkeling van een gevoel voor modellen. De moeilijkheid daarbij is, zoals het voorbeeld van de Amerikaanse verkiezingen liet zien, dat de wiskunde niet direct vanzelfsprekend is; er moet worden gemathematiseerd om zicht te krijgen op de variabelen en de relaties daartussen die een rol spelen. Natuurlijk ging het bij de Amerikaanse verkiezingen om veel meer dan zo maar een wiskundige analyse, maar zoals we zagen helpt wiskundig modelleren om inzicht te krijgen in de situatie. Feitelijk is deze onzichtbaarheid van de wiskunde een zich ontwikkelende karakteristiek van het laatste deel van de af-

gelopen eeuw: terwijl wiskunde een steeds grotere rol speelt in allerlei processen, wordt zij tegelijkertijd minder zichtbaar. In een recent rapport van de 'Society for Industrial and Applied Mathematics' wordt de rol die wiskunde speelt op de werkplek als volgt beschreven: 'Wiskunde is levend en in goede doen, maar leeft onder verschillende namen ... Wiskunde is vaak onzichtbaar voor niet-technici, omdat over de rol van wiskunde niet gepubliceerd wordt en deze ook niet wordt benadrukt, met name niet naar het management.' (Mathematics in Industry (1998)).

De werkplek staat model voor het problematische karakter van de rol die wiskunde speelt in het persoonlijke en maatschappelijke leven. Het toont ook hoe wiskunde lijkt te verdwijnen in activiteiten die, weliswaar onder de oppervlakte, alomtegenwoordig zijn. Ik zal me daarom nu richten op de werkplek.

3 Op de werkplek

In een poging zicht te krijgen op vragen als hoe wiskundige opvattingen tot stand komen, hoe we de aard van wiskundige kennis kunnen karakteriseren, en hoe we de overdracht als metafoor voor hoe wiskundige kennis wordt overgedragen, verrichtten C. Hoyles, S. Pozzi en ikzelf in de jaren negentig enkele studies naar wiskundige componenten van professionele expertise. Meer specifiek vroegen we ons af welke rol wiskunde speelt bij het op elkaar afstemmen van werkzaamheden. Omgekeerd vroegen we ons af hoe wiskundige kennis veranderde onder invloed van overleggen en de uitwisseling van ervaringen in werksituaties (Noss & Hoyles, 1996a; Pozzi, Noss & Hoyles, 1998; Noss, Pozzi & Hoyles, 1999; Noss, Hoyles & Pozzi, 2000; Hoyles, Noss & Pozzi, 2001; Noss, Hoyles & Pozzi, 2002).

In deze studies ging het om bankmedewerkers, verpleegkundigen en piloten in de burgerluchtvaart. Later deden P. Kent en ikzelf een studie naar bouwkundig ingenieurs, waaruit ik eerder het citaat haalde van een bouwkundige van het British Museum over Newton. Ik zal me richten op deze laatste studie, maar vat eerst even samen wat we vonden in eerdere studies, met name die over verpleegkundigen.

Allereerst blijkt er een duidelijk onderscheid tussen de zichtbare wiskunde en wat er in de praktijk gebeurt. Dat wil zeggen, terwijl bij routinematige handelingen op het eerste gezicht niet meer dan eenvoudige berekeningen worden gebruikt, blijkt in de praktijk dat het hierbij zelden gaat om aanpakken die op school werden aangeleerd. Bijvoorbeeld bij het toedienen van medicijnen blijken de gebruikte getalsmatige aanpakken nauw verbonden met kenmerken van de werking, het specifieke medicijn, het label op de verpakking of de soort eenheden waarin het

wordt toegediend. De verpleegkundigen bleken een goed gevoel te hebben voor samenhang tussen theorie en praktijk, maar ze gebruikten daarbij vrijwel nooit rekenregels die ze op school hadden geleerd. Ze waren zelfs soms verbaasd dat de (correcte) kennis die zij gebruikten kon worden uitgedrukt in algemene termen.

De tweede verrassende vondst was dat getalsmatige berekeningen werden gekoppeld aan impliciete modellen, waarmee moest worden beredeneerd hoe de dosering het gedrag van het systeem in kwalitatieve en kwantitatieve zin bepaalde, bijvoorbeeld hoe een concentratie van een medicijn in het lichaam varieert met de tijd. Dit werd duidelijk bij incidenten waar het systeem faalde. In dit soort situaties kwamen wiskundige elementen aan de oppervlakte, waardoor wij een helderder beeld kregen van de rol die de wiskunde speelde.

Tot slot vonden we dat wanneer er met getallen moest worden gerekend, deze getallen gebonden bleven aan hun context en niet naar voren kwamen als 'pure' getallen. Dat wil zeggen dat terwijl het lijkt alsof getalsmatige verbanden in de beroepspraktijk terechtkomen als kale getallen en operaties, het in werkelijkheid vaak zo is dat deze getallen gezien worden als een eigenschap van het object, naast alle andere eigenschappen die minstens zo belangrijk zijn voor de beroepsbeoefenaar.

Samengevat probeerden we niet alleen te kijken hoe wiskunde op de werkvloer werd gebruikt, maar we probeerden ook te karakteriseren wat voor soort wiskunde beroepsbeoefenaren gebruiken. Om een beter beeld te krijgen keken we naar bouwkundig ingenieurs, omdat wiskunde in hun werk een grote rol lijkt te spelen en zij bovendien relatief hoog geschoold zijn in de wiskunde.

Via onze studies kwamen we in contact met een groot bedrijf in Londen met vele ingenieurs met verschillende specialismen. We interviewden ongeveer twintig van hen, volgden communicatie via e-mail, woonden projectvergaderingen bij en onderzochten een aanzienlijk aantal teksten, waaronder wiskundeboeken voor ingenieurs. Wiskundige kennis zit - zo merkten we - verspreid over het bedrijf. Er zijn bijvoorbeeld enkele analisten die wiskundige analyses uitvoeren (soms ondersteund door een computer) en programmeurs, maar ook ingenieurs die maar heel weinig wiskundigs te doen hebben. We gaan later op enkele van deze gevallen in. Maar eerst wil ik wijzen op de zeer vruchtbare onderzoeksmethode die wij gebruikten. We keken nauwkeurig naar de grenzen tussen de verschillende groepen ingenieurs en probeerden te begrijpen welke soort van epistemologische en cognitieve veranderingen wiskundige objecten ondergingen bij het passeren van deze grenzen. Ik ga hierop nu echter niet verder in.

Hier richt ik mij meer op het groepsgebeuren dan op de individuele persoon. Ik zal mij richten op een breder aspect van deze verdeelde kennis; niet zoals deze kennis aanwezig is bij een bepaalde ingenieur op een bepaald moment, maar hoe deze kennis past bij een bepaalde si-

tuatie, gezien vanuit de brede gemeenschap van ingenieurs. Ik zal daarbij beginnen bij een van de ingenieurs, die ons vertelde: 'We gebruiken slechts vijf procent van de wiskunde die we op de universiteit leerden.' Een ander beweerde: 'Zodra je de universiteit verlaten hebt gebruik je de wiskunde van daar niet meer. Een kwadraat nemen of iets tot de derde macht uitrekenen vormen de meest ingewikkelde berekeningen. Voor het overgrote deel van de ingenieurs hier geldt dat een groot deel van de wiskunde die ze werd onderwezen - ik zeg met opzet niet leerden - niet wordt toegepast. Er zijn slechts enkele specialisten, minder dan twee procent van de ingenieurs in dit bedrijf, die hun hele leven de wiskunde doen waarmee wij worstelden op de universiteit.'

We keken hier kritisch naar omdat ons eerdere werk met beroepsbeoefenaren, evenals vele andere studies voor practici, laat zien dat deze vaak glashard ontkennen dat wiskunde een rol speelt in hun activiteiten.⁵ Dit heeft, denk ik, te maken met de overgangen tussen en binnen werkwijzen: wanneer de wiskundige kennis van individuen en gemeenschappen deze grenzen passeert, neigt de balans tussen wat gebruikelijk en nieuw is, tussen wat praktisch en theoretisch is, zichtbaar te worden als herkenbare wiskundige handelingen. Dit houdt verband met het onderscheid dat Artigue (2002) maakt tussen pragmatische en epistemologische waarden van *rekenwijzen*.

In onze vroegere studies beschreven we storingen als lokale gebeurtenissen, in ieder geval in de tijd. Dat wil zeggen, dat deze storingen in het algemeen optreden als er zich een korte breuk in de gebruikelijke praktijk voordoet, een hikje dat meestal snel verholpen (of omzeild) wordt. Hierbij zijn vooral de ontdekker van de storing of zijn/haar directe collega's betrokken. In de bouwkunde, zo gaf ik aan, zijn de structuren omvangrijk, in de zin dat het wiskundige werk over een groot aantal personen is verdeeld.⁶ Dit biedt de mogelijkheid om nauwkeuriger te kijken naar de effecten van een storing in een dergelijke grote structuur.



figuur 7: de Millennium Bridge wiebelde te hard bij de opening vanwege het grote aantal voetgangers dat over de brug liep

Figuur 7 laat de Millennium Bridge zien in het centrum van Londen, een prachtige nieuwe voetgangersbrug over de Theems die in het jaar 2000 geopend zou worden. Helaas liep op de openingsdag een enorme mensenmassa over de brug, die daardoor vervaarlijk begon te zwaaien. Twee dagen later werd de brug gesloten. Als onderdeel van ons project interviewden we enkele ingenieurs die verantwoordelijk waren voor het ontwerp van de brug en

voor het aanbrengen van de remedie tegen het bewegen. En dankzij de openheid van het ingenieursbedrijf staat veel van deze informatie op hun website.⁷

Al vanaf het moment dat de brug begon te wiebelen, begon het gissen en speculeren over wat er verkeerd ging en waarom. Met name de betrokken ontwerpende ingenieurs lieten weten dat het onmogelijk was te berekenen hoe de brug zich zou gaan gedragen. Als we ons hierdoor laten leiden, dan betekent dit nogal wat voor het reken-wiskundeonderwijs, zoals blijkt uit dit citaat uit het Educational Supplement van de *Times* over een recent rapport van de Royal Society over meetkunde door de Joint Mathematical Council van het Verenigd Koninkrijk:

'... door een gebrek aan goede leraren wiskunde, worstelen veel leerlingen in het voortgezet onderwijs met het doorzien van verschillende meetkundige vormen, ook diegenen die hoge rapportcijfers hebben. Een gevolg hiervan is, zo werd ons verteld, dat veel studenten die op de universiteit kiezen voor algemene natuurwetenschappen en bouwkunde daarin mislukken. Dit moeten we serieus nemen. Een grondige basis voor meetkunde is essentieel als het Verenigd Koninkrijk in de voorhoede wil blijven lopen bij genetica, het ontdekken van medicijnen en architectuur. We mogen dan voorop gelopen hebben bij Dolly het schaap en het menselijke genoom project, het fiasco van de wiebelende Millennium Bridge over de Theems laat zien dat we moeten oppassen met zelfingenomenheid.'

(Times Educational Supplement, 10 augustus 2001)

Ik wil niet beweren dat ik blij ben met het verdwijnen van meetkunde uit het curriculum in het Verenigd Koninkrijk. Integendeel, ik ben het in dit opzicht helemaal eens met de schrijvers van het rapport en gevoelens die vertolkt worden in het artikel in de *Times*: het gebrek aan meetkundeonderwijs in Groot-Brittannië is wellicht een van de meest betreuenswaardige elementen die de huidige slechte staat van het onderwijs typeren.⁸ Maar dit was niet het probleem bij de Millennium Bridge.

In feite lag het probleem helemaal niet in de wiskundige berekeningen, maar in het modelleren van het gedrag van de brug. Bouwkunde wordt beheerst door allerlei (geschreven en ongeschreven) regels precies geïsoleerde ontwerpknis, die bijvoorbeeld in detail alle hoofdelementen van een structuur specificceert, marges aangeeft en rekenregels voorschrijft. Deze bestaan in het algemeen uit formules waar de bouwkundige de relevante waarden moet invullen, zoals die voor het onderhavige project gelden. Het ontwerpen van bruggen, dat ligt voor de hand, heeft te maken met dergelijke regels en het ontwerpen van voetbruggen is in deze zin dan ook goed gedocumenteerd. Maar geen van deze regels, en daar ligt de bron van de moeilijkheden, richt zich op zijdelingse bewegingen. Bij het ontwerpen van voetbruggen houdt men wel rekening met verticale trillingen, maar neemt men aan dat horizontale of zijdelingse trillingen elkaar zullen opheffen en daarom kunnen worden genegeerd.

En juist deze laatste aanname bleek onjuist in het geval van de nieuwe brug, die door duizenden mensen tegelijk

werd gebruikt. De zijdelingse krachten die werden uitgeoefend door de mensen die over de brug liepen, veroorzaakten een corresponderende zijdelingse trilling van de brug. En toen het trillen eenmaal begon werd dit niet opgeheven door tegengestelde trillingen, maar begonnen de mensen die over de brug liepen het slingeren van de brug te compenseren en oefenden daarbij zijdelingse krachten uit 'in de maat van de trilling van de brug'. Dit versterkte het trillen van de brug. Het probleem daarbij was niet dat de wiskundigen fouten hadden gemaakt in hun rekenwerk, het waren de regels waarop het ontwerp was gebaseerd die geen rekening bleken te houden met een cruciale variabele.⁹ Of, zoals een senior-bouwkundige die aan de brug werkte opmerkte: 'De gebruikelijke kennis benadrukt zo sterk dat de input van lopen verticaal is met een frequentie van 2 Hertz, dat het je blind maakt voor het feit dat er ook nog een horizontale kracht is met een frequentie van 1 Hertz.' Met als gevolg dat geen van de uitgebreide rekenmodellen die werden gebruikt bij het ontwerpen van de brug het zijdelings trillen meenam.

Ik wil de aandacht vestigen op een specifiek aspect in dit verhaal. Het wiskundige werk van ingenieurs is, zo zagen we ook in het bedrijf dat we bestudeerden, nogal verschillend van aard: er ligt wiskundige kennis opgesloten in de bouwregels en er is wiskundige kennis ingebouwd in de rekenmodellen. Ook gebruikten de bouwkundigen die de brug in elkaar zetten wiskundige kennis door (wiskundige) voorschriften toe te passen. Elk van deze voorschriften heeft zijn eigen beschrijvingswijze en die verschillen onderling behoorlijk. Bovendien verschillen ze van de wiskunde die werd onderwezen aan de universiteit. Dus de verdeling van wiskundige arbeid over de verschillende deelgemeenschappen en de verandering die wiskundige kennis ondergaat wanneer ze de grens van de ene deelgemeenschap naar de andere deelgemeenschap overschrijdt, verhullen de modellen die onderliggend zijn in de praktijk evenzo als in de voorbeelden die ik eerder aanhaalde. Modellen zijn namelijk alomtegenwoordig, maar worden ook algemeen verhuld.

Ik wil tot slot van dit deel benadrukken wat wel en wat niet belangrijk is in dit voorbeeld voor het leren en onderwijs van rekenen-wiskunde. Het is niet zo belangrijk hoeveel mensen constant toegang moeten hebben tot precieze details van de modellen die onderliggend zijn voor beroep en samenleving. Dat zijn er niet veel en het is zeker geen meerderheid, hoewel ik ervan overtuigd ben dat het er meer zijn dan het op het eerste gezicht lijkt. Wel is de wereld bedolven onder modellen en iedereen moet weten wat een model is, ook al kan hij of zij er niet zelf een ontwerpen. Iedereen moet in staat zijn de ideeën achter een model te interpreteren, ook al kan hij de implicaties voor een bepaald geval niet nagaan. Iedereen die een spreadsheetprogramma gebruikt moet een gevoel hebben hoe de getallen daar komen, waarom en hoe subprogramma's en knoppen werken.¹⁰

Om wat voor soort kennis gaat het hier? Het voorbeeld van de Millennium Bridge verschaft enig inzicht. Het gaat om het weten *dat* dingen werken op een geprogrammeerde manier in plaats van (noodzakelijk) weten *hoe*. Het gaat om de kennis dat in de keuze van variabele aannamen verstopt zitten en dat er een relatie is tussen deze variabelen. Het gaat daarbij om kennis van representaties rond verbindingen tussen de variabelen, in plaats van getalsmatige en rekenkundige kennis over deze verbindingen. Het betreft het interpreteren van modellen die door anderen werden gemaakt en het delen en kritisch bekijken van deze modellen, samen met de verschillende representaties waarin deze voorkomen. En tot slot heeft het te maken met hoe kennis wordt gecommuniceerd naar anderen die in verbinding staan met dezelfde of gerelateerde systemen. Deze kennis over kennis noem ik een meta-epistemologische houding.

Ik kan veel meer naar voren brengen over de cognitieve en epistemologische aspecten van dergelijk situatiegebonden begrijpen, maar zal hier vanwege beperkte ruimte niet op ingaan (zie Noss 2002) voor een bespreking van deze en gerelateerde vragen). In plaats daarvan wil ik enkele implicaties van dit alles beschouwen voor het ontwerpen van onderwijs.

4 Ontwikkelen van een meta-epistemologische houding

Het bouwen van een gevoel voor onderliggende mechanismen

Een belangrijke implicatie voor het ontwikkelen van een meta-epistemologische houding, is de noodzaak van het ontwerpen van reken-wiskundige leeromgevingen die dit soort mechanismen tastbaar en zichtbaar maken. Ik zal dit toelichten aan de hand van een project in Londen, het zogenaamde 'Playground Project'.¹¹ C. Hoyles en ikzelf geven leiding aan dit project, waarbij verder een groep onderzoekers op verschillende plaatsen in Europa betrokken is om een systeem te ontwikkelen waarmee kinderen van acht jaar en jonger met computerprogramma's kunnen spelen, ze kunnen aanpassen en verspreiden.¹² Ons doel is om kinderen de rol te geven van ontwerpers en producenten van spelletjes, in plaats van slechts gebruikers te zijn van spellen die door volwassenen ontwikkeld zijn.

Er waren twee redenen waarom wij voor computerspelletjes kozen: een culturele en een wiskundige. Vanuit een cultureel standpunt zijn videospelletjes en dergelijke (zoals animaties en interactieve video) het meest nadrukkelijke kenmerk van de kindercultuur op de grens van de twintigste en eenentwintigste eeuw. En of je hier nu blij mee moet zijn of niet, deze spelletjes spreken miljoenen kinderen aan en zijn daarmee een middel voor populaire

culturele uitingen (op het moment van schrijven heeft de Pokémon-gekte juist afgedaan; een andere rage zal spoedig zijn opwachting maken). Inleving in de kindercultuur is noodzakelijk (maar zeker niet voldoende) bij het ontwikkelen van de meta-epistemologische houding die wij nodig achten. De uitdaging is aanzienlijk, want één effect van de digitale revolutie is precies dat weinig dingen uitnodigen tot nader onderzoek: je komt niet te weten hoe een digitaal horloge werkt door het te openen, niet wat een wasmachine doet door een wasprogramma te beginnen en te stoppen. Al deze mechanismen, die eertijds in ieder geval enkele kinderen een kans boden om te onderzoeken hoe ze werkten, zijn daarvoor nu afgesloten. Omdat de gebruikers geen nuttige delen kunnen onderscheiden, ontstaan ook geen leereffecten.

Zoals ik schreef volstaat de culturele invalshoek niet. De tweede reden voor onze keus voor videospelletjes is dat deze veel materiaal voor exploratie van interessante wiskundige en wetenschappelijke fenomenen laten zien. De videospelletjes vertegenwoordigen een gesloten systeem met formele regels. Wanneer het een het ander raakt gebeurt er iets bepaalds. Als de snelheid boven de x ligt, krijgt y een bepaalde waarde. Wanneer een knop op de joystick wordt ingedrukt verandert een object van kleur. Spellen vormen in het algemeen de eerste ervaringen van kinderen met wat het betekent om binnen een formeel systeem te functioneren (bijvoorbeeld 'als u over 'start' gaat krijgt u tweehonderd euro'); de videospelletjes zijn een wiskundige concretisering van een dergelijk formeel systeem. Wij gaan nog één stap verder bij het kinderen kansen bieden om de wereld van formele systemen te onderzoeken, te bouwen en te herbouwen en ze toegang te verschaffen tot de wiskunde die in een typisch videospelletje verborgen zit. Bij het formeel uitdrukken van wat je wilt laten gebeuren is een kind - zo hopen wij - bezig met het beschrijven van interessante reken-wiskundige fenomenen. Tot voor kort betekende dit dat de interactie met de computer verliep via tekst in de vorm van programmeertalen. Zonder twijfel bood dit aanzienlijke mogelijkheden voor het verkennen van quasi-algebraïsche systemen. Het werken van kinderen met 'Logo' is hiervan een goed gedocumenteerd voorbeeld en er zijn meer mooie voorbeelden (voor een beschouwing zie bijvoorbeeld: diSessa, Hoyles & Noss (1995) en Noss & Hoyles (1996b)).

Het probleem is dat veel van de kinderen met wie wij werkten niet voldoende goed konden lezen of schrijven. Daarom baseerden wij ons ontwerp en implementatie van een systeem op een nieuwe interface, die we 'ToonTalk' noemden, waarbij de code bestaat uit animaties.¹³ Dit betekent dat de taal echte taal is, zonder kunstmatige grenzen in wat kan worden uitgedrukt. Het betekent ook dat de code feitelijk is wat je op het scherm ziet: bewegende robots die zijn geprogrammeerd om taken uit te voeren, rekenkundige operaties worden uitgevoerd door een geanimeerde muis op het beeldscherm en zelfs het knippen

en plakken wordt gedaan door typetjes op het scherm, zoals bijvoorbeeld een bewegende stofzuiger. Het is moeilijk om 'ToonTalk' goed te beschrijven: de kracht en de mogelijkheden worden duidelijk bij het zien van de animaties. Dit is een kleine moeilijkheid in het systeem, omdat het 'lezen' van een programma eigenlijk 'het waarnemen van' een robot is die taken uitvoert. Deze toevoeging van dynamiek aan het lezen en schrijven van programma's betekent een fundamentele verandering in de opvattingen over wat een programma is, welk soort kennis een programma vertegenwoordigt en wat het betekent om een programma te schrijven. Daarbij is er geen garantie dat deze nieuwe representatie beter is dan de oude en dus moeten we ze naast elkaar beschouwen.

Twee problemen kwamen naar voren zodra we met 'ToonTalk' begonnen te werken. Ten eerste, zoals alle voorgangers - ook bij 'Logo' - kwam naar voren dat het construeren van complexere, maar interessante programma's erg moeilijk is. Wij kozen er daarom voor om een nieuwe laag met 'gedragingen' te bouwen. Dit zijn heldere en functionele delen van het spel, waarvan volstrekt duidelijk is wat ze doen en die kunnen worden gecombineerd om complexe functionaliteiten te bouwen. Deze programma-elementen of gedragingen functioneren als componenten, met de opmerking dat de kinderen ze kunnen bekijken en (her)bouwen.

Ten tweede constateerden wij dat 'ToonTalk' niet afgestemd was op de taak die wij in gedachten hadden. Het was een vrij nieuw systeem dat niet gemaakt was naar de eisen die werden gesteld aan het bouwen van videospelletjes. Dit bood zowel een uitdaging als een kans. Een uitdaging omdat alle functionaliteiten vanuit het niets moesten worden opgebouwd. Een kans omdat het de mogelijkheid bood een programmeeromgeving te bouwen zoals wij nodig hadden: een nieuwe verzameling representaties voor programmeren die kinderen zich eigen zouden kunnen maken.

Ik kan hier niet nader op ingaan en wil u graag voor achtergronden over en opbrengsten van het project verwijzen naar Noss, Hoyles, Gurtner, Adamson & Lowe (2002), Hoyles, Noss & Adamson (in druk) en Kaput, Hoyles & Noss (in druk).

Hier wil ik onze aanpak tonen en nagaan hoe deze wellicht enkele voorwaarden vervult voor het ontwikkelen van een meta-epistemologisch standpunt. Terwijl ik dat doe zal ik het systeem verder toelichten, hoewel ik me realiseer dat dat heel moeilijk is in een statische tekst.¹⁴

5 Een voorbeeld

Mitchell is acht jaar oud en zit op een school in de binnenstad van Londen. Hij hielp de onderzoekers ongeveer een jaar bij het ontwerpen en verbeteren van het Play-

ground-systeem. Hij deed mee aan verschillende experimenten met Playground bij de computerclub van zijn school waarvan hij lid is. Mitchell speelt in dit voorbeeld een spel waarin hij het spelfiguur 'Dusty', met twee benen aan de rechterkant, rondbeweegt (fig.8). Iedere keer als een van de knoppen van de joystick wordt ingedrukt schiet Dusty met bloemen, en de speler krijgt punten door met de bloemen een figuurtje te raken dat verticaal over de linkerzijde van het scherm beweegt. Zodra het doel geraakt is door een bloem, verandert het van vorm en wordt het een ander bewegend spelfiguur.

Mitchell vindt het spel erg makkelijk en verdient veel punten, omdat hij zijn spelfiguur zo dicht bij het doel kan plaatsen als hij wil. Hij heeft veel plezier in het spel, maar het is niet makkelijk om na te gaan wat hij leert en het is verleidelijk het af te doen als een spel waarvan er dertien in een dozijn gaan.



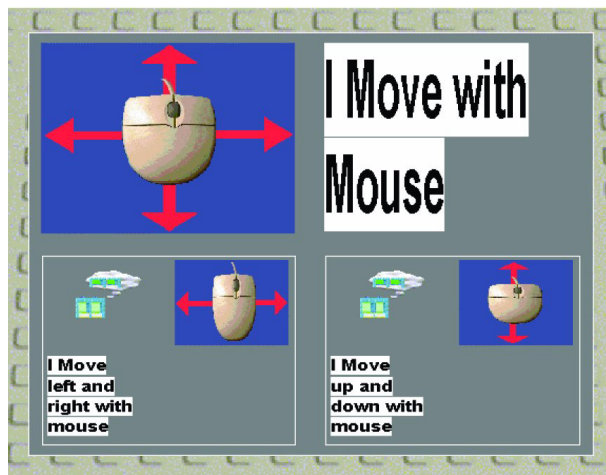
figuur 8: een scherm uit het spel. Dusty schiet bloemen van rechts naar links. Een doel beweegt aan de linkerkant van het scherm. Het doel verandert van vorm als het getroffen wordt door een bloem

Mitchell besluit dat het spel leuker wordt als het een competitie-element heeft. Op zijn verzoek voegt de onderzoeker een andere spelfiguur toe, die wordt bediend met de computermuis. De onderzoeker legt Mitchell uit hoe ze te werk gaat bij het omzetten van het programma en laat zo zien hoe ze handelingen met de joystick vervangt door handelingen met de muis. Omdat dergelijke gedragingen van het programma als grote gehelen beschikbaar zijn, kunnen deze eenvoudig veranderd worden door de ene component - dat zichtbaar is als een bewegend figuurtje - te vervangen door een andere.

Zo kan bijvoorbeeld 'ik beweeg met de joystick' worden vervangen door 'ik beweeg de muis'. Achter ieder object zit een programma, in de zin dat er een directe verbinding is tussen het object en wat het doet, wat kan worden geactiveerd door het als het ware aan te zetten. En hoewel Mitchell goed in staat is de beschrijvingen te lezen, kan hij ook, als hij dat wil, luisteren naar wat de gedragingen zeggen dat ze doen (stemgeluid is beschikbaar) en daarbovenop is er een bewegende representatie van wat de ge-

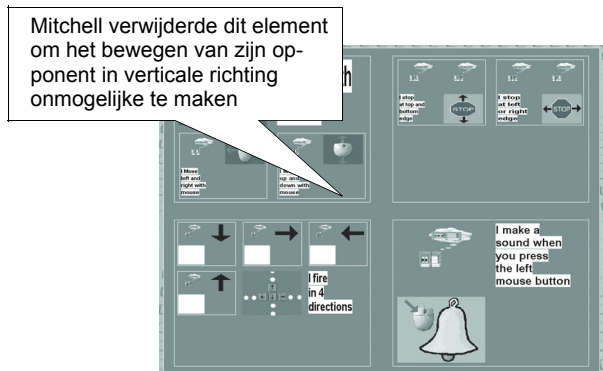
draging doet (wat in statische vorm zichtbaar is in de rechter bovenhoek van figuur 9).

Een laatste element van de gedraging 'ik beweeg de muis' is dat het feitelijk bestaat uit twee sub-componenten, namelijk 'ik beweeg naar links en rechts met de muis' en 'ik beweeg van boven naar beneden met de muis' (en iets dergelijks geldt ook voor de gedragingen rond de joystick). Beide sub-componenten zijn zichtbaar onderin figuur 9.



figuur 9: de component 'ik beweeg met de muis' en twee sub-componenten die de muis horizontaal en verticaal bewegen

En, zoals later bleek, deze manier waarop de componenten waren gemaakt had onverwachte gevolgen. Mitchell speelt het spel voor twee spelers met de onderzoeker. Plotseling vraagt hij iedereen in de kamer de ogen te sluiten en niet te gluren. Hij verwijdert snel de 'ik beweeg naar links en rechts met de muis'-component van de 'ik beweeg de muis'-gedraging van zijn opponent, zodat die de muis nu alleen maar van boven naar beneden kan bewegen, terwijl hij zelf nog alle kanten op kan om zijn doel zo dicht mogelijk te benaderen (fig.10).



figuur 10: Mitchell verwijdert de horizontale component van de 'ik beweeg de muis' gedraging

Toen we onze ogen weer open mochten doen, vroeg Mitchell triomfantelijk om een nieuwe partij, die hij ui-

teraard en tot zijn plezier - omdat het bewegen van de tegenstander beperkt was tot verticale bewegingen - overtuigend won.

Wat leert ons dit? Allereerst zien we Mitchells geweldige betrokkenheid. We begonnen met de wens om werkelijk door te dringen in de leefwereld van de kinderen; niet alleen om ze te motiveren, maar ook om ze te laten deelnemen in projecten die voor hen persoonlijk betekenisvol zijn, projecten waar ze genoeg om gaven om zichzelf onder te dompelen in de quasi-formele wereld waarin we ze plaatsten.

En dan is er ook een methodologische invalshoek. Het soort gebeurtenis dat uitgangspunt was bij Mitchells truc, komt zelden voor in het onderwijs. Als we denken aan het curriculum van scholen, het programma van de leerkracht en schoolse toetsen, dan heeft het ontwerpen van een systeem dat moeilijk meetbare onderwijsresultaten oplevert weinig zin. Maar dit is erg kortzichtig: het is voor het onderwijs van groot belang om de mogelijkheden van nieuwe technologieën en de interactie tussen het ontwerp en de opbrengst voor het onderwijs na te gaan, en daarom moeten we juist 'ontwerpen voor zeldzame gebeurtenissen' (diSessa e.a., 1995).

Het ontwikkelen van programma's die dezelfde reacties oproepen bij alle gebruikers lijkt aantrekkelijk, maar leidt niet tot veranderingen. In de wiskunde hebben we genoeg rekenregels en procedures, die erop gericht zijn een en dezelfde reactie op te roepen. Maar dat wil niet altijd lukken. Het ontwerpen van systemen die verschillende reacties oproepen betekent risico's nemen, maar opent de mogelijkheid voor werkelijke veranderingen. We kunnen niet weten hoe Mitchell bedacht heeft dat het tweedimensionale bewegen van de muis is opgebouwd uit verticale en horizontale componenten, hoe hij zijn truc bedacht of wat hij precies leerde toen hij de onderzoeker het spel zag veranderen (een interessante vraag, omdat een constructivistische misvatting doet geloven dat iemand niet kan leren door alleen maar te kijken). In reken-wiskundetaal, die hij uiteraard niet gebruikte, kunnen we zeggen dat hij zich realiseerde dat de tweedimensionale beweging kon worden ontbonden in twee eenvoudiger bewegingen. Sterker nog, hij realiseerde zich dat het weghalen van een van deze bewegingen nog steeds een systeem opleverde waarin beweging mogelijk was, hoewel dit beperkt werd tot een beweging in één enkele richting.

Wat deed Mitchell eigenlijk toen hij de genoemde gedraging weghaalde en hoe werd dit ondersteund door ons ontwerp? Hij zag blijkbaar een verbinding tussen een doel (winnen door de speelfiguur van de tegenstander te beperken in zijn bewegingen) en een actie in het programmeren. Anders gezegd, zijn kennis van het spel, zijn doelen en bedoelingen (en de mogelijkheid die voor de tegenspeler onmogelijk te maken) zaten ingebakken in de omgeving door als programmeertaal te kiezen voor manipuleerbare en deelbare objecten. Waarschijnlijk is het zo

dat het modulaire karakter van de programmeertaal en de letterlijke zichtbaarheid van de functie (een beschrijving die overigens geen rol speelt bij de functionaliteit) in dit opzicht belangrijk zijn.

Tot slot wil ik nog ingaan op de manier waarop Mitchell zijn kennis uitdrukte. Hij deed dat niet door erover te praten, dat wil zeggen, niet tot we hem er expliciet naar vroegen. Hij liet zijn kennis zien in zijn handelingen met de muis, waarmee hij de objecten op het scherm bewerkte. Per definitie was hij daarom beperkt in zijn uitingen door de eigenschappen van de gereedschappen die hij kon gebruiken. Hij kwam daarbij niet uit bij een gebruikelijke wiskundige abstractie. Maar hij kwam zeker tot abstractie, namelijk bij een die ingebed was in de gereedschappen en structuur van de situatie. Hoewel dit zeker relaties heeft met de thematiek die ik in dit artikel naar voren breng, zal ik het thema van ingebedde abstractie niet verder uitwerken en verwijs de lezers hiervoor graag naar Noss, Hoyles en Pozzi (in druk). Daaraan wil ik overigens toevoegen dat bij Hoyles en mijzelf de notie begint te ontstaan dat ingebedde abstractie een kenmerk is van vele (maar niet alle) werkplekken.

6 Tot slot

In het voorafgaande besprak ik het belang van een bepaald soort wiskunde die bepalend is voor het sociale en culturele leven in de eenentwintigste eeuw en gaf ik aan wat dit zou kunnen betekenen voor het ontwerpen van nieuwe leeromgevingen. En hoewel vrijwel alle wiskundecurricula van voor het computertijdperk zijn, richt maar heel weinig onderzoek zich op vigerende epistemologische of kentheoretische en didactische uitgangspunten van deze curricula. Deze vragen worden evenwel in de literatuur niet meer uit de weg gegaan (zie bijvoorbeeld Papert (1995)). Het onderzoekswerk in de toekomst zou zich moeten richten op structurele verbanden tussen cognitieve en socio-culturele aanpakken en op het nadrukkelijk bekijken van veelgebruikte representaties naast andere die minder toegankelijk zijn.

Als we kijken naar het reken-wiskundeonderwijs is er iets vreemds aan de hand met nieuwe digitale technieken. Hoewel de rekenkracht steeds meer gebruikt wordt om onderliggende wiskundige kennis minder zichtbaar en aanwezig te maken, is het tegelijkertijd deze digitale techniek die het mogelijk maakt leeromgevingen te ontwerpen in de sfeer van de bedoelde meta-epistemologische houding. Verder maken rekentechnieken het mogelijk om nieuwe representaties te ontwerpen en dynamische elementen te introduceren in overigens statische beschrijvingen en bieden zij nieuwe perspectieven over de wijze waarop het denken zich zou kunnen ontwikke-

len. Het bestuderen van deze nieuwe vormen en hun potentie voor het ombuigen van de geldende epistemologie blijft belangrijk voor toekomstig onderzoek.

Noten

- 1 Dit artikel is een bewerking van een tweetal lezingen: een tijdens de 53ste CIEAEM-conferentie (Verbania, Italië, juli 2001) en een tijdens de 21^{ste} Panama-conferentie (Noordwijkerhout, januari 2003).
- 2 Vertaald door R. Keijzer met dank aan K.P.E. Gravemeijer, A. Post en N. Kuijpers.
- 3 Natuurlijk veranderde ook in de negentiende en twintigste eeuw de relatie tussen betekenis en picturale weergave fundamenteel.
- 4 Deze observatie moet gelezen worden in de context van een recent rapport van de Royal Society (2001) van de Joint Mathematical Council UK over het leren en onderwijzen van meetkunde aan elf- tot negentienjarigen, dat een grotere nadruk op het werken in drie dimensies benadrukt.
- 5 Uiteraard zijn er vele beroepen waarin wiskundige activiteit nauwelijks een rol speelt of juist van de werknemer wordt weggehaald - zoals bij caissières. Maar er zijn vele beroepen waar wel aan wiskunde gedaan wordt en juist daarop richt ik mij hier.
- 6 Kent en ikzelf werken aan een artikel dat op dit aspect ingaat.
- 7 Zie www.arup.com/MillenniumBridge.
- 8 Bovendien is het interessant dat wanneer ingenieurs toegeven dat wiskunde belangrijk is voor het uitvoeren van hun taken, ze meetkunde als meest belangrijke onderwerp in de wiskunde noemen.
- 9 Er kan hier meer over worden gezegd. Zo werd bijvoorbeeld enkele jaren voor de toestand met de Millennium Bridge het gedrag van de brug al beschreven in een ietwat duister Japans tijdschrift, maar dat kwam toen niet onder de aandacht van de ontwerpers. Verder, toen het probleem van het wiebelen van de Millennium Bridge opdook bleek dat meer - wellicht vele - bruggen hetzelfde gedrag vertonen en dat nog meer dat zouden gaan doen als ze door hetzelfde aantal voetgangers zouden worden gebruikt als de Millennium Bridge.
- 10 Dit laatste voorbeeld is gebaseerd op een observatie van het nonchalante gebruik van een spreadsheet door een bankmedewerker (Noss & Hoyles, 1996a).
- 11 Het 'Playground Project' wordt ondersteund door de EU. Er wordt in dit project samengewerkt met partners in Cambridge, Porto, Bratislava en Stockholm. Zie voor meer informatie <http://www.ioe.ac.uk/playground>.
- 12 Ik dank Ross Adamson en Miki Grahame voor hun geweldige samenwerking in het 'Playground'-project. Ik wil verder Phillip Kent bedanken voor onze samenwerking bij het project rond werktuigbouwkundigen. En tot slot wil ik Celia Hoyles bedanken voor de samenwerking in de vele projecten die ik eerder noemde en voor haar constructieve commentaar op eerdere versies van dit artikel.
- 13 Zie www.toontalk.com voor informatie over ToonTalk. ToonTalk werd ontworpen door Ken Kahn, een medewerker van het 'Playground Project'.
- 14 Op www.ioe.ac.uk/playground zijn video-opnamen beschikbaar.

Literatuur

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environ-

- ment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7(3), 245-274.
- Avitzur R., A. Gooding, G. Robbins, C. Wales & J. Zadrozny (2000). *Graphing Calculator 1.3* (software for the Macintosh), Pacific Tech.
- Cuoco, A. (1995). Computational media to support the learning and use of functions. In: A. diSessa, C. Hoyles, R. Noss & L. Edwards (red.). *Computers for Exploratory Learning*. Berlin: Springer-Verlag, 79-108.
- diSessa, A. (2000). *Changing Minds*, Cambridge, MA: MIT Press.
- diSessa, A., C. Hoyles, R. Noss & L. Edwards (red.) (1995). *Computers for Exploratory Learning*. Berlin: Springer-Verlag.
- Dixon, C (1986). *The Institute: a personal account of the history of the University of London Institute of Education, 1932-1972*. University of London: Institute of Education.
- Hoyles, C., R. Noss & S. Pozzi (2001). Proportional reasoning in nursing practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32, 14-27.
- Hoyles, C., R. Noss. & R. Adamson (in druk). Rethinking the microworld idea. Special Issue of the *Journal of Educational Computing Research on Microworlds in Mathematics Education*.
- Kaput, J., R. Noss & C. Hoyles (in druk). Developing new notations for a learnable mathematics in the computational era. In: L. English (red.). *Handbook of International Research in Mathematics Education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Kaput, J. & D. Shaffer (2002). On the development of human representational competence from an evolutionary point of view: From episodic to virtual culture. In: K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers & L. Verschaffel (red.). *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education*. London: Kluwer.
- Mathematics in Industry (1998). *Report of the Society for Industrial and Applied Mathematics*.
- Noss, R. & C. Hoyles (1996a). The visibility of meanings: modelling the mathematics of banking. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 1(1), 3-31.
- Noss, R. & C. Hoyles (1996b). *Windows on Mathematical Meanings: Learning Cultures and Computers*. Dordrecht: Kluwer.
- Noss R., C. Hoyles & S. Pozzi (2000). Working knowledge: mathematics in use. In: A. Bessot & J. Ridgway (red.). *Education for Mathematics in the Workplace*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 17-35.
- Noss R., C. Hoyles & S. Pozzi (2002). Abstraction in expertise: a study of nurses' conceptions of concentration'. *Journal for Research in Mathematics Education* 33(3), 204-230.
- Noss R., S. Pozzi & C. Hoyles (1999). Touching epistemologies: statistics in practice. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 25-51.
- Noss, R. (2002). *Plenary address to the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. University of East Anglia, 2002.
- Noss, R., C. Hoyles, J-L Gurtner, R. Adamson & S. Lowe (2002). Face-to-face and online collaboration: Appreciating rules and adding complexity. Special Issue of *International Journal of Continuing Engineering Education and Life-long Learning*, 12(5/6) on Collaborative Learning in Networked Environments.
- Olson, D. (1994). *The World on Paper. The Conceptual and Cognitive Implications of Writing and Reading*. Cambridge:

Cambridge University Press.

Papert, S. (1996). An Exploration in the Space of Mathematics Educations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 1(1), 95-123.

Pozzi S., R. Noss & C. Hoyles (1998). Tools in practice, mathematics in use. *Educational Studies in Mathematics*, 36, 105-

122.

Royal Society (2001). Report of the Joint Mathematical Council on *Teaching and Learning Geometry*. London: The Royal Society, 11-19.

Tufte E. R. (1983). *The visual display of quantitative information*. Cheshire, Connecticut: Graphics Press.