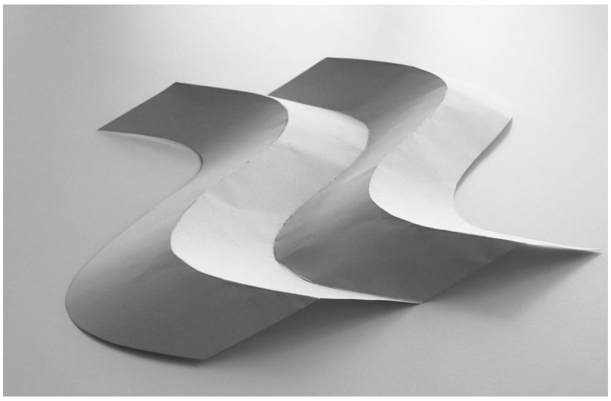
Vouwen zijn recht en krom

A. Goddijn
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Mooi, maar dat kan toch niet?

In deze 'Praktijktip' wordt beschreven hoe dit duinlandschap (fig.1) van papier kan worden gemaakt.



figuur 1

Knippen en vouwen. Tijdsduur twee minuten.
Daarna volgt:

> Leg het duin naast je op tafel. Mensen die langslopen, gaan vanzelf over het papieren duin praten, want het is een mooi ding.

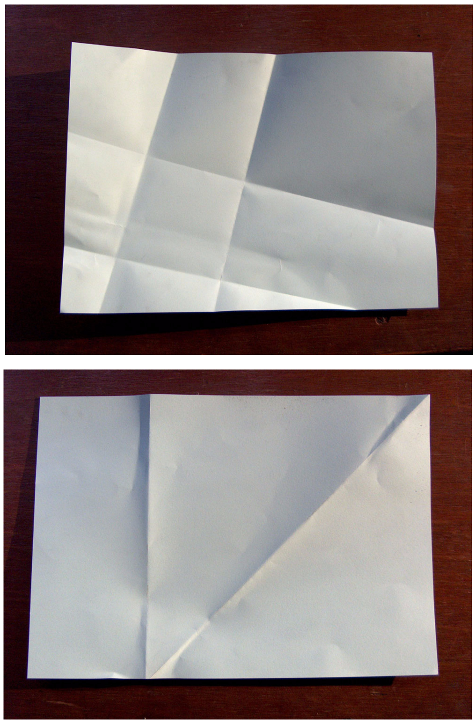
Zo werkt dat: van schoonheid via verrassing naar verbazing.

> Het lezen van deze Praktijktip wordt nu twee minuten onderbroken voor het opvolgen van de aanwijzingen uit de tip. Want niet alleen wenst het oog zich een ruimtelijke versie, ook de tast wil deelnemen aan de geometrische ervaring.

We gaan van verbazing naar reflectie. Altijd geloofd dat vouwen recht zijn, en nu dit ding hier. Hier moet worden nagedacht, dat is duidelijk. Laat ik vooropstellen dat het helemaal niet zo'n gek idee is dat vouwen altijd recht zijn. Want het valt te bewijzen. Na het bewijs keren we naar de gebogen vouw terug.

Metend of meetkundig vouwen

In het dagelijks intuïtiesysteem waarmee we ons in de materiële wereld staande houden, komen allerlei rechte lijnen voor: de rechte lijn van de kortste route, de rechte lijn van een lichtstraal, de rechte lijn van de losgelaten vallende steen, de rechte lijn van de Maliebaan in Utrecht en nu vandaag de rechtheid van de vouw in een vel papier.
De vraag 'waarom recht' betekent het plaatsen van zo'n situatie in een specifiek kader. Om daar wat duidelijker over te kunnen zijn maken we een omweg via een simpele vouwopgave: vouw een vierkant.
Twee fundamenteel verschillende oplossingen zijn hier afgebeeld (fig.2).



figuur 2

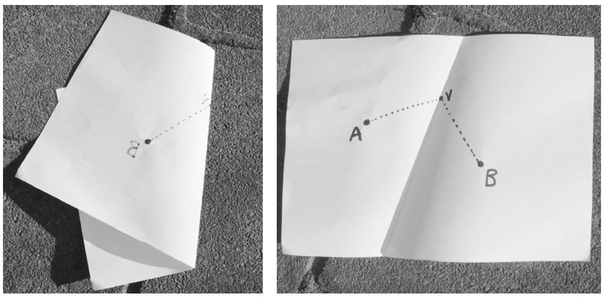
De eerste oplossing berust op het gebruik van een goed timmermansoog. Bij meting zal blijken dat de zijden slechts millimeters van elkaar afwijken en dat de hoeken ook vrijwel 90 graden zijn.
De tweede oplossing roept heel andere associaties op. Ja, handig die schuine vouw. Die is gemaakt door de korte zijde (rechts) op de lange (boven) te leggen. Door de vouw wordt de hoek rechtsboven in tweeën gedeeld. De vouwer koos zijn vouw stellig niet vrij op het oog, maar volgens een bedacht plan. De tweede vouw is even plan-

matig door het punt gevouwen waar de schuine vouw de lange zijde verlaat. De loodrechte stand van deze vouwlijn op de onderlijn van het vel zal bereikt zijn door de linksonderpunt van het vel op het juiste punt van de onderzijde te leggen.

De eerste methode is gebaseerd op meten, in dit geval schattend meten op het oog. De tweede methode is een beredeneerde constructie. Stap voor stap worden de kenmerken van een vierkant gecreëerd door bekende eigenschappen van het gebruikte papier te combineren met vouwen die een verhaal vertellen: deze twee hoeken rechtsboven zijn dus gelijk, en dus is die driehoek rechtsonder er een met hoeken van 45 - 45 - 90 graden en dus enzovoort.
De eerste methode kan verbeterd worden door niet op het oog te werken, maar met linialen, micrometers, computergestuurde vouwapparatuur, spiegels, laserstralen en radar. Het blijft meten. Hier geldt: hoe nauwkeuriger, hoe beter.
Bij de tweede methode doet het er niet zo toe of de papieren figuur het vierkant tot op de millimeter waar maakt. De figuur vertelt over een constructie in de geest. Het is daarom *meetkunde* en hier geldt: hoe duidelijker constructieplan en redenering, hoe beter.

Wat is een vouw?

De rechtheid van de vouw gaan we binnen dit meetkundig redeneerkader onderbouwen. We zullen eerst moeten aangeven waar we wat betreft vouwen vanuitgaan, dat is wat de vouw vatbaar maakt voor denkwerk. Hier is een basale vouwactie in beeld gebracht (fig.3).



figuur 3

Links het dubbelgevouwen vel papier. Er is te zien dat aan de binnenkant de letter *B* bij een stip staat genoteerd. Als we het gevouwen papier tegen het licht houden, zien we dat op de onderlaag een stip met een *A* staat en dat stip *B* bij het vouwen op stip *A* is gekomen.
Rechts hetzelfde papier, opengeslagen. Er is ook nog een stip *V* gezet op de vouw. Essentieel voor zo'n stip *V* op de vouw is nu:

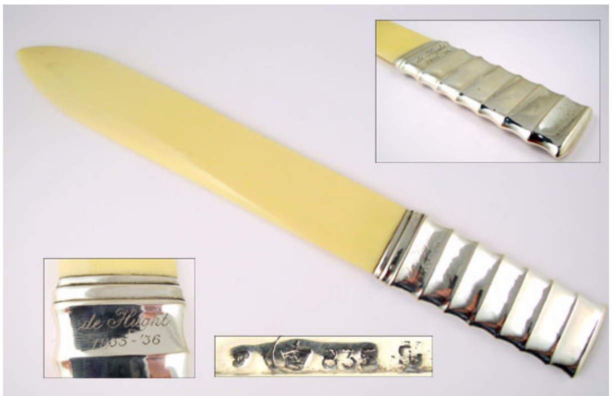
> *de afstand van A tot V is dezelfde als de afstand van B tot V.*

De verbindende lijntjes lagen immers in de dichtgeslagen toestand op elkaar.

In plaats van over 'zomaar een vouw' gaat het nu over de 'bepaalde' vouw waarbij *A* op *B* komt. Noem deze maar de *A*-op-*B*-vouw. Een punt ligt op de *A*-op-*B*-vouw als het in de openliggende toestand gelijke afstanden heeft tot *A* en tot *B*. Zo niet, dan ligt het niet op de vouw.

Mijn vouwgevoel beleeft het anders!

Met zo'n definitie draaien we ons wel hard de duimschroeven aan. Was vouwen niet eerder het rondbuigen van een vel papier en dan met de vlakke hand voorzichtig de bolling wegstrijken, tot er een kleine heuvel over is, die we met een mooi ouderwets vouwbeen (fig.4) scherp maken?



figuur 4: vouwbeen met zilveren montuur,
Duitsland rond 1936

Ja, dat gevoel verliezen we bij de vouwdefinitie wel een beetje. Maar kijk eens goed: bij het vlakstrijken realiseren we juist dat de twee delen van het papier op elkaar komen, zonder afstandsvervorming in de delen. Bij het vouwen van een stukje dun plastic folie, vershoudfolie bijvoorbeeld, lukt dat niet. De in de boven- en onderlaag geldende afstandsgelijkheden van de papiervouw zijn toch wel de essentie van de vouw als vorm.
Hoe de vouw tijdens het vouwen ontstaat en welke subtiele eigenschappen van het papier, die het vershoudfolie niet heeft, daaraan bijdragen, is een andere zaak.

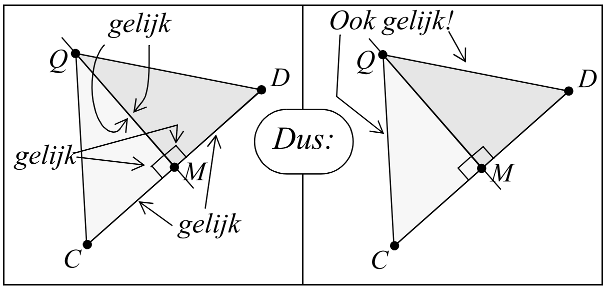
Papieren vouw, wiskundige vouw

Door de *A*-op-*B*-vouw beschrijving is de vouw voldoende precies gemathematiseerd om zijn certificaat van rechtheid te verkrijgen. Maar het is de papieren vouw niet meer, het is de 'mentale' vouw waar we een afspraak over gemaakt hebben; de afspraak beschrijft het enige kenmerk dat we mogen gebruiken.
Om het verschil tussen de papieren vouw en deze gemathematiseerde vouw duidelijk te houden, gebruiken we geen foto's meer van vouwwerk, maar tekeningen. We gebruiken 'punt' in plaats van 'stip'. Euclides (300 voor Christus) definieerde 'punt' als datgene dat ondeelbaar is. Dat is een definitie met een negatieve lading; hij zegt vooral wat een punt niet is, een punt is zeker geen inkt-

plakje dat je kunt zien en verdelen. In de tekening gebruiken we letters om punten aan te duiden; dat zijn niet meer dan verwijzingen, handig om de beschrijvingen kort te houden.
De precisie en compactheid van de wiskundige betoogtrant dwingt ons nu verder tot een lager leestempo. Er is geen redundantie, elk detail telt en moet vóór op de tong geproefd worden. Diagonaal lezen van een wiskundige tekst is het zoeken van vergeet-me-nietjes vanuit een Boeing 747.
Zet u schrap.

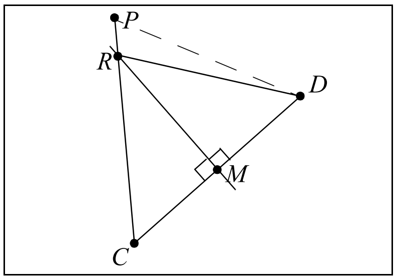
De *A*-op-*B*-vouw is een rechte lijn. Bewijs!

In figuur 5 zien we links punten *C* en *D*, hun verbindingslijn, en de lijn die de verbindingslijn in het midden (bij *M*) loodrecht snijdt. Midden en lood, de *middelloodlijn* van *C* en *D*. Pas op: we weten helemaal nog niet dat die iets met vouwen te maken heeft. We houden ons strikt en alleen aan 'middel en lood'. Er is een punt *Q* op die lijn gemarkeerd.



figuur 5

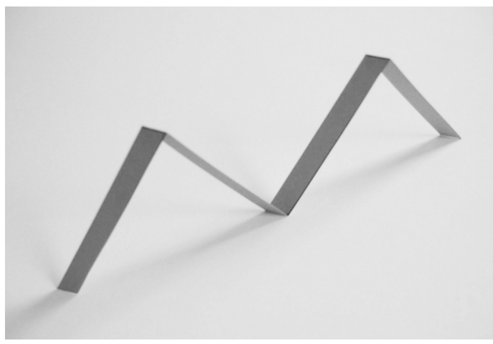
Bekijk de details.
De twee grijze driehoekjes hebben allerlei kenmerken gemeen. De hoeken bij *M* zijn gelijk, ze zijn allebei recht. *CM* is even lang als *MD,* want *M* is het midden van *CD*, en zijde *QM* van het ene driehoekje is even lang als de zijde *QM* van het andere driehoekje.
In de rechterhelft zien we de figuur nogmaals, maar daar is de conclusie aangegeven: wegens de drie gelijke kenmerken zijn die driehoekjes in alle opzichten (andere hoeken en zijden) gelijk en is dus *QC* even lang als *QD*.
Dat betekent, en nu pas gebruiken we onze karakterisering van 'vouwen', dat *Q* tot de *C*-op-*D*-vouw behoort. Dat geldt voor alle punten van de middelloodlijn; ofwel: de hele middelloodlijn hoort tot de *C*-op-*D*-vouw.
Bewijs klaar? Nee!
Want wat als een punt *P niet* op de middelloodlijn ligt? Dan gaat de redenering voor *P* niet meer op en weten we nog niets, dus ook niet dat *P niet* op de vouw ligt. We hebben een extra redenering nodig om dat aan te tonen (fig.6).
Veronderstel dat *P* aan de *D*-kant van de middelloodlijn ligt. Let op punt *R*: dat ligt wél op de middelloodlijn en dus op de *C*-op-*D*-vouw, volgens wat we al bewezen hebben. Maar *PD* is nu korter dan *PR* en *RD* samen, en dat laatste is gelijk aan *PC*. Dan ligt *P* dus dichterbij *D* dan bij *C* en dus *niet* op de *C*-op-*D*-vouw. Voor een punt *P* aan de *C*-kant geldt hetzelfde.
Samengevat: de *C*-op-*D*-vouw is precies de middelloodlijn van *C* en *D*. En is dus een rechte lijn.



figuur 6

Het duin onder de loep

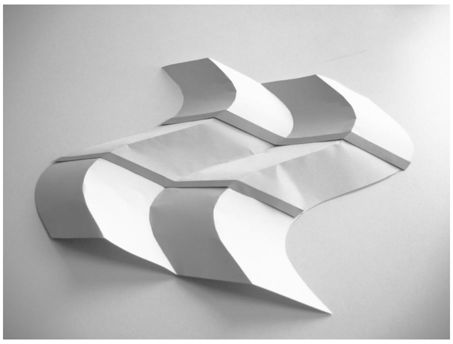
Vouwen zijn recht, maar in onze redenering maakten we gebruik van het volkomen dubbelgeklapt zijn van het papier.
Hoe zit dat dan bij het gevouwen duin?
Pak het vast en voel. Het is vervormbaar van helemaal vlak naar de duinvorm van de foto. Misschien kunnen we het zelfs een stukje steiler maken, maar we kunnen het niet helemaal plat vouwen, dat lukt niet. Zonder extra vouwen te maken wordt het nooit plat. De duinvouw is geen vouw in de zin van de *A*-op-*B*-vouw.
Tevreden stemt dat nog niet. Want we zijn weliswaar niet in strijd met het voorgaande bezig, maar dat het duin echt zonder scheuren en plakken gemaakt kan worden, dat is nog niet begrijpelijk gemaakt.
Het nu volgende is veel intuïtiever dan het harde bewijs van de rechtheid van de *A*-op-*B*-vouw. Exactere onderbouwing is mogelijk, ook hier, maar dat neemt veel ruimte en tijd. Rechts is een dunne strip van de duinbouwplaat getekend. Het dunne reepje laat zich makkelijk in een *M*-vorm brengen door de korte *schuine* lijntjes als vouwlijntjes te gebruiken (fig.7). Die *M* kan met zijn korte schuine kantjes gewoon op tafel staan.



figuur 7

Die *M* is onderdeel van het duinlandschap, hij vormt dan juist een smalle verticale plak van het duinlandschapje. De plak loopt in de richting van de rechte zijkanten.
Nemen we uit de bouwplaat het strookje ernaast, dan ma-

ken de kleine lijntjes misschien een iets kleinere of grotere hoek met de lange kanten, maar er kan een *M* van gemaakt worden die tegen de eerste past. De naast elkaar horende *M*'s sluiten prachtig op elkaar aan. Het duin is de vloeiende vorm van heel veel van die heel dunne *M*'s naast elkaar. Het geheel van de bouwplaat of het in elkaar gebogen en/of gevouwen landschap is juist een serie van zulke strookjes of *M*-vormen naast elkaar. Het in de Praktijktip genoemde parallel verplaatsen van een driehoekje dat in de duinvallei in de richting van de rechte zijkanten past, sluit hier mooi op aan. Kijk maar, of beter: probeer dat zelf uit. De makkelijkste manier zulke *M*'s te maken is nogmaals de bouwplaat van de 'Praktijktip'-pagina kopiëren en die in de richting van de rechte zijden in strookjes knippen. Hier het duin met twee *M*-stroken in positie (fig.8).



figuur 8

Uitgezocht kan ook worden hoe hoog de *M* wordt die met zo'n strookje gemaakt kan worden; in de duinbouwplaat geldt de eis dat de schuine stukjes van de strook op de tafel komen. Probeer het, u vindt een restrictie op de hoogte die bereikt kan worden. Het hangt van de plek waar af we de strook uit de bouwplaat halen. Hoe? Zet dit diepteonderzoek maar voort met één parallellogramvormig stukje van de strook!
Zo werd - althans voor mij - de mysterieuze duinvorm wat begrijpelijker. Maar daardoor niet minder fraai.

Terugblik: 2300, 350 en 0 jaar geleden

De redenering rond de middelloodlijn sluit met zijn statische en streng-logische karakter aan bij de meetkunde zoals de oude Grieken die bedreven. De benadering van de duinvorm met een serie parallelle stroken, waarbij we eigenlijk moeten denken aan héél dunne en héél veel stroken, zou van Archimedes kunnen stammen; het hoogtepunt van deze intuïtieve omgang met het oneindig kleine vinden we in de zeventiende-eeuwse wiskunde. De integraalrekening *avant la lettre*; Galilëi, Cavalieri, Fermat, Pascal, Roberval zijn enkele van de grote meesters die in deze bijzondere stijl het wiskundig spel beoefenden.
Een modern punt van kritiek op mijn dik aangezette onderscheid tussen metend en meetkundig vouwen van het vierkant zou het volgende kunnen zijn.

Ook bij het metend vouwen maakt de vouwer onontkoombaar gebruik van (wiskundige) concepten als 'vierkant'. De meet-schattende vouwbenadering is dus ook een wiskundig gestuurde actie. Waarom dan zo expliciet een verschil maken met de zogenaamde meetkundige methode als beide methodes wat betreft graad van formalisering het niveau van materieel handelen niet overstijgen? Daar zit wat in, ook de vouwer met timmermansoog handelt op grond van een concept dat wiskundig van aard is. Ik legde echter meer het accent op het verschil in methode; het aanwezig zijn van een beredeneerde constructie, die gebaseerd is op vooraf bepaalde eigenschappen van de figuren, is voor mij meer een hoofdkenmerk van wiskundig handelen dan een eventueel hogere graad van abstractie waarmee de handeling wordt vormgegeven.

Slotopgave en bronnen

De slotopgave kan aangepakt worden met de gebogen vouw par excellence: de cirkelvouw.

Maak van een cirkelvormig stuk papier een rondlopende gracht tussen twee rondlopende dijken.

Tot slot nog enkele bronnen op het gebied van vouwen en meetkunde leren, ook al komt het mooie vouwen langs gebogen lijnen er meestel bekaaid van af.

Sundara Row, T. *Geometric Exercises in Paper Folding.* Klassieker uit 1906; in 1966 als Dover-pocket opnieuw gepubliceerd. Compleet leerboek meetkunde aan de hand van papier vouwen. Ook ellipsen en parabolen!

Abels, M. & M. Meeder (1991). *Vouwwerk.* Bijlage bij de Nieuwe Wiskrant van september 1991. Ook hier wordt vanuit concrete vouwervaringen gewerkt naar vragen als: 'Waarom?' 'Hoe kun je dat verklaren?' Niveau brugklas.

Serra, M. (december 1999). *Patty Paper Geometry.* Key Curriculum Press. Onderzoeksopgaven en meer geleide lescycli voor Grades 6–10.

Goddijn, A. *Alles van 80-grams A4.* Hand-out bij een werkgroep op de 22ste Panama Conferentie, januari 2004. Gevarieerde serie opgaven waarbij A4-papier uitgangspunt is. Zie: http://www.fi.uu.nl/~aad

Origami Mathematics. *http://www.merrimack.edu/~thull/OrigamiMath.html* De site is een goede ingang voor het vele dat er op het gebied van origami en meetkunde op het web te vinden is.

Lang, R.J. (2003). O*rigami Design Secrets: Mathematical Methods for an Ancient Art.* A K Peters, Ltd. De absolute Origami-top! Gaat veel verder dan het traditionele vogeltje met bewegende vleugels. Lang beschrijft hoe complexe nieuwe ontwerpen tot stand komen, geeft schitterende voorbeelden, heeft een vloeiende heldere stijl. Heldere illustraties. Een interessant wiskundige theorie over optimaliseren van origami-vormen besluit het boek, maar het vouwen kan zonder die theorie.

Huffman, D. (1966). *Geometric Paper Folding.* http://www.sgi.com/grafica/huffman/ Mathematical Art. Veel mooie gebogen vouwen!

Zoeksleutel Google: *paper folding geometry.*

PANAMA-POST

Panama Praktijktip nummer 95

Vouw een papieren duinlandschap

De grote tekening op deze bladzijde is een bouwplaat voor een duinlandschap.
Op de foto onderaan zie je hoe het wordt. Zo maak je het duin:

- Kopieer deze bladzijde en knip de figuur uit. Je kunt ook alles overtrekken.
- De middelste drie golflijnen moet je *rillen* voor je gaat vouwen. Leg daarvoor de bouwplaat op een krant (ongeveer tien laagjes dik) en teken met een punt van een ballpoint lekker stevig de lijnen over. Je volgt de golf het best door je pols aan de binnenkant van de bocht te houden. In het papier komt een groef die makkelijk vouwt.
- Maak van de midden-golflijn een *dal*-vouw, de andere twee worden *berg*-vouwen. Vouw de drie lijnen eerst voorzichtig een klein beetje en vouw dan geleidelijk alles samen verder om het duin steiler te maken. Kraak het papier niet!
- Golflijnen 1, 3 en 5 komen op tafel, golflijnen 2 en 4 vormen de top. Klaar.

Leg het duin naast je op tafel. Mensen die langslopen gaan vanzelf over het papieren duin praten, want het is een mooi ding.

- Je kunt het duin van plat naar steil vervormen.
  Het geheel wordt dan *korter*. Waarom is dat zo?
  Het wordt ook *smaller*! En waarom is dát zo?
- Er is een grens aan de steilheid. Welke delen van het duin veroorzaken die beperking?
- Bekijk nog eens de ongevouwen bouwplaat. Lopen de golflijnen op vaste afstand van elkaar? In het midden lijkt de afstand kleiner. Toch hebben die vijf golflijnen precies dezelfde vorm. Hoe kan dat? Hoe zit het na het vouwen?
- Het dal tussen de ruggen van het duin kun je aan de zijkant sluiten met een driehoekige dam. Knip van een restje papier zo'n driehoekje op maat en probeer of dit driehoekje overal in het dal past. Houd voor het driehoekje steeds dezelfde richting aan van de zijkant.
- Stel je voor: een spin kruipt van het begin van de ene duintop naar het eind van de andere. Omhoog of omlaag maakt voor de spin niet uit. Afstand wel. Teken de kortste route als de bouwplaat plat op tafel ligt.
- Dit vraagt iedereen zich af:

  Hoe komt het dat je inderdaad gebogen vouwen kunt maken zonder spanning in het papier?

  Bedenk daar maar eens wat op en praat erover.