PANAMA-POST

Redeneren als basis voor begripsontwikkeling

A. Bakker[1]
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Dit artikel gaat over de leerprocessen die ten grondslag liggen aan de ontwikkeling van wiskundige begrippen. Het centrale thema is diagrammatisch redeneren, dat volgens Peirce bestaat uit een diagram maken, ermee experimenteren en reflecteren op de resultaten.
In het artkel wordt een voorbeeld gegeven uit experimenten in het statistiekonderwijs, waarin leerlingen diagrammen tekenen, erover discussiëren, eigenschappen beschrijven en reflecteren op hun voorspellingen. Daarin maken leerlingen een abstractieovergang van het beschrijven van een diagram ('de stipjes zijn verspreid') naar het beschrijven van een wiskundig object ('de spreiding is groot').
Op basis van mijn promotieonderzoek onderstreep ik hier het belang van het maken van representaties van probleemsituaties, experimenteren en reflecteren in groepsverband - niet alleen voor statistiekonderwijs.

1 Introductie

De grote moeilijkheid van rekenen-wiskunde leren is dat wiskundige representaties naar onzichtbare objecten en relaties verwijzen. Toch kunnen we alleen communiceren over die abstracte wiskundige objecten en relaties door middel van representaties. Deze paradox vraagt om opheldering.
Een uitweg uit de paradox is om leerlingen een goede ervaringsbasis te geven door het laten oplossen van geschikte problemen, zodat ze hoe langer hoe meer betekenis aan makkelijk te begrijpen representaties (symbolen, diagrammen, enzovoort) kunnen hechten. Tijdens de redeneeractiviteit met dergelijke tekens kan de behoefte aan geavanceerdere representaties ontstaan. Door een stapsgewijs proces van betekenis- en tekenontwikkeling kunnen leerlingen abstracte begrippen leren die gerepresenteerd worden door geavanceerde wiskundige representaties (Gravemeijer, 1998).

2 Voorbeelden van begripsontwikkeling

Een van de eerste wiskundige objecten die kinderen leren zijn getallen. In het begin is de activiteit van het tellen, de telrij opzeggen en koppelen aan concrete objecten daarbij uiterst belangrijk (Menne, 2001). Maar kunnen tellen wil nog niet zeggen dat een kind een begrip van 'aantal' heeft. Het volgende verschijnsel komt veel voor bij drie- of vierjarigen. Ik vroeg een vierjarige met hoeveel we aan tafel zaten.

V: Een, twee, drie, vier, vijf, zes!
A: Dus met hoeveel zijn we? (Om de literatuur hierover te testen wilde ik weten of ze 'zes' zou zeggen of opnieuw zou gaan tellen.)
V: Een, twee, drie, vier, vijf, zes!

Kortom, de vraag 'hoeveel' riep wel een telactiviteit op, maar 'zes' leek nog niet op het aantal mensen aan tafel te slaan. Het was nog geen eigenschap van de verzameling van mensen aan tafel. Na het tellen van concrete objecten en personen leren kinderen op de vingers te tellen en de conventionele representatie '6' te gebruiken. Maar aan deze abstractiestap gaan dus jaren met allerlei activiteiten vooraf.

Een tweede voorbeeld van begripsontwikkeling in relatie tot representaties is het leren over de driehoek als wiskundig begrip. Natuurlijk weet een kind al vrij snel een getekende driehoek (als plaatje) te benoemen, maar de abstractiestap naar de wiskundige geïdealiseerde driehoek (de figuur of het diagram) waarmee wij, wiskundigen, in meetkundige bewijzen redeneren, maakt het pas vele jaren later (Van Hiele, 1986). Deze geïdealiseerde figuur heeft allerlei eigenschappen die de tekening niet heeft, bijvoorbeeld dat de som van de hoeken 180 graden is en lijnen geen breedte hebben. Voor veel leerlingen is het verwarrend dat ze bij een redenering over driehoeken niet de getekende driehoek mogen gebruiken, maar alleen de abstracte eigenschappen van het wiskundige begrip 'driehoek'. Ze moeten dus de juiste eigenschappen leren toekennen aan het begrip en het plaatje van een driehoek leren interpreteren als een representatie van een geïdealiseerde, algemene driehoek.

In dit artikel wil ik ingaan op een voorbeeld uit de statistiek: het leren dat onder andere 'spreiding in een puntendiagram' een algemeen begrip is, een wiskundig object met allerlei eigenschappen. Ik wil ontrafelen wat de essentiële processen zijn bij de vorming van wiskundige begrippen in relatie tot de representaties waarmee we erover communiceren. Deze leerprocessen zijn niet tot de statistiek beperkt: ze gelden net zo goed voor de vorming van het begrip '6' of 'driehoek' als voor het begrip 'spreiding'. De bedoeling is dat we hiervan kunnen leren welke leerprocessen meer aandacht verdienen in het onderwijs - of dat nu op de basisschool, in het voortgezet onderwijs of op de werkvloer is. Ik begin met enkele definities, geef een voorbeeld uit mijn proefschrift[2] (Bakker, 2004) en destilleer uit het voorbeeld en de theorie enkele algemene conclusies.

Om het proces van begripsontwikkeling in relatie tot representaties te analyseren, heb ik gebruikgemaakt van semiotiek - de wetenschap van tekens en betekenis. Ik baseer me op de ideeën van een van de grondleggers ervan, de Amerikaanse logicus en filosoof Peirce (1839-1914). Zijn naam wordt uitgesproken als het Engelse *purse*. Eerst introduceer ik enkele begrippen die we in het vervolg van dit artikel nodig hebben: 'object en teken', 'diagram en diagrammatisch redeneren', 'predikatie en abstractie'.

3 Definities

Object en teken

Om over onzichtbare begrippen zoals wiskundige objecten te spreken, definieerde Peirce een 'object' als alles waarover we spreken of denken. Daarvoor hebben we 'tekens' (representaties) nodig: woorden, figuren, symbolen, diagrammen enzovoort, maar ook concrete objecten kunnen als tekens functioneren, zoals bijvoorbeeld een roos als symbool voor liefde.
Volgens Peirce verloopt al ons denken met behulp van tekens. Een teken staat in de ogen van degene die het interpreteert voor een object, maar ieder object kan door allerlei verschillende tekens gerepresenteerd worden en ieder teken kan voor allerlei objecten staan. Waar een teken ons aan doet denken hangt van allerlei factoren af, evenals wat we doen of voelen als reactie op het teken. De interpretatie van en reactie op een teken is onder meer sterk afhankelijk van de situatie en onze kennis.

Diagram en diagrammatisch redeneren

Peirce onderscheidt verschillende typen tekens, afhankelijk van hun functie. Een 'diagram' is bijvoorbeeld een teken met als belangrijkste functie relaties te representeren tussen objecten. Diagrammen zijn uiterst belangrijk in de wiskunde, als de wetenschap van structuren en patronen. 'Diagrammatisch redeneren' bestaat uit drie stappen, die niet noodzakelijkerwijs apart of in een bepaalde volgorde hoeven op te treden:

1 Een diagram maken.
2 Ermee experimenteren.
3 Reflecteren op de observaties.

Ad 1: We hebben een representatie (teken) nodig om onze gedachten en beschikbare gegevens te ordenen. Door een diagram te tekenen proberen we iets zichtbaar te maken wat eerst onzichtbaar was, bijvoorbeeld bepaalde relaties tussen elementen in een verzameling, hoeken van een driehoek of statistische gegevens.

Ad 2: Door met het diagram of met diagrammen te experimenteren stuiten we mogelijkerwijs op relaties die we nog niet eerder gezien hadden. Peirce benadrukt dat het niet genoeg is om in algemene termen te denken.

> Het is noodzakelijk dat er iets GEDAAN wordt. In de meetkunde worden hulplijnen getekend en in de algebra worden transformaties toegepast. (Peirce, CP 4.233: vertaling uit het Engels; hoofdletters in het origineel.)

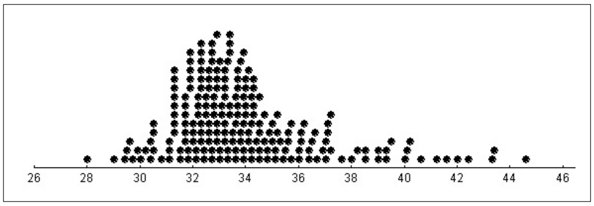
Overigens hoeft dit experimenteren niet per se op papier of op een computerscherm te gebeuren: we kunnen ons ook diagrammen voorstellen en er mentaal mee experimenteren.

Ad 3: Tijdens de eerste twee stappen doen we observaties waarop we reflecteren. Deze stap is cruciaal in de begripsontwikkeling, omdat hier eigenschappen van wiskundige objecten worden geformuleerd en mogelijk zelfs nieuwe objecten worden gevormd. Het gaat vooral om predikatie en abstractie.

Predikatie en abstractie

Over een object kan van alles gezegd of gedacht worden, bijvoorbeeld: het hondje is schattig. Het hondje is dan het object en 'schattig' is een predikaat. Het toekennen van een predikaat aan een object - dus het beschrijven van het object - heet 'predikatie'. Als leerlingen over de grafiek in figuur 1 zeggen dat de stipjes verspreid zijn, dan zijn de stipjes de objecten en 'verspreid' het predikaat.
Nu kan het predikaat zo interessant en belangrijk zijn, dat we het nader willen onderzoeken. Een van de belangrijkste stappen in de wiskunde om tot nieuwe objecten te komen is het verzelfstandigen van een interessante eigenschap. Het predikaat 'verspreid' wordt verzelfstandigd

tot een object dat zelf weer eigenschappen kan hebben. Bijvoorbeeld: de spreiding is groot. Hier is ‘spreiding’ een object waarover gezegd kan worden dat het groot is.



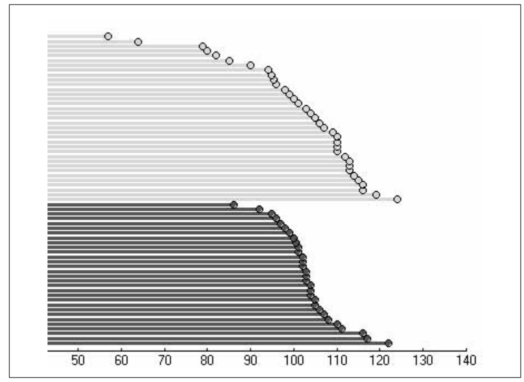
figuur 1: een stippendiagram waarin leerlingen de stipjes ‘verspreid’ noemen (een grafiek uit minitool 2 over de spijkerbroekmaten van 200 mannen)

Spreiding is een begrip geworden dat beschreven en zelfs gemeten kan worden. De beschreven stap van een nieuwe abstractie noemt Peirce ‘hypostatische abstractie’. Het Griekse *hypostasis* correspondeert met het Latijnse woord *substantie*, datgene wat ten grondslag ligt aan eigenschappen. In het voorbeeld van het hondje is het hondje de substantie (het object) waarvan gezegd kan worden dat het schattig is, en in het spreidingsvoorbeeld is spreiding de substantie (het object) waarvan gezegd kan worden dat het groot is.
Volgens Peirce is hypostatische abstractie een essentieel deel van vrijwel elke belangrijke stap in de wiskunde (NEM IV, pag.160). Ook verzamelingen, getallen en meetkundige figuren zijn voorbeelden van hypostatische abstracties (het gaat dus niet alleen om de overgang van een bijvoeglijk naar een zelfstandig naamwoord). De vraag die in een onderwijscontext rijst, is hoe leerlingen de geschiedenis zo kunnen herhalen, dat ze de juiste wiskundige objecten vormen. Freudenthal (1991) spreekt hier van ‘geleid heruitvinden’ en Peirce meent dat diagrammatisch redeneren een van de mogelijkheden is om tot nieuwe inzichten te komen. De volgende paragraaf geeft een voorbeeld van hoe de drie stappen van diagrammatisch redeneren en de leerprocessen die daarmee gepaard gaan een mogelijke invulling geven aan geleid heruitvinden.

4 Diagrammatisch redeneren over groeiende steekproeven

Het voorbeeld in deze paragraaf gaat over dertienjarige tweedeklassers die statistiek leren, maar ik beloof de lezer dat de leerprocessen die een rol spelen ook van algemener belang zijn. Het doel van de beschreven onderwijsactiviteit was om leerlingen te stimuleren over steekproefgrootte en verdelingen na te denken. Verder was het de bedoeling dat tijdens het onderwijsexperiment leerlingen begrippen als gemiddelde en spreiding als eigenschappen van dataverzamelingen en verdelingen gingen zien.

Het betrof een HAVO-VWO-klas van dertig leerlingen in de binnenstad van Utrecht. De leerlingen hadden in twee lessen twee zogenaamde minitools gebruikt. Dit zijn eenvoudige computerprogramma’s of applets, waarvan de eerste elke meetwaarde als horizontale staaf weergeeft en de tweede elke meetwaarde als een stip op de juiste plek op de as (fig. 2 & 1). Ze konden verder hun gemiddelde cijfer uitrekenen, maar hadden verder nauwelijks enige statistische voorkennis.



figuur 2: een grafiek uit minitool 1, waarin iedere waarde door een staaf gerepresenteerd wordt waarvan de lengte evenredig is met de waarde

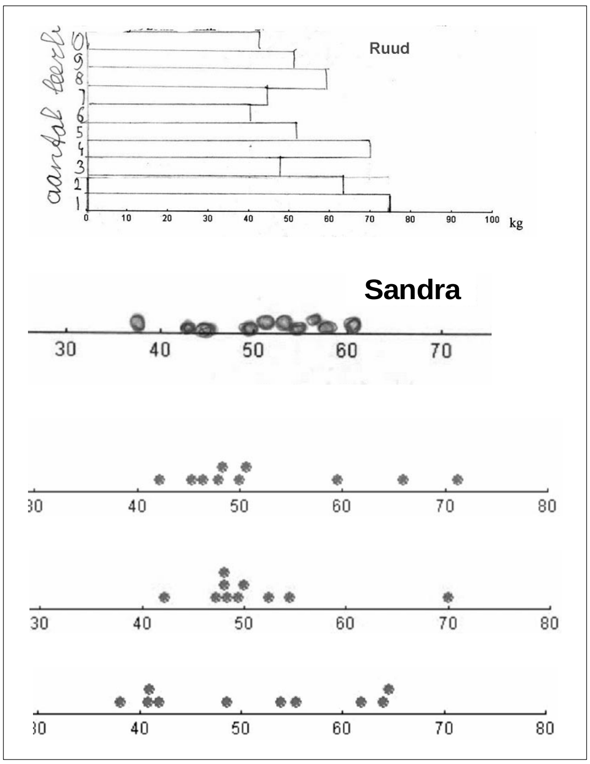
In de drie voorgaande lessen hadden de docente en ik gemerkt dat leerlingen bij een steekproef aan heel kleine aantallen dachten, bijvoorbeeld tien gegevens. We wilden laten zien dat dit wat weinig is en bovendien hoopten we dat ze een intuïtief begrip van verdeling tentoon zouden spreiden als we naar een bekende context, zouden vragen. In ons plan zou de vorm van de gewichtsverdeling van tweedeklassers een onderwerp van gesprek worden oftewel, in Peirces termen, een object. Ik vat deze vierde les in drie cycli samen.

Cyclus 1

Uitgaande van de ideeën die de leerlingen hadden over steekproeven, vroegen we ze om een voorspelling te doen hoe een dataverzameling van het gewicht van tien tweedeklassers eruit zou kunnen zien. Zij maakten allemaal een diagram dat ze vervolgens vergeleken met drie echte verzamelingen van tien gegevens (fig. 3).
Tijdens een korte discussie in de klas probeerden we predikatie van essentiële eigenschappen uit te lokken met vragen als: ‘Je zegt dat de stipjes hier meer als een kluitje bij elkaar staan; zijn er nog andere verschillen? Wie is het met Rik eens? Wat bedoel je met ...?’ Verder valt in de analyse op dat de docent vaak opmerkingen maakte om de discussie in goede banen te leiden: ‘Vingers, één tegelijk! Tom, jij wilde iets zeggen?’ Om iedereen in het predikatieproces te betrekken en de discussies niet te lang te maken, lieten we de leerlingen steeds individueel hun observaties opschrijven.
Hier zijn twee voorbeelden van wat ze over hun grafieken opschreven:

Ruud: Mijn grafiek ziet eruit zoals die op het bord.
Sandra: De andere (echte data) zijn meer gewichten bij elkaar en mijne zijn verder uit elkaar.

Wat opvalt aan de beschrijvingen van leerlingen is dat ze nogal vaag zijn, maar Sandra gebruikt predikaten die statistisch relevant zijn: bij en uit elkaar. Die bereiden namelijk voor op een begrip van spreiding. De variatie tussen de drie verschillende kleine steekproeven is voor een statistisch geoefend oog een teken dat de steekproeven te klein zijn: belangrijke eigenschappen als gemiddelde en spreiding variëren te veel om een betrouwbaar beeld te geven van de populatie, maar voor de leerlingen was dit nog te abstract.



figuur 3: voorbeelden van twee voorspellingen en echte gegevens (drie steekproeven). Ruuds minitool lijkt op die van figuur 2; Sandra's op die van figuur 1

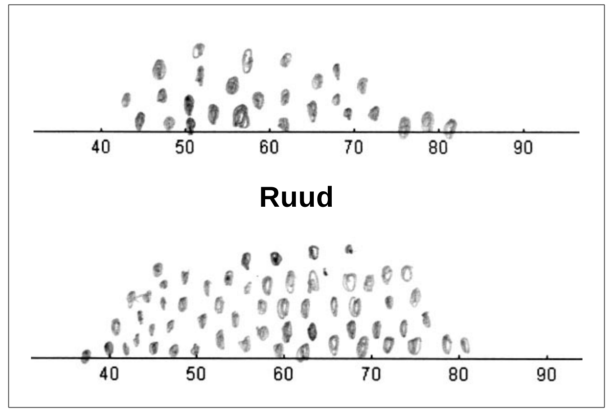
Wel waren ze het erover eens dat grotere steekproeven betrouwbaarder zijn, dus een beter beeld geven van de populatie.

Cyclus 2

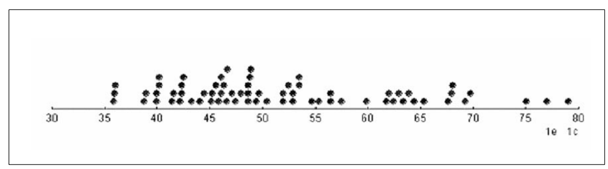
De leerlingen vonden het beter een hele klas te wegen dan tien leerlingen. We vroegen ze daarom een schets te maken van een dataverzameling met gegevens van één klas en van drie klassen (fig. 4) en die vervolgens te vergelijken met grafieken van echte data. Hoewel ze tot nu toe alleen woorden als 'bij elkaar' en 'verspreid' hadden gebruikt, beschreven ze hun nieuwe grafieken bijvoorbeeld als volgt (we volgen nog even dezelfde twee leerlingen).

Ruud: Spreiding is anders.
Sandra: Met de 27 [leerlingen, één klas] zijn er uitschieters en er is spreiding. Met de 67 [drie klassen] zijn ze dichter bij elkaar en meer rond het gemiddelde.

Relevant voor de begripsontwikkeling is dat leerlingen voor het eerst het woord 'spreiding' gebruiken om verschillen tussen hun eigen diagrammen en de echte data te beschrijven. Ook 'uitschieters' en 'gemiddelde' worden hier als informele eigenschappen van de dataverzamelingen genoemd.



figuur 4: Ruuds voorspelling van één en drie klassen



figuur 5: echte data in minitool 2 van drie klassen

Het verzoek om steeds een voorspelling te doen was bedoeld om mentaal experimenteren uit te lokken: uitgaande van wat leerlingen weten over gewicht in termen van gemiddelde, spreiding of verdeling, worden ze gestimuleerd na te denken hoe dergelijke eigenschappen er in een diagram uit kunnen zien. Door predikatie te stimuleren werd ook abstractie mogelijk gemaakt: in plaats van te zeggen dat de stipjes verspreid waren, werd spreiding een object van aandacht: 'de spreiding is anders'. Dit is een prototypisch voorbeeld van wat Peirce hypostatische abstractie noemt: een predikaat wordt verzelfstandigd, zodat het weer eigenschappen kan hebben.

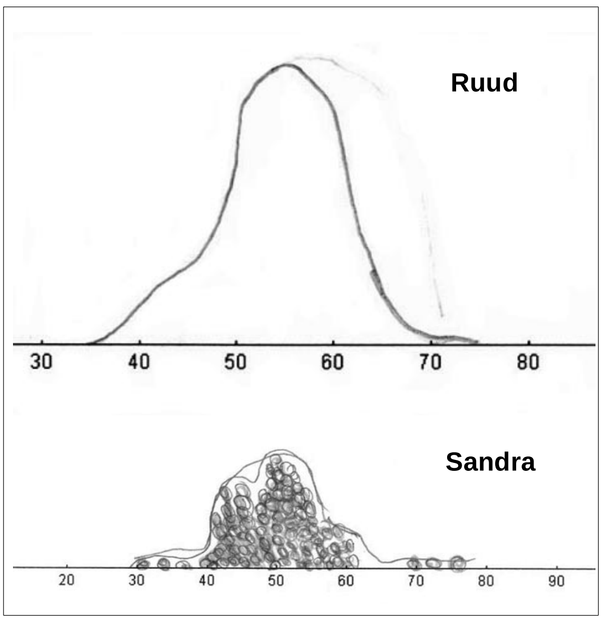
Dat wil niet zeggen dat alle leerlingen nu hetzelfde correcte begrip van spreiding hadden ontwikkeld, maar er is wel een aanzet toe gemaakt. In het redeneren met het begrip kunnen leerlingen hun begrip verfijnen en zonodig corrigeren.

Pas nu spreiding een onderwerp van aandacht is, kan het ook worden gemeten. In de onderwijspraktijk worden spreidingsmaten veelal ingevoerd voordat een informeel begrip van spreiding onderwerp van studie of gesprek is geworden. Helaas geldt dat ook voor centrummaten: het gemiddelde wordt als rekentruc aangeleerd, maar dat wil niet zeggen dat leerlingen begrijpen dat een gemiddelde als een maat van het centrum van een dataverzameling of verdeling gebruikt wordt om bijvoorbeeld twee verdelingen met elkaar te kunnen vergelijken.

Cyclus 3

Vervolgens maakten we de stap naar nog grotere steekproeven: de hele populatie van tweedeklassers in Utrecht. De bedoeling hiervan was dat leerlingen zouden nadenken over de vorm van de gewichtsverdeling zonder zich zorgen te maken over kansdichtheidsfuncties of andere ingewikkelde statistiek. Figuur 6 laat enkele voorbeelden zien. In hun uitleg schreven leerlingen bijvoorbeeld:

Ruud: Omdat het gemiddelde ongeveer tussen 50 en 60 kg zit.
Sandra: Omdat de meesten rond het gemiddelde zitten en er uitschieters zijn van 30 en 80.



figuur 6: Ruuds klokvorm en Sandra's combinatie van stippen en een continue schets

De vormen die genoemd werden waren: piramide (drie leerlingen), halve cirkel (één leerling), klokvorm (vier leerlingen). Maar liefst 23 van de 28 aanwezige leerlingen tekenden een klokvorm, hoewel die in het onderwijs nog niet aan bod was geweest. De normale verdeling was hiermee nog niet heruitgevonden, maar leerlingen waren wel op weg: de meesten hadden door dat er veel data rond het gemiddelde lagen en er weinig heel lage of hoge waarden voorkomen. Ook begrepen ze hoe deze eigenschappen in de vorm van een grafiek gerepresenteerd werden. Laten we ons als gedachte-experiment eens voorstellen wat een klokvorm betekend had voor deze leerlingen als ze niet deelgenomen hadden aan een onderwijsactiviteit zoals beschreven in deze paragraaf. Vermoedelijk was de vorm een representatie van een heuvel of klok geweest. Misschien hadden enkele leerlingen begrepen dat de hoogte iets met frequentie te maken heeft, maar ze hadden waarschijnlijk nog geen taal gehad om de eigenschappen van deze verdeling te beschrijven.

5 Leerprocessen

Terugkijkend op het voorbeeld en de theorie rond diagrammatisch redeneren blijken de volgende processen een belangrijke rol te spelen. Deze analyse is overigens ook gebaseerd op de andere lessen in vier brugklassen en deze tweede klas.

Diagrammen maken

Een van de principes van realistisch reken-wiskundeonderwijs is dat leerlingen zelf dienen te modelleren, symboliseren en diagrammatiseren - kortom, tekens van relevante aspecten van probleemsituaties maken. We nemen aan dat de tekens die leerlingen zelf kiezen betekenisvol voor ze zijn. Zoals het voorbeeld illustreert, zijn de diagrammen die leerlingen gebruiken beïnvloed door hun voorgeschiedenis. In dit geval maakten leerlingen alleen diagrammen die leken op de minitools waarmee ze twee lessen hadden gewerkt. Die zijn echter zo ontworpen, dat ze voor leerlingen van tien tot veertien jaar makkelijk te gebruiken zijn (Cobb, McClain & Gravemeijer, 2003).
We zouden kunnen proberen leerlingen iets vaker zelf de gelegenheid te bieden hun ideeën vorm te geven met hun eigen representaties, mede om het betekenisvolle denken te stimuleren. Uiteraard is er wel een geschikte probleemsituatie nodig die als het ware vraagt om de wiskundige begrippen die ontwikkeld dienen te worden.

Experimenteren

Experimenteren kan op papier, maar ook leerlingvriendelijke software is uitermate geschikt om allerlei situaties en relaties te exploreren, zeker in de statistiek waarin het tekenen van grafieken met grote hoeveelheden gegevens zoveel werk vergt. Software heeft echter ook zijn beperkingen: de mogelijke transformaties en representaties liggen van tevoren vast en zijn lang niet altijd makkelijk om te leren (Drijvers, 2003). In de beschreven les waren de representaties van de leerlingen verder beperkt tot die ze in de software hadden gezien. Tijdens het onderzoek hebben we ook gemerkt dat mentaal experimenteren vruchten kan afwerpen. Steeds meer zijn de docent en ik ertoe overgegaan 'wat-als'-vragen te stellen: hoe zou de grafiek eruitzien als …? Leerlingen werden daardoor uitgedaagd om zich hypothetische situaties voor te stellen of die te schetsen, zonder daarbij door eventuele beperkingen van de software gehinderd te worden. Het voor-deel daarvan is dat ze zich niet zo druk hoeven te maken over waar precies die ene waarde komt, maar uitgaande van algemene conceptuele eigenschappen een globaal beeld moeten geven. Overigens moesten leerlingen wel gewend raken aan ‘wat-als’-vragen: een cultuur waarbinnen dit een begrijpelijke en productieve vraag is, ontstaat niet binnen een paar lessen.

Reflecteren

Hoewel we ons best hebben gedaan om in de schriftelijke vragen zoveel mogelijk reflectie op te roepen, bleken de klassendiscussies toch steeds de beste redeneringen uit te lokken. Dit geeft te denken over de sterke tendens om leerlingen zelfstandig te laten werken. Natuurlijk is er niets mis met zelfstandig leren, maar de invulling ervan leidt er vaak toe dat leerlingen een groot aantal sommetjes afwerken en daarin niet voldoende diepgang bereiken. Als er een antwoord staat, is het in de ogen van leerlingen vaak oké (Van den Boer, 2003). Tijdens groeps- of klassendiscussies kan de docent doorvragen en processen als predikatie en hypostatische abstractie beter bewerkstelligen. Daarmee wil ik niet zeggen dat het makkelijk is: het vergde in mijn onderzoek enkele lessen voordat leerlingen geneigd waren serieus deel te nemen aan discussies. Ze waren onder het mom van zelfstandig werken gewend om aan de hand meegenomen te worden langs een serie minuscule deelvragen.
Peirces ideeën over diagrammatisch redeneren passen goed bij die van het realistisch reken-wiskundeonderwijs, ook voor het basisonderwijs. Het belang van diagrammatiseren en experimenteren onderstreept het ‘realistische’ idee dat leerlingen zelf moeten symboliseren en modelleren (Gravemeijer, 1998). Het belang van reflectie en interactie voor leren is al vele malen benadrukt (zie bijvoorbeeld Nelissen, 1987). Het overstijgt het realistisch reken-wiskundeonderwijs. Een van de concrete aanwijzingen die voortvloeien uit Peirces theorie is de noodzaak leerlingen zelf te laten beschrijven wat ze opvalt aan representaties, om zo tot een gezamenlijk onderwerp van gesprek te komen: een object waaraan allerlei eigenschappen worden toegekend en die een rol speelt in een redeneerproces.

Samengevat pleit ik voor aandacht voor het maken van representaties van probleemsituaties (in vrijheid, niet steeds volgens voorgeschreven procedures), experimenteren (op papier, met software en mentaal) en reflecteren in groepsverband. Deze leerprocessen vormen de kern van diagrammatisch redeneren, en vormen een goede basis voor begripsontwikkeling.

Noten

1 A. Bakker werkt momenteel als *research officer* aan het Institute of Education, University of London, in een onderzoeksproject naar *techno-mathematical literacies in the workplace*.
2 Mijn dank gaat uit naar mijn promotoren K. Gravemeijer, G. Kanselaar en J. de Lange. Verder heb ik de samenwerking met docent en onderzoeker C. van den Boer en haar klas erg prettig gevonden, evenals met C. de Zwart, S. Goemans en Y.-W. Zhou, die geholpen hebben met interviews, video-opnamen en de analyse.

Literatuur

Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools*. Utrecht: CD-β Press (proefschrift).
Boer, C. van den (2003). *Als je begrijpt wat ik bedoel. Een zoektocht naar mogelijke verklaringen voor achterblijvende prestaties van allochtone leerlingen in het wiskundeonderwijs*. Utrecht: CD-β Press (proefschrift).
Cobb, P., K. McClain & K.P.E. Gravemeijer (2003). Learning about statistical covariation. *Cognition and Instruction, 21*, 1-78.
Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter*. Utrecht: CD-β Press (proefschrift).
Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Gravemeijer, K.P.E. (1998). Symboliseren en modelleren als wiskundige activiteit. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 16*(2/3), 11-18.
Hiele, P.M. van (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. London: Academic Press.
Menne, J. (2001). *Met sprongen vooruit*. Utrecht: CD-β Press (proefschrift).
Nelissen, J.M.C. (1987). *Kinderen leren wiskunde; Een studie over constructie en reflectie in het basisonderwijs*. Gorinchem: De Ruiter (proefschrift).
Peirce, C.S. (CP) (1931-1958). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*. Vol.1-VII. Cambridge, MA: Harvard University Press.
Peirce, C.S. (NEM) (1976). *The new elements of mathematics*. In: C. Eisele (ed.). Vol.I-IV. The Hague-Paris/Atlantic Highlands, N.J.: Mouton/Humanities Press.

This paper focuses on the learning processes that foster the development of mathematical concepts. The central theme is diagrammatic reasoning, which in Peirce’s definition consists of making a diagram, experimenting with it and reflecting on the results.
The example given in this paper highlights the importance of these processes for learners in making the transition from predication to abstraction. That is, students first described the dots in a diagram as ‘the dots are spread out’ and then made an abstraction step when writing ‘the spread is large’.
Based on my design research in statistics education, I more generally underline the importance of making diagrams of problem situations, experimenting with them and reflecting on them in group settings.