

K. Buijs
SLO, Enschede

Hoe kunnen in de bovenbouw van de basisschool leerlijnen rond breuken, kommagetallen, procenten en verhoudingen opgebouwd zijn? Dat is de centrale vraag die in dit artikel besproken wordt. Uitgangspunt daarbij vormen de ervaringen die in de huidige fase van het TAL-project worden opgedaan. Besproken wordt wat voor problemen zich bij de genoemde leerstofdomen in de huidige onderwijspraktijk zoal voordoen en in welke richting een oplossing voor deze problemen gezocht kan worden door het accent sterker op begripsvorming te leggen. Als voorbeeld van een begripsgerichte leerlijn wordt vervolgens een leerlijn rond kommagetallen geschetst zoals die in het SLO-deel van het TAL-project is ontwikkeld. Uiteraard liggen aan zo'n leerlijn didactische keuzes ten grondslag. In het laatste gedeelte van het artikel worden deze keuzes ter discussie gesteld, waarbij kort wordt ingegaan op mogelijke alternatieven. Het artikel is bedoeld als bijdrage aan de nog volop in gang zijnde discussie over de problematiek van leerlijnen en tussendoelen voor de genoemde leerstofdomen.

1 Inleiding: problemen bij het onderwijs in de bovenbouw

Het onderwijs in breuken, kommagetallen, procenten en verhoudingen neemt een belangrijke plaats in binnen het reken-wiskundeonderwijs in de bovenbouw van de basisschool. Wie er de huidige reken-wiskundemethoden op naslaat, komt al gauw tot de conclusie dat zeker de helft van alle lessen in groep 7 en 8 direct of indirect op deze leerstofdomen betrekking heeft. Dat het onderwijs in de praktijk nochtans niet altijd op rolletjes loopt, bleek wel bij een consultatiebijeenkomst die door de SLO werd georganiseerd in het kader van het TAL-project. In deze bijeenkomst spraken zo'n vijftien leerkrachten van uiteenlopende scholen en met verschillende methoden, zich uit over de kwaliteit van hun onderwijs rond de genoemde domeinen (Lit e.a., 2003). Vrijwel unaniem bleek men van mening dat er nog veel te verbeteren valt. Een veelgehoorde klacht was bijvoorbeeld dat de leerstappen in de eigen reken-wiskundemethode te groot zijn, dat er veel onduidelijkheden zijn over de te doorlopen leerlijn en dat het onderwijs met name voor de C-, D- en E-leerlingen moeilijk te volgen is. Neem je geen aanvullende maatregelen, dan dreigt een groot deel van deze leerlingen af te haken, aldus veel van de aanwezigen. In samenhang hiermee werd veelvuldig gewezen op de overladenheid van het bovenbouwprogramma. Men ervaart de dagelijkse lessen vaak als vol en versnipperd, te veel gericht op onderdelen die weinig met elkaar te maken lijken te hebben - met als gevolg dat vooral zwak-

kere leerlingen na verloop van tijd door de bomen het bos niet meer zien.

In een tweede consultatiebijeenkomst (Lit e.a., 2004), waarin een vergelijkbare groep leerkrachten een aantal bouwstenen voor een leerlijn kommagetallen (Buijs, 2004a) van commentaar voorzag, bleek onder meer behoefte te bestaan aan informatie over minimumdoelen en de eisen die het voortgezet onderwijs op het gebied van het onderhavige domein stelt. Wat zijn bijvoorbeeld voor leerlingen die naar het VMBO gaan leerstofonderdelen die in ieder geval ruimschoots aan de orde moeten komen? Hoever moet het onderwijs daarin gaan om te bereiken dat deze leerlingen een goede start in het voortgezet onderwijs kunnen maken? Interessant in dat opzicht was een discussie die ontstond over de vraag in hoeverre je zwakkere leerlingen in groep 7 en 8 in het uiterste geval maar gewoon gericht 'de truc' van het onder elkaar optellen en aftrekken met kommagetallen moet aanleren. Sommige leerkrachten waren hier duidelijk een voorstander van, maar anderen brachten er tegenin dat dit vrijwel zinloos is omdat leerlingen in het voortgezet onderwijs deze truc toch zelden of nooit meer gebruiken - ze werken daar immers vrijwel vanaf de eerste dag voornamelijk op de rekenmachine en rekenen alleen de meest elementaire zaken (en zelfs dat soms niet) uit het hoofd uit.

In dit artikel gaan we nader in op de problematiek van leerlijnen en leerstofdoelen met betrekking tot breuken, kommagetallen, procenten en verhoudingen. Vertrekpunt daarbij vormen de ervaringen die worden opgedaan in de huidige fase van het TAL-project, een project waarin SLO

en Freudenthal Instituut samenwerken aan de ontwikkeling van leerlijnen en tussendoelen. In het eerste deel van het artikel staan we kort stil bij wat als een belangrijk ontwikkeldoel voor TAL fungeert: het versterken van de tendens om het onderwijs in breuken, kommagetallen, procenten en verhoudingen minder te richten op het verwerven van standaardprocedures, maar meer op het verwerven van begrip binnen deze domeinen.

In het tweede deel wordt een voorbeeld van een leerlijn kommagetallen gegeven die sterk gericht is op begripsontwikkeling. De beschrijving van deze leerlijn is bedoeld als bijdrage aan de discussie over leerlijnen en tussendoelen voor de bovenbouw van de basisschool, naast andere bijdragen, zoals het discussiestuk 'De kern van breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen' (Keijzer e.a., 2005). De beschrijving heeft dan ook bepaald geen definitieve status. Op basis van de discussie zal naderhand, als de ideevorming verder is uitgekristalliseerd, een meer definitieve leerlijnbeschrijving inclusief bijbehorende tussendoelen worden samengesteld. Dat er aan zo'n leerlijn didactische keuzen ten grondslag liggen, wordt in het laatste deel van dit artikel besproken. Naar voren zal komen dat er niet alleen in de keuze van contexten en modellen verschillende opties mogelijk zijn, maar ook op een meer fundamenteel niveau waar het gaat om de 'architectuur' van de leerlijn (Goffree, 1994). Daar zal onder meer de vraag worden besproken of het wel gewenst is leerlijnen te ontwikkelen waarin het onderwijsleerproces wordt opgevat als een fijnmazig geheel van betrekkelijk kleine leerstapjes, waarbij de leerlingen geleidelijk aan verder in de beoogde richting geleid worden. Verdient het niet de voorkeur om, zoals in het genoemde discussiestuk wordt voorgesteld, uit te gaan van een veel globaler geheel van kernproblemen, die kinderen directer tot de kern van de leerstof leiden? Betoogd zal worden dat er verschillende keuzen mogelijk zijn en dat voor beide typen leerlijnen iets te zeggen valt. Niettemin lijkt het voor een aanzienlijk deel van de leerlingen én hun leraren toch grote voordelen te hebben om voor een meer geleidelijke en fijnmazige leerstofopbouw te kiezen.

2 TAL en het streven naar begripsgericht onderwijs

Tot voor kort lag de nadruk in het onderwijs in breuken, kommagetallen, procenten en verhoudingen op het aanleren van procedures: vaste werkwijzen die door de leerkracht stap voor stap werden geïntroduceerd en vervolgens door de leerlingen werden ingeoefend.

Zulke procedures hadden bijvoorbeeld betrekking op het leren werken met de breuk als operator ($\frac{3}{4}$ deel van € 600,- = ...), het optellen en aftrekken met ongelijknamige breuken ($\frac{1}{3} + \frac{2}{4} = \dots$; $\frac{3}{4} - \frac{3}{5} = \dots$), het cijferend

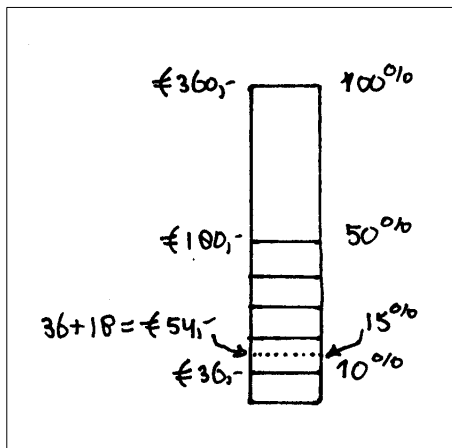
rekenen met kommagetallen, het via de 1%-regel bepalen van een percentage van een bedrag (15 procent van € 360,- = ...), het omzetten van een breuk in een kommagetal ($\frac{3}{5} = 0,6$; $\frac{3}{7} = 0,42857\dots$), en dergelijke. Een groot bezwaar van dit onderwijs laat zich makkelijk raden: leerlingen die niet of onvoldoende tot beheersing van de, soms vrij abstracte procedures komen, blijven zitten met een verbrokken geheel aan onsamenhangende weetjes en trucjes.

In de huidige realistische reken-wiskundemethoden is een tendens merkbaar om aan dit probleem tegemoet te komen. Er wordt minder nadruk op procedurele kennis gelegd en er wordt naar gestreefd om tot een goed begrip van de betreffende leerstof te komen. Dat dit nog niet altijd tot het beoogde resultaat leidt, is hierboven al gememoreerd. Het komt erop neer dat het in de praktijk, ondanks alle goede bedoelingen, nogal eens gebeurt dat sommige leerlingen het onderwijs als onsamenhangend ervaren, en dat ze niet in voldoende mate tot de beoogde beheersing van de leerstof komen. Bovendien is er het gevaar van de ontwikkeling van nogal star aanpakgedrag: de leerlingen leren te weinig om zich flexibel op te stellen en, al naar gelang de situatie, te kiezen voor een passende aanpak.

In het TAL-project wordt daarom gestreefd naar een meer op begripsverwerving gerichte vorm van onderwijs waarin deze tendens versterkt en uitgebouwd kan worden. Immers, als er veel consequenter naar gestreefd wordt om eerst en vooral een goed begrip van een aantal basale zaken tot stand te brengen, dan zullen de leerlingen de leerstof veel meer als een samenhangende geheel ervaren. Krijgen ze bovendien meer ruimte om op hun eigen niveau te werken, dan kan vroegtijdig afhaken van leerlingen wellicht worden voorkomen. Neem bijvoorbeeld de breuken. Het onderwijs zou erop gericht kunnen zijn leerlingen een aantal indringende en basale ervaringen te laten opdoen met situaties waarin het breken van de eenheid centraal staat (breeksituaties, meetsituaties, verdeelsituaties (Treffers e.a., 1994; Buijs e.a., 1996); zo leren ze in ieder geval de breukentaal begrijpen en een goed inzicht te ontwikkelen in wat aanduidingen als $\frac{2}{5}$ pizza en $1\frac{2}{3}$ liter melk inhouden.

Op basis hiervan kan vervolgens de weg naar het op de getallenlijn plaatsen en naar eenvoudige operaties worden ingeslagen, in het bijzonder rond de breuk als operator: $\frac{2}{4}$ deel van € 600,- = ...), en het met een breuk beschrijven van een verhouding (zestig van de tachtig hotelbedden zijn bezet, welk deel is dat?). Krijgen leerlingen de ruimte om op gedifferentieerde wijze tot een oplossing te komen met de strook als ondersteunend model (fig.1), dan kan daarmee niet alleen een solide grondslag gelegd worden voor het verkennen van de breuken, maar kan er ook een basis gelegd worden voor de exploratie van zaken die in het verlengde daarvan binnen andere domeinen aan bod komen. Denk bijvoorbeeld aan het gebruik van procenten als operator (15 pro-

cent van € 360,- = ...) en het met een percentage beschrijven van een verhouding (tweehonderdveertig van de zeshonderd parkeerplaatsen zijn bezet, hoeveel procent is dat?).



figuur 1

Hiermee dienen zich twee centrale didactische principes aan die een belangrijk aandachtspunt voor de ontwikkeling van leerlijnen en tussendoelen vormen, te weten 'samenhang' en 'differentiatie naar oplossingsniveau' (Gravemeijer e.a., 2004; Buijs, 2004b).

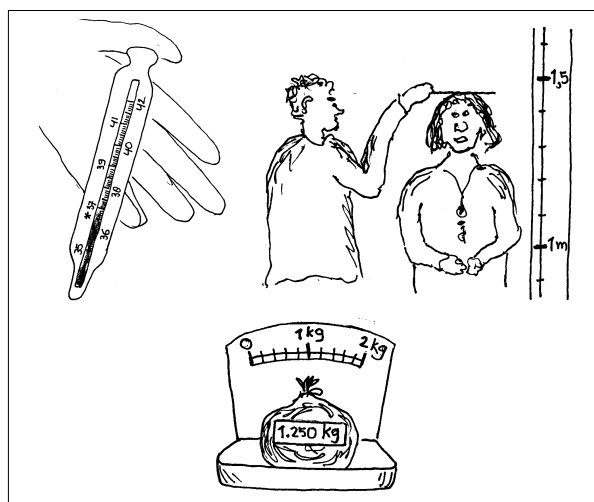
3 Voorbeeld van een begripsgerichte leerlijn kommagetallen

Kommagetallen is een domein dat van oudsher in de hoogste leerjaren een centrale plaats inneemt. Hoewel deze getallen in het leven van alledag vaak meetgetallen zijn, lag binnen het rekenonderwijs de nadruk op het aanleren van procedurele vaardigheden, zoals het cijferend optellen en aftrekken, het omzetten van een breuk in een kommagetal, en zo meer. Zaken die meer een beroep doen op het inzicht in kommagetallen, zoals het op de juiste manier interpreteren van deze getallen in een meetcontext, het vergelijken en op de getallenlijn plaatsen daarvan, het bepalen van het midden tussen twee getallen, en het werken met afrondingen van kommagetallen, traden in het verleden veel minder voor het voetlicht. Vandaag de dag worden dergelijke opgaven echter steeds meer als de kern van de leerstof beschouwd, zoals ondermeer in de kerndoelen is vastgelegd. Ook passen zulke opgaven goed bij het streven naar gecijferdheid als overkoepelend doel van het reken-wiskundeonderwijs (Treffers, 1994).

Hoe kan een leerlijn er nu uitzien die meer gericht is op het inzichtelijk leren oplossen van de genoemde typen opgaven? Hierna een korte schets van het eerste deel van een dergelijke leerlijn die binnen het SLO-gedeelte van het TAL-project is ontwikkeld.

Eerste verkenningen: betekenis geven, relatie met omringende hele getallen

Voor kommagetallen geldt dat kinderen er al het nodige vanaf weten voordat ze er op school 'officieel' kennis mee maken. Iedereen begrijpt immers hoe je geldbedragen met een komma, zoals bij een CD van € 12,95, moet interpreteren - de komma geeft in zo'n geval de scheiding aan tussen euro's en centen. Die bekendheid met kommagetallen geldt ook voor bepaalde meetsituaties, zoals in het geval van de eigen lengte van kinderen - Sandra is 1,34 m lang, Rob is 1,43 m - waarbij de komma de scheiding markeert tussen meters en centimeters. Sommige kinderen weten uit ervaring ook hoe het zit met gewichten: een zak appels van 1,250 kg in de supermarkt, en met temperaturen: Fatma heeft 38,7 graden koorts, maar dit geldt niet voor alle kinderen. In het gezamenlijk onderzoeken van dergelijke situaties ligt voor het onderwijs dan ook een waardevol aangrijpingspunt om tot een eerste verkenning van kommagetallen te komen, om daarmee de eigen, informele kennis aan te scherpen. Het gaat dan niet om het rekenen met kommagetallen, maar om het betekenis geven en om de relatie met de 'omringende' hele getallen (fig.2).



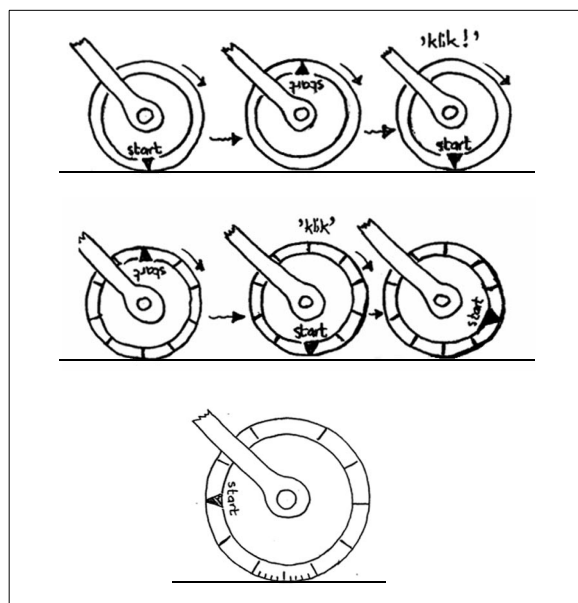
figuur 2

Zo kan bijvoorbeeld vastgesteld worden dat een gewicht van 1,250 kg inhoudt dat de zak 1 kg en nog 250 gram weegt. En dat dit meer is dan 1 kg (het gewicht van een pak suiker), maar minder dan 2 kg. Je kunt ook zeggen: het is 1 kg en nog een kwart kg. Via wegen op een bascule met standaardgewichten kunnen de kinderen dit daadwerkelijk controleren. Evenzo kan achterhaald worden dat een lichaamstemperatuur van 38,7 graden wil zeggen dat je 'verhoging' hebt. Je temperatuur ligt tussen de 38 en 39 graden - om precies te zijn bedraagt deze 38 graden en nog '7 van die kleine stukjes' (oftewel zeven tienden van een graad). De schaalverdeling op de koortsthermometer kan hier als steun fungeren. Via dergelijke explora-

ties kunnen leerlingen zich bewust worden van enkele specifieke hoedanigheden van kommagetallen, zoals ze die in het leven van alledag tegenkomen. Het zijn veelal meetgetallen, waarbij de cijfers voor en achter de komma gekoppeld zijn aan maten, en die op de getallenlijn tussen de bekende hele getallen ‘in passen’. Het zal overigens duidelijk zijn dat het van grote waarde is als leerlingen, voorafgaand aan de genoemde verkenningen, de nodige eigen ervaringen met praktische meetsituaties hebben opgedaan. Juist als ze een goed besef van de verschillende grootheden en de daarbij gehanteerde maateenheden en meetinstrumenten ontwikkelen, wordt een hechte basis voor de kommagetallen gelegd.

Samenhang kommagetallen met ongelijk aantal decimalen; het klikwiel als modelcontext

Uiteraard is de kous met zulke verkenningen niet af. Het gaat binnen de genoemde situaties vrijwel altijd om kommagetallen met een gelijk aantal decimalen, zoals in het geval van het vergelijken van de eigen lengte van twee kinderen van respectievelijk 1,34 m en 1,43 m lang. Terwijl juist het met elkaar in verband brengen van kommagetallen met een ongelijk aantal decimalen (bijvoorbeeld: wat is langer: een plank van 1,4 meter of van 1,25 meter?) een belangrijke aanzet kan zijn tot verdieping van het inzicht in kommagetallen. Ben je namelijk in staat om kommagetallen betekenis te geven en begrijp je hoe getallen als 1,25 en 1,4 en 1,125 ten opzichte van elkaar op de getallenlijn liggen, dan is daarmee een solide grondslag gelegd voor allerlei zaken die naderhand actueel worden, zoals het elementair hoofdrekenen, de samenhang tussen breuken en kommagetallen en het afronden.



figuur 3

Een mogelijkheid om die samenhang beter te leren door-

zien, is leerlingen een meetsituatie voor te leggen waarin ze een proces van voortgaande maatverfijning doorlopen en waarbij de meetresultaten al naar gelang de mate van verfijning van de gehanteerde maateenheid, in een kommagetal met een groter aantal decimalen worden uitgedrukt. Een situatie die daarvoor in aanmerking komt is die van het ‘meten met een klikwiel’ met een omtrek van één meter (Treffers e.a., 1996). Eerst onderzoeken de leerlingen hoe het klikwiel werkt, waarbij blijkt dat er bij elke afgemeten meter een klik klinkt en de teller eentje verspringt. Vervolgens buigen ze zich over de vraag of je niet nauwkeuriger met het klikwiel zou kunnen meten. Na gezamenlijke beraadslaging onder leiding van de leerkracht wordt de maat van één meter nu onderverdeeld in tien, terwijl de teller zodanig wordt aangepast dat er om de decimeter een klik klinkt en dat deze bij elke afgemeten decimeter verspringt (fig. 3).

Nu wordt besproken hoe je het meetresultaat kunt benoemen: als 7 meter en nog 8 decimeter, als 7,8 meter (‘zeven komma acht meter’) of nog wat globaler, als ruim zeven-en-een-halve meter. Hoewel de aandacht hier nog niet nadrukkelijk op wordt gevestigd, wordt hiermee wel duidelijk dat je 7,8 m ook kunt opvatten als 7 en nog $\frac{8}{10}$ meter.

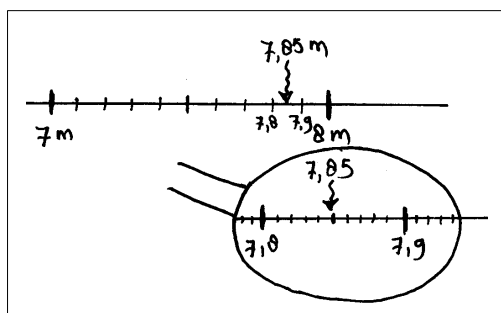
Ten slotte wordt een gedachtenexperiment gedaan: stel dat je de maat nog verder wilt verfijnen, waar zou je dan voor kunnen kiezen? En hoe zou je het meetresultaat kunnen benoemen? Na het voorgaande ligt het voor de hand om de maat nog een keer decimaal te verfijnen, zodat de centimeter in beeld komt (zie fig.3, onderaan). Samen met de leerkracht komen de kinderen nu tot de slotsom dat je een meetresultaat als 7,85 m kunt benoemen als 7 meter en 85 centimeter maar ook als 7 meter, 8 decimeter en 5 centimeter. Impliciet wordt zo ook duidelijk dat een getal als 7,85 groter is dan 7,8 maar kleiner dan 7,9 - op de getallenlijn ligt 7,85 dus ‘ingeklemd’ tussen 7,8 en 7,9.

Kommagetallen op de getallenlijn leren plaatsen

Het is voor de leerlingen nu nog maar een klein stapje naar het plaatsen van kommagetallen op de getallenlijn. Dit kan vanuit de meetcontext aangezet worden indien de opgemeten afstand wordt afgebeeld op een meetlijn met streepjes voor de hele meters. Waar liggen op die lijn nu 7,8 en 7,9? En hoe ligt 7,85 ten opzichte van deze getallen? Op grond van de voorafgaande ervaringen met het klikwiel is het voor hen nu niet moeilijk meer om dergelijke ‘positieproblemen’ op te lossen. De plaats van 7,8 en 7,9 vind je door het interval dat van 7 tot 8 loopt in tien onder te verdelen, beide getallen liggen dan bij respectievelijk het achtste en negende streepje. Evenzo ligt 7,85 tussen 7,8 en 7,9 - om de precieze plaats te bepalen verdeel je het stukje getallenlijn tussen 7,8 en 7,9 nog eens in tien stukjes, en 7,85 ligt dan bij het vijfde streepje, oftewel midden tussen 7,8 en 7,9 (fig.4).

Op vergelijkbare manier kan achterhaald worden dat de

plaats van een getal als 7,865 bepaald kan worden door eerst het stukje getallenlijn tussen 7,8 en 7,9 decimaal te verfijnen, en vervolgens het stukje tussen 7,86 en 7,87. Het denken in termen van lengtematen kan bij dit alles houvast bieden. Immers: je kunt je 7,8 indenken als 7 meter en 8 dm oftewel 7 m en 80 cm, en 7,85 kun je je indenken als 7 meter, 8 dm en 5 cm (oftewel 7 m en 85 cm).



figuur 4

De ‘woonplaats’ van de kommagetallen kan nu verder worden onderzocht door uit te breiden naar andere meetcontexten. Zo kan een experiment gedaan worden rond inhoudsmaten, waarbij de inhoud van een fles van 0,75 liter in de maatbeker wordt verkend. Die komt tot een hoogte van ‘tussen de 0,7 en 0,8 liter’, als het goed is ongeveer midden tussen de betreffende streepjes. Net zoals 0,75 meter op de bordliniaal midden tussen 0,7 en 0,8 m ligt. Maar ook zijn er allerlei onderzoekjes met kale getallen mogelijk waarbij steeds verder in kaart wordt gebracht waar kommagetallen op de getallenlijn thuis horen. Hiermee komt de oneindigheid van de getallenwereld naar voren: tussen twee kommagetallen kun je altijd nog weer andere kommagetallen (met een groter aantal decimalen) vinden. Enkele voorbeelden van opgaven:

- zet op de juiste plaats op de (in tienden onderverdeelde) getallenlijn: 3,15, 3,5 en 3,095;
- welk getal ligt dicht bij 2: 1,95; 2,1 of 2,01?
- bedenk drie getallen die groter zijn dan 3,8 maar kleiner dan 4;
- je wandelt over de getallenlijn van 4,5 naar 5. Welke van de volgende getallen kom je tegen? Welke niet? 4,65; 4,75; 4,9; 4,09; 4,099;
- het naderspel, een spel voor twee personen, elk met een rekenmachine: speler A toetst als begingetal 4,5 in, speler B 5. Speler A moet nu een getal bij zijn begingetal 4,5 optellen zodanig dat hij niet voorbij het getal van speler B komt (5). Daarna moet speler B een getal van zijn begingetal aftrekken zodanig dat hij niet voorbij het getal komt dat speler A op dat moment op zijn machine heeft staan. Wie het eerst zijn tegenstander passeert heeft verloren (Van de Brink, 1986).

De waarde van het oplossen van dergelijke problemen is gelegen in het feit dat dit in hoge mate kan bijdragen aan

een goed ontwikkeld gevoel voor de grootte van kommagetallen. Leerlingen zullen zich immers steeds beter realiseren dat een getal als 2,11 kleiner is dan 2,9 ondanks dat je op het eerste gezicht misschien geneigd zou zijn te denken dat het omgekeerde het geval is (omdat 11 meer is dan 9). Ook zullen ze zich realiseren dat je, ‘wandellend’ over de getallenlijn van 2,5 naar 3, steeds weer nieuwe kommagetallen kunt bedenken die je onderweg tegenkomt, met een steeds groter aantal decimalen. Hiermee wordt ook nader onderbouwd dat het aantal decimalen in een kommagetal niets zegt over de grootte van dat getal.

Uitwaaiering naar elementair hoofdrekenen; samenhang met breuken, ‘miljoen- en miljardkommagetallen’

Zijn leerlingen eenmaal in staat om betekenis aan kommagetallen te geven en kunnen ze deze in onderlinge samenhang op de getallenlijn plaatsen, dan is de begripmatige basis gelegd voor een groot aantal zaken die hierop voortborduren. Dit betreft onder meer:

- 1 Elementair hoofdrekenen: optellen en aftrekken.
- 2 Samenhang met (gewone) breuken.
- 3 Miljoen- en miljardkommagetallen

Ad 1: elementaire hoofdrekenopgaven waarbij leerlingen optellen en aftrekken met kommagetallen, hoeven weinig problemen meer op te leveren. Neem bijvoorbeeld enkele opgaven met kale getallen als $3,5 + 2,75$ en $4,2 - 1,95$. Het is niet moeilijk voor ze om zulke opgaven te ‘contextualiseren’, er een concrete situatie bij te bedenken (Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001). Bij $4,2 - 1,95$ kan bijvoorbeeld gedacht worden aan een betaalsituatie of aan een plank van 4,2 m waar een stuk van 1,95 m afgezaagd moet worden. Maar ook het denken aan de getallenlijn en de positie die de betreffende getallen daarop innemen, kan houvast bieden. Het mooie van deze opzet is ook dat leerlingen zich gaandeweg steeds meer realiseren dat de kennis die ze al hebben van het elementaire hoofdrekenen tot 1000 met hele getallen, volop in deze problemen ingezet kan worden.

Ad 2: enig inzicht in de samenhang van kommagetallen met (gewone) breuken is in het voorafgaande al tot ontwikkeling gekomen. Dit geldt met name voor halven, kwarten en tienden. Zo is in de eerste verkenningen van kommagetallen naar voren gekomen dat je 2,5 meter kunt interpreteren als twee-en-een-halve meter, 1,250 kg als 1 kg en een kwart kilogram, en 38,7 graden als 38 en $\frac{7}{10}$ graad. Naderhand kunnen dergelijke relaties met behulp van bordliniaal en maatbeker meer expliciet gemaakt en onderbouwd worden. Maar ook een uitbreiding in de richting van honderdsten en duizendsten kan nu gerealiseerd worden, bijvoorbeeld aan de hand van tijden in de sport (fig.5). Via een dergelijke context kunnen leer-

lingen zich nader bewust worden van een van de meest wezenlijke trekken van kommagetallen, namelijk het decimale karakter: het feit dat je ze kunt interpreteren als tiendelige breuk, een inzicht dat voor het voortgezet onderwijs van grote betekenis is.

Romme verlegt grenzen



VAN ONZE VERSLAGGEVER MARTIJN VAN BEETEN

BERLIJN - Als Gianni Romme schaats, dan gaan de monden open van verbazing. De 31-jarige stayer benaderde zaterdagmiddag in Berlijn het wereldrecord op de vijf kilometer van Jochem Uytendaele (61.14.66 minuten) tot op vierhonderdste van een seconde.

figuur 5

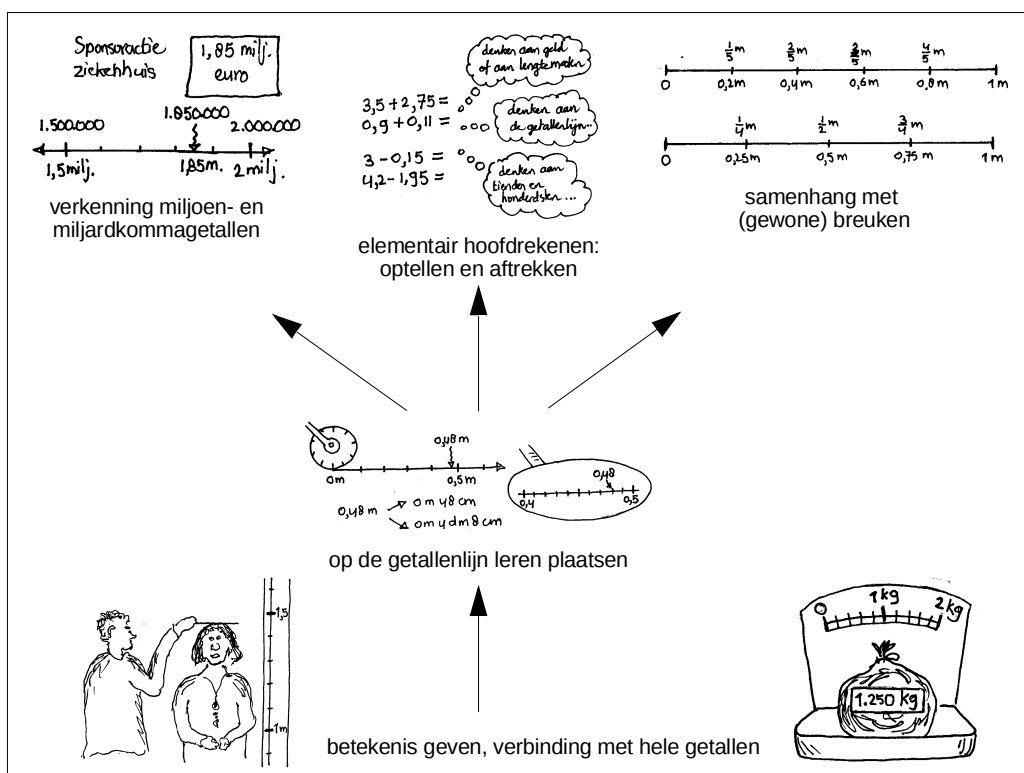
Ad 3: in de media worden kommagetallen vaak gebruikt als aanduiding voor zeer grote, afgeronde getallen. Bijvoorbeeld: in Nederland rijden er momenteel (maart 2005) 6,7 miljoen auto's rond. En: sponsoractie ziekenhuis India levert 1,85 miljoen euro op. Het leren doorzien van zulke 'miljoen- en miljardkommagetallen' behoeft

vanaf een zeker moment de nodige aandacht, waarbij de kinderen zelf kunnen onderzoeken hoe de vork aan de steel zit. Al gauw blijkt dan dat de getallenlijn weer goede diensten kan bewijzen. Zo kan worden vastgesteld dat een getal als 6,7 miljoen op de 'miljoenenlijn' thuishoort tussen 6 en 7 miljoen. De precieze plaats bepaal je door het interval tussen 6 en 7 in tien stukjes te verdelen - 6,7 ligt dan bij het zevende streepje. Omdat elk stukje voor 100.000 moet staan, betekent 6,7 miljoen dus 6 miljoen en nog 700.000 (7 honderdduizendjes). Op een soortgelijke manier kan het inzicht ontstaan dat 1,85 miljoen euro staat voor 1 miljoen en nog 850.000 euro. De regel voor het afronden van hele grote getallen tot een miljoen- of miljardkommagetal (bijvoorbeeld: een bezoekersaantal als 2.367.840 afronden tot een miljoenkommagetal met één decimaal) kan overigens ook beredeneerd worden aan de hand van de getallenlijn.

Overzicht eerste deel leerlijn

Aldus kan het eerste deel van een op begripsvorming gerichte leerlijn eruitzien. Uiteraard dient zo'n leerlijn veel meer te omvatten, zoals het afronden, vermenigvuldigen en delen met kommagetallen, het schattend rekenen en een nadere bewustmaking van de decimale structuur van kommagetallen. Maar de basis kan in grote lijnen worden gevormd door de hierboven beschreven opeenvolging van activiteiten rond betekenis geven, positioneren en (basaal) opereren.

In een schematisch overzicht laat zich dit als volgt globaal uitbeelden (fig. 6).

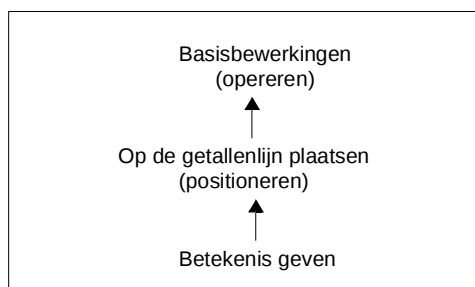


figuur 6

Van groot belang bij het doorlopen van deze leerlijn is verder dat het mondeling taalgebruik betreffende kommagetallen zorgvuldig tot ontwikkeling komt. In eerste instantie wordt in de klas net als daarbuiten gewoonlijk gesproken van ‘vier euro vijfentachtig’, ‘twee meter vijfendertig’, en dergelijke. Dit is de meest natuurlijke en bij het dagelijks spraakgebruik aansluitende wijze van benoemen. In navolging hiervan kan tijdens de eerste verkenningen, zoals hiervoor beschreven, worden gesproken van ‘drie komma acht meter’, ‘nul komma vijfenzeventig liter’, en zo meer. Het gevaar van deze uitspraak is echter dat de cijfers achter de komma als een opzichzelfstaand geheel worden opgevat, met als mogelijk gevolg fouten in de trant van: $0,9 + 0,11 = 0,20$. Door de hechte verbinding met het meten en met het op de getallenlijn plaatsen van kommagetallen kunnen dergelijke begripsfouten worden voorkomen. Naderhand, als de decimale structuur van kommagetallen punt van onderzoek wordt, dienen de leerlingen zich steeds meer bewust te worden dat kommagetallen ook benoemd kunnen worden in termen van ‘drie achttiende (meter)’, ‘vijfenzeventig honderdste (liter), en dergelijke. Aldus kan de taalontwikkeling zich parallel aan de begripsmatige ontwikkeling steeds verder voltrekken.

4 Didactische keuzemomenten

Tot zover het overzicht van een leerlijn kommagetallen die zich richt op een gedegen begripsvorming. Door leerlingen in eerste instantie uitgebreid op zoek te laten gaan naar de betekenis van kommagetallen in allerlei situaties, en ze vervolgens te laten onderzoeken waar deze thuis horen op de getallenlijn, wordt een begripsmatig fundament gelegd waarop zich naderhand de kennis van het leren opereren kan ontwikkelen (fig.7).



figuur 7

Wat betreft dit opereren moet niet in de eerste plaats aan standaardprocedures worden gedacht, maar meer aan het flexibele hoofdrekenen, het omzetten van breuken in kommagetallen en het werken met miljoen- en miljard-kommagetallen.

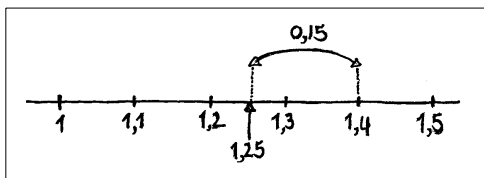
Kenmerkend voor de leerlijn is verder het aansluiten bij de eigen, informele kennis van leerlingen en het stapsgewe-

wijs, geleidelijk aan uitbouwen van die kennis in de richting van het flexibele opereren. In deze leerlijn zit vanzelfsprekend een aantal didactische keuzemomenten. Bijvoorbeeld voor de keuze van de contexten die benut worden om de eigen, informele kennis van de leerlingen aan te scherpen. Het geldt ook voor de keuze van het meten met een klikwiel als modelcontext voor het positioneren. Er zouden ook andere keuzen gemaakt kunnen worden, bijvoorbeeld indien een andere meetcontext wordt gekozen om leerlingen het proces van voortgaande maatverfijning te laten doormaken.

Op meer fundamenteel niveau is er echter ook al sprake van didactische keuzen. Een van de belangrijkste daarvan betreft de keuze voor de geschetste didactische drieslag van betekenis geven, positioneren en (flexibel) opereren als ruggengraat van de leerlijn. Biedt het doorlopen van een leerlijn, gebaseerd op deze drieslag, de leerlingen inderdaad de mogelijkheid om geleidelijk aan een steeds beter begrip van het fenomeen kommagetal te verwerven? Hoe stevig is het fundament dat via het betekenis geven en het positioneren gelegd kan worden voor het opereren met kommagetallen? Het zou nu te voeren om uitgebreid alle argumenten achter de genoemde keuze op een rij te zetten. Ook lijkt het aan te bevelen om op dit punt, in aanvulling op de praktijkexperimenten die in het kader van TAL hebben plaatsgevonden, nader onderzoek te doen, met name ook voor wat betreft de groep zwakkere leerlingen. Maar niettemin kan hierover in ieder geval het volgende worden opgemerkt.

Ten grondslag aan de keuze voor de genoemde drieslag ligt het idee dat het meten en het interpreteren van meet-kommagetallen zoals de kinderen die uit hun omgeving kennen, de meest elementaire en meest directe bron voor een goed begrip van kommagetallen is. Daarbij speelt de grootheid lengte een centrale rol. Met name door nader in te gaan op betekenis en grootte van kommagetallen in de context van lengtematen en door de leerlingen voor deze grootheid een proces van voortgaande maatverfijning te laten doorlopen, worden ze zich steeds meer bewust hoe getallen als 1,4 en 1,25 zich qua grootte en positie op de getallenlijn tot elkaar verhouden. Zo komen ze erachter dat je 1,4 m kunt opvatten als 1 m en nog 4 dm, oftewel 1 m en 40 cm. Evenzo ontdekken ze dat je een getal als 1,25 meter niet alleen als 1 m en nog 25 cm en als $1\frac{1}{4}$ m kunt interpreteren, maar ook als 1 m, 2 dm en nog 5 cm. Daarmee wordt tevens de relatie tussen beide getallen duidelijk: 1,4 is meer dan 1,25 want een lengte van 1 m en 40 cm is meer dan een lengte van 1 m en 25 cm. Deze relatie komt ook in de positie op de getallenlijn tot uitdrukking: 1,25 ligt op de getallenlijn midden tussen 1,2 en 1,3; dat is ‘een eindje vóór 1,4’, zoals een leerling het tijdens een praktijkexperiment rond dit onderdeel van de leerlijn uitdrukte. Het bepalen van het verschil tussen beide getallen is nu ook betrekkelijk eenvoudig; dit bedraagt 0,15 (fig.8). Oftewel, in termen van lengtematen: 15 cm. Aldus ontvouwt zich steeds verder wat wel

de 'getallenruimte' wordt genoemd, waarvan de komma-getallen deel uitmaken (Lorenz, 1997).



figuur 8

De leerlingen krijgen een steeds beter en genuanceerder beeld hoe deze getallenruimte is opgebouwd, welke relaties erin te onderkennen zijn, en hoe je je door deze ruimte kunt bewegen, zoals dat ook voor hele getallen geldt.

5 Discussie

Kiezen voor de kern, of toch liever voor de weg van de geleidelijkheid?

Het is duidelijk dat er andere keuzen te maken zijn. Zo zou ook geopteerd kunnen worden voor een benadering waarbij grotendeels afgezien wordt van de eigen, informele kennis van leerlingen en waarbij direct gewerkt wordt aan de ontwikkeling van kerninzichten op het gebied van kommagetallen. 'Kiezen voor de kern', zoals het genoemd wordt in het artikel in het tijdschrift 'Volgens Bartjens...' (Keijzer e.a., 2004). In het discussiestuk 'De kern van breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen' (Keijzer e.a., 2005) wordt deze benadering meer in het algemeen toegelicht en met voorbeelden uit verschillende domeinen geïllustreerd. Een voorbeeld van een lessenserie gericht op een kernaspect van kommagetallen, te weten het aspect van de decimale getalstructuur, wordt beschreven in het artikel van F. van Galen (2004), eveneens in het tijdschrift 'Volgens Bartjens...'. In deze lessenserie wordt beoogd de leerlingen kommagetallen te laten heruitvinden volgens een aanpak die verwantschap vertoont met de wijze waarop deze getalsoort in het verleden is uitgevonden. Op zich is dit een interessante optie: de leerlingen reconstrueren de betekenis van kommagetallen als decimale getallen niet vanuit hun eigen informele kennis in het kader van een geleidelijk opgebouwd proces van voortgaande niveauverhoging, maar vanuit een semi-historische invalshoek waarbij om, zo te zeggen, de decimale getalstructuur direct wordt blootgelegd. Aan de ene kant vertoont deze benadering een zekere mate van overeenstemming met de hierboven beschreven benadering, omdat in beide gevallen sprake is van een proces van voortgaande maatverfijning dat de kinderen doorlopen. Aan de andere kant zijn er ook verschillen. Wellicht het belangrijkste daarvan betreft het verschil in geleidelijkheid. In de hierboven geschetste

benadering wordt gekozen voor een stapsgewijze, geleidelijke exploratie van kommagetallen waarbij in eerste instantie het meetaspect onderzocht wordt, van daaruit de plaats op de getallenlijn en pas later, nadat een zekere vertrouwdheid met elementair hoofdrekenen is gegroeid, het aspect van de decimale getalstructuur. In de benadering van Van Galen c.s. wordt er daarentegen juist voor gekozen om deze decimale getalstructuur direct aan de orde te stellen en deze door de leerlingen te laten heruitvinden. Tot besluit van dit artikel plaatsen we enkele kanttekeningen bij dit verschil in benadering.

Een afweging van de voors en tegens van een benadering via kleine leerstapjes ten opzichte van een benadering via kernproblemen en kerninzichten, is alleszins de moeite waard. In Nederland is het tot nu toe gebruikelijk om onderwijsleerprocessen volgens de eerstgenoemde benadering te laten verlopen. Behalve een niet onbelangrijke stijging in de reken-wiskundige prestaties van leerlingen (Kraemer e.a., 2005) is daarvan ook een gevolg dat handleidingen bij methoden steeds verder uitdijen met lesbeschrijvingen van soms wel drie pagina's. Heroverweging van deze benadering in het licht van een analyse van de mogelijke nadelen ervan kan zeker geen kwaad. Dat neemt niet weg dat de nodige voorzichtigheid geboden lijkt.

Op het eerste gezicht lijkt het enkele belangrijke voordelen te hebben om de weg naar een goed begrip van kommagetallen minder gelijkmatig te plaveien en de kinderen directer te laten toewerken naar het blootleggen van een van de wiskundige grondkenmerken van deze getalsoort. Weliswaar zullen de probleemsituaties waarvoor de kinderen zich gesteld zien in eerste instantie meer moeilijkheden met zich meebrengen, maar daar staat tegenover dat een kern van de leerstof, namelijk de decimale getalstructuur, veel directer in zicht komt en dat de leerkracht zich veel meer genooddaakt ziet om zelf die kern goed in het oog te houden en voor het onderwijs als leidraad te hanteren. Hij of zij zal zich daardoor mogelijk ook meer verantwoordelijk gaan voelen voor de totaliteit van het onderwijsleerproces. Terwijl een didactische benadering waarbij stapje voor stapje verder wordt gewerkt, bij leerkrachten wellicht een minder actieve onderwijshouding teweeg zal brengen - de weg is immers al zover uitgelijnd, dat er nauwelijks nog iets mis lijkt te kunnen gaan.

Er lijken echter toch ook enkele reële gevaren in een benadering te schuilen waarbij rechttoe-rechtaan aangekoerst wordt op de wiskundige kern van de zaak. Dit betreft in de eerste plaats het gevaar dat via een dergelijke benadering sommige leerlingen kansen ontnomen worden om op een meer geleidelijke manier tot een goed begrip van de leerstof te komen. Die wiskundige kern behoeft immers met name voor zwakkere leerlingen een meer omzichtige 'toenadering' dan voor sommige andere leerlingen. Een van de belangrijke verworvenheden van

het huidige reken-wiskundeonderwijs, met name in de lagere leerjaren, is toch dat via een geleidelijke en fijnmazige leerstofopbouw, alle leerlingen aan hun trekken kunnen komen. Daarbij draagt de interactieve, groepsgerichte onderwijssetting (Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001) er zorg voor dat zwakkere én betere leerlingen voor waardevolle nieuwe impulsen in het onderwijsleerproces kunnen zorgen en elkaar onder begeleiding van de leerkracht verder kunnen helpen. Anders gezegd: bij een benadering via kernproblemen dreigt vooral zwakkere leerlingen enigszins de pas afgesneden te worden.

Een tweede bezwaar is gelegen in de veel zwaardere rol die leerkrachten krijgen toebedeeld. Het werken met kernproblemen en kerninzichten vraagt immers van leerkrachten een zeer goed overzicht over het geheel van de leerlijn, over fundamentele stappen daarbinnen en over de functie van de voorgelegde kernproblemen. Hij of zij moet het eigen onderwijs veel meer zelf maken, en dit vereist veel kennis van de wiskunde, gevoel voor kinderlijke ideeën en werkwijzen en didactische vakbekwaamheid. Bij een meer geleidelijke, fijnmazige leerstofopbouw, wijst de weg zich veel meer vanzelf, en hoeft de leerkracht zich minder druk te maken of het wel de goede kant op gaat, of de inbreng van de leerlingen wel goed tot z'n recht komt, enzovoorts. Dan lijkt de weg van de geleidelijkheid toch te prefereren boven die van het werken met kernproblemen en kerninzichten.

Uiteraard is het laatste woord hierover nog niet gezegd. Het is een goede zaak dat deze problematiek in toeneemende mate ter discussie wordt gesteld. Daarmee komt ook de ontwikkeling van leerlijnen en tussendoelen op het gebied van breuken, kommagetallen, procenten en verhoudingen in een breder daglicht te staan. Bij dit alles lijkt het in ieder geval aan te bevelen om zorgvuldig om te gaan met de verworvenheden van het huidige reken-wiskundeonderwijs, hoeveel daar in bepaalde opzichten ook nog op aan te merken valt.

Noot

- 1 Met dank voor de op- en aanmerkingen van de twee redactiesleden, alsmede van mijn collega J. Klep voor hun waardevolle opmerkingen en suggesties bij een eerdere versie van dit artikel.
- 2 TAL staat voor 'Tussendoelen Annex Leerlijnen'.

Literatuur

- Brink, J. van den (1986). Rekenmachinespel. Steeds dicht bij elkaar. *Willem Bartjens*, 6(1), 25-26.
- Buijs, K. (red.), J. Bokhove, R. Keijzer, A. Lek, A. Noteboom & A. Treffers (1996). *De Breukenbode* (werkboek en handleiding). Enschede: SLO.
- Buijs, K. (2004a). *Bouwstenen voor een leerlijn kommagetallen* (nog niet gepubliceerde leerlijnbeschrijving). Enschede: SLO.
- Buijs, K. (2004b). Wie het kan verwoorden, snapt het. Niveau-differentiatie in de bovenbouw. *Volgens Bartjens...*, 24(1), 4-8.
- Galen, F. van (2004). In de voetsporen van Simon Stevin. Kommagetallen heruitvinden. *Willem Bartjens*, 23(5), 16-19.
- Goffree, F. (1994). Verhoudingen: je komt ze overal tegen. Een overzicht en een onderwijsspoor. *Willem Bartjens*, 14(1), 6-13.
- Gravemeijer, K.P.E. & H.A.A. van Eerde (2004). Verschil maken. De ontwikkeling in denkbeelden over het omgaan met verschillen tussen leerlingen. *Reken-wiskundeonderwijs, onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 23(1), 3-15.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den, K. Buijs & A. Treffers (red.) (2001). *Kinderen leren rekenen. Tussendoelen Annex Leerlijnen*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
- Keijzer, R., F. van Galen & K. Gravemeijer (2004). Kiezen voor de kern. *Volgens Bartjens...*, 24(1), 14-16.
- Keijzer, R., N. Figueiredo, F. van Galen, K. Gravemeijer & E. van Herpen (2005). *De kern van breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
- Kraemer, J.-M., J. Janssen, F. van der Schoot & B. Hemker (2005). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs halverwege de basisschool 4*. Arnhem: Cito.
- Lit, S.A. & W. van Zon (2003). *Rekenen / Wiskunde Bovenbouw. Advies 40*. Enschede: SLO.
- Lit, S.A. & W. van Zon (2004). *TAL leerlijnen bovenbouw rekenen. Advies 13*. Enschede: SLO.
- Lorenz, J.H. (1997). Is mental calculation just strolling around in an imaginary number space? In: M. Beishuizen, K.P.E. Gravemeijer & E.C.D.M. van Lieshout (eds.). *The Role of Contexts and Models in the Development of Mathematical Strategies and Procedures*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
- Treffers, A., L. Streefland & E. de Moor (1994). *Proeve van een nationaal programma. Deel 3A: Breuken*. Tilburg: Zwijsen.
- Treffers, A. (1994). Basale (on)gecijferdheid. In: M. Dolk, H. van Luit & E. te Woerd (ed.). *Speciaal rekenen*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
- Treffers, A., L. Streefland & E. de Moor (1996). *Proeve van een nationaal programma. Deel 3B: Kommagetallen*. Tilburg: Zwijsen.

How might learning strands for primary school subject matter such as fractions, decimals, percentage and ratio be structured? That is the central issue in this article, which is meant as a contribution to the recent discussion on learning strands for fractions, decimals, percentage and ratio. Experiences in the TAL-project form the background for the discussion. As a starting point, some of the problems will be described that teachers are faced with in the higher levels of primary school mathematics education when dealing with these subjects. Related to this, strengthening the conceptual basis of the learning strands indicates a general direction for finding a solution for these problems. The article continues with an example of a learning strand on decimals that aims at developing a strong conceptual basis. In the last part, some alternatives for the described learning strand will be discussed.