Breuk, komma, getal

A. Goddijn
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Dit artikel is een reactie op enkele onderdelen van het discussiestuk van de Tal-bovenbouwgroep: De kern van breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen. De standpunten dat ook in het basisonderwijs breuken bij leerlingen de status van 'wiskundig object' moeten halen en dat breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen in wezen allemaal hetzelfde, namelijk 'rational getallen', zijn, worden kritisch onder de loep genomen. Zulke theoretische versimpelingen doen de complexiteit van het onderwerp als geheel geen recht en wijzen geen weg naar een adequate leerlijn of didactiek. Een korte analyse van het dagelijks taalgebruik rond breuken, kommagetallen en procenten onderbouwt de visie dat het begrip 'relatief getal' weinig om het lijf heeft.

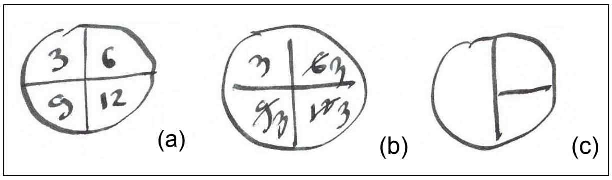
1 Yasmina en Ouiam delen kaas

24 Mei jongstleden, een tweede klas VMBO, een 'taalklas' op een school in Utrecht. De klas doet mee met het 'Wisbaakproject', dat gericht is op taalgericht vakonderwijs. Achter in de klas zijn Ouiam (spreek uit Wie-èm) en Yasmina bezig met een opgave over verdelen. Ze gebruiken daar breuken bij en we kijken en denken even mee.

> Deze belegen Maaslander kaas weegt 12 kilogram.
> Karim en Alice hebben 3 kilo nodig.

> Laat zien welk stuk van de hele kaas voor Karim en Alice moet worden afgesneden. Leg uit hoe je dat hebt gevonden.

Yasmina weet het direct: $\frac{1}{4}$ van 12 kilo. Ze vertelt hoe ze het gevonden heeft: 'Omdat ik vermenigvuldigen ken: 12 = 4 keer 3.' Dit is (nageschetst) haar tekening (fig.1a). Ik vraag naar die '6'. 'Ja, dat is dan op als je dat stuk ook verkoopt.' Het proces van snijden en gebruiken van de kaas leeft nog bij haar en haar tekening vertelt een eigen verhaal. Iets later verandert ze de getallen in de tekening (fig.1b). Er volgt een klassengesprek waarin de docent vraagt hoe het gedaan is. Een leerling gebaart nadrukkelijk met twee armen een kruisvorm; de docent wordt gedirigeerd eerst een lijn naar beneden te trekken (fig.1c).
De woorden verticaal, half, de helft, midden, middendoor en wat later 'de helft van de helft' vallen. Op het bord verschijnt een duidelijke figuur.

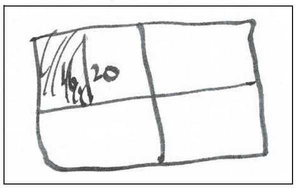


figuur 1a, b, c

Ouiam zegt: 'Je hebt eenderde. Drie stukken.' Dat werd in de klas alleen door de observator gehoord, die dicht bij Ouiam zat. Voor Yasmina duurt het veel te lang: 'Waarom doe je zo moeilijk?'

> De hele kaas kost 186 euro.
> Hoeveel moeten Karim en Alice betalen?

Ouiams rekenmachine zegt 46,50 euro. Kan ze dat ook zonder rekenmachine, met het plaatje dat getekend is als hulp? Ze pakt de uitdaging aan en het lukt haar. 186 : 2 is 93 en 93 : 2 is 45 en dan nog (dit duurt wel even ...) 1,50 euro.



figuur 2

Wat later wordt een rechthoekig stuk feta van 4 kilo gesneden om er 500 gram van af te halen; het gaat om inkopen voor een feestje. Feta doet in deze opgave € 16,20 per kilo. De helft van die prijs is linksboven nog op de tekening van Ouiam te zien (fig.2). Is dat stukje niet $\frac{1}{5}$? Nee. Ouiam tekent: je kunt de andere kilostukken ook in tweeën doen en dan zijn het er acht.

Onderwijs werkt, ook zonder dat elke fout voorkomen of verbeterd wordt! Het Tal-discussiestuk als geheel

Komen Yasmina en Ouiam in het Tal-bovenbouwdiscussiestuk 'De kern van breuken, verhoudingen, procentenen kommagetallen' voldoende aan hun trekken? Dat vragen we ons natuurlijk af. Het zou wel moeten, want de opzet van de brochure is ruim.
Raak lijkt me in eerste instantie de stellingname in het inleidende hoofdstuk 1: 'minder nadruk op procedures, meer op begrip'. De algehele aanpak van de brochure ademt ook zeker die sfeer. Al wordt mij nog niet helemaal duidelijk waar de accentverschuivingen concreet worden aangegeven, op een manier die ik in een brochure over 'Leerlijnen en Tussendoelen' zou verwachten.
De brochure stelt in hoofdstuk 2 (Samenhang) dat breuken, kommagetallen, verhoudingen en procenten allemaal zo'n beetje hetzelfde zijn, namelijk rationale getallen, maar gelukkig wordt er aan toegevoegd dat de diverse aspecten verbonden zijn met verschillende contexten of situaties. Opbouwen van een relatienet hoort er ook bij.
In hoofdstuk 3 (Kerninzichten) worden de relevante concepten afzonderlijk en in grotere diepgang besproken.
Er is ook een hoofdstuk (4) rond differentiatie; dat hoofdstuk is echter zeer algemeen en lijkt grotendeels niet specifiek voor breuken en aanverwante onderwerpen geschreven te zijn.
Van veel voorbeelden in het stuk zeg ik in eerste instantie: daar hebben Yasmina en Ouiam zeker veel aan. Functionele modellen, nadruk op begrip. Maar of hun docent een beeld krijgt van hoe hij zijn breukenonderwijs gaat organiseren, daar heb ik nog twijfel over. Kerninzichten zijn nog geen leerlijnen en tussendoelen! En tijdens het lezen ontstond ook twijfel over de aard van de aangegeven samenhangen tussen de begrippen. Daar zou ik eerst helderheid over willen hebben.
In de rest van dit artikel beperk ik me tot opmerkingen bij hoofdstuk 2 en 3 over de kerninzichten en hun wiskundige samenhangen. Een aantal standpunten in vooral hoofdstuk 2 is met pittige theoretische kruiderij op smaak gebracht. De uitwerkingen in voorbeelden in hoofdstuk 3 dienen de soep echter vaak wat minder heet op. Maar op de discrepanties tussen de algemene uitgangspunten van de brochure en details in de voorbeelduitwerkingen wil ik niet nader in gaan. Ik wil vooral enig tegenwicht bieden tegen centrale stellingnames in de brochure. Het gaat mij vooral om:

a het gebruik van het begrip 'wiskundig object';
b het feit dat de samenhang van het gehele gebied gelegd wordt in het begrip 'rationaal getal';
c het gebruik van het begrip 'relatief getal'.

Mijn kritiek in een notedop is dat gebruik van het begrip 'wiskundig object' verwijst naar een filosofie van de wiskunde, die niet goed aansluit bij het dagelijks gebruik van getallen en breuken 'op straat'. Ik geef daarbij een korte schets van een alternatieve opvatting die op een minder hierarchische visie van wiskundige kennis is gebaseerd.
De samenhang van het wiskundig object in kwestie, namelijk het rationaal getal, lijkt me slechts uiterlijke schijn. Belangrijke verschillen tussen deelgebieden blijven nu buiten beeld. Ik probeer dit duidelijk te maken met een analyse van simpele voorbeelden van breukgebruik, zoals dat in de met reken- en wiskundige termen verrijkte omgangstaal verschijnt. Daarbij blijkt dat het 'benoemd getal' en 'relatief getal' onderscheiden kunnen worden en zelfs op verschillende manieren bij breuken, procenten en kommagetallen.
Het thema 'verhoudingen' verschilt in veel opzichten essentieel van de andere drie deelgebieden; ik ga daar apart, maar gezien de ruimte, slechts kort op in.

2 De mythe van het wiskundig object

Twee citaten uit de brochure:

> En ook hier moet de overstap gemaakt worden van benoemd getal naar *wiskundig object*. (pag.10)

> Een getal wordt een *wiskundig object* wanneer het zijn betekenis niet meer ontleent aan contexten, maar aan getalrelaties. (pag.16)

De notie 'wiskundig object' is een mooie illustratie van het platonische begrip 'Idee'. 'Echt' bij Plato zijn niet zaken als wagenwiel, granaatappel en gouden ring, maar wel het eeuwige en onveranderlijke 'Idee Cirkel'. Al het aardse is slechts voorbijgaande schaduw van zulke Ideeën. Plato onderscheidt geheel in dezelfde lijn expliciet twee soorten getallen: die van de ambachtsman en die van de filosoof. Die van de filosoof zijn de echte die een universele eenheid hebben en onthecht zijn van al hun aardse schaduwen; de schaduwen waar de ambachtsman zich mee bezighoudt zijn getallen die steeds een andere eenheid hebben.
In de terminologie van Tal: wisselend benoemd zijn; voor de duidelijkheid voeg ik er aan toe, dat Plato niet (zoals de Tal-redactie bij 'wiskundig object') het 'ideale getal' ziet als ontwikkeld door abstractie uit het dagelijks gebruikte benoemde getal. Plato's leerling Aristoteles nam na zijn twintigjarige scholing bij de grote meester afstand van deze visie. Hij karakteriseerde Plato's 'Ideeën' als spoken en weigerde begrippen als cirkel en getal los te maken van de materiële objecten. Het is niet moeilijk in de geschiedenis na te gaan dat beide beelden van de wiskunde zijn blijven bestaan en hun nut hebben bewezen in respectievelijk de zuivere en de toegepaste reken- en wiskunde. En dat ze ook tot nog andere filosofieën van de wiskunde aanleiding hebben gegeven.
De werkelijke situatie van de praktiserende rekenaar is natuurlijk veel complexer dan de tweedeling doet vermoeden: die verenigt bijna voortdurend beide visies.

Voor ons is echter de bestaansvraag van de zogenaamde wiskundige objecten minder belangrijk dan het feitelijk gebruik van 'wiskundig object' in de brochure. Daar wordt abstractie van 'twee-wielen' naar 'twee-zondermeer' gezien als een begripsontwikkeling die nagestreefd moet worden. Het hangt er maar van af, denk ik, voor wie dat goed is en wanneer.
Op zeker moment wordt met 'pure getallen' gewerkt, los van de fysieke aanwezigheden. Maar spoedig daarna worden die pure getallen gebruikt om toch over de natuur en de dingen te spreken, bijvoorbeeld als we de getallen gebruiken bij de vaknummering op een kaart. De kaart en zijn vakindeling kunnen we dus mogelijk herkennen als een rooster met wiskundige eigenschappen, maar de kaart is ook bron voor gedachten aan afstand, lengte-benoemde getallen en vandaar mogelijk weer getal-op-zich. Getalbegrip, zo gezien, is een heen en weer bewegen tussen situaties en begripslagen in en heeft meerdere richtingen, niet alleen die opwaarts naar het hoge eindpunt 'wiskundig object' gaan. Ik zou dan ook eerder zeggen dat de onbenoemde getallen een van de vele stammen in getallenland zijn, waar ook de aantal-getallen, maat-getallen, datumgetallen en enzovoort-getallen leven.
In dit kader lijkt me het begrip 'analogie' van belang. We rekenen en denken met aantallen dropjes, hoeveelheden kaas en afgelegde afstanden steeds op dezelfde manier. Omdat er samennemen is van dropjes en hoeveelheden kaas dat tot optellen van (benoemde) getallen leidt, is de op analogie gebaseerde conclusie dat het met afstanden ook wel lukt. Van de ene toepassing van getallen naar de ander, direct dus.
Analogie is wat Plato ons wil ontnemen, die wil ons liever in zijn hemel van wiskundige objecten opnemen, maar analogie is het zout in de pap van het dagelijks redeneren. Analogie-redeneren moet kritisch worden gedaan, op grond van wat, zwaar gezegd, de fenomenologische analyse van de context heet. Voorbeeld: twee druppels water geven samen één druppel als we ze samenvoegen. Binnen zo'n minicontext is het aardig even te piekeren wat er mis is aan dit bewijs van '1 + 1 = 1'en wat er aan gedaan kan worden. (Veel leerlingen hebben er trouwens veel lol in je deze domme dingen even uit te leggen.)
De Tal-brochure (pag.7) omschrijft het toepassen van het relatienet in contextsituaties als een vertaalprobleem:

1. Het vertalen van het contextprobleem naar een rekenprobleem.
2. Het oplossen van dit rekenprobleem door gebruik te maken van getalrelaties en algemene procedures.
3. Het terugvertalen van de oplossing naar de context.

De drieslag is het gevolg van de keuze wat betreft de aard van de wiskundige objecten. Er hangt een schijn van wiskundige exactheid over; een schijn, want er moet in dit theoretisch model tweemaal vertaald worden. In het analogiemodel, dat veel dichter staat bij het natuurlijke situatie-nabije redeneren is dat niet zo en wordt gewoon gerekend met benoemde getallen. Daar is niets mis mee, we doen het dagelijks met geld, met tijd en de kaas op onze boterham.
De hoofdtegenwerping tegen mijn aanval op 'het wiskundig object' is natuurlijk punt 2 van de aangegeven drieslag. Dat is het gebied waar de rekenkundige bewerkingen worden uitgevoerd. De betrekkelijk onbewezen vooronderstelling is hier dat alleen in dat gebied echt gerekend kan worden; verwezen wordt naar hetzelfde uitgangspunt in de Tal-brochure over gehele getallen. De grote vraag nu is of dat ook zo is bij 'breuken'.
Als we met breuken werken, bijvoorbeeld met de relatie $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$, dan wil ik best aannemen dat de impliciete $1 + 2 = 3$ gebaseerd is op relatiekennis van gehele getallen, wiskundige objecten dus. Maar wat de afhandeling van de noemers betreft, zou ik de oriëntatie op deelsituaties en breuken toch maar levend houden en niet propageren dat we het hebben over abstracte rationale getallen. We zien dat de wiskundige objecten (1, 2 en 3) hun rol spelen in een situatie die ook met andere middelen (verdeelsituaties) beschreven is. Dat is precies de complexiteit van de zaken en nadruk op de 'overgang' naar 'wiskundige objecten' verdoezelt dat.
Kijk naar Yasmina in de observatie in het begin.
Bij 12 = 3 * 4 gebruikt ze kennis van getallen, zuiver als getallen. Bij het verdelen zelf is het kaas en geld wat de klok slaat. Er worden kleine fouten gemaakt in de sfeer van het benoemen van resten kaas, maar feitelijk redt de context alles en ontstaat er waarneembaar wat meer begrip (nee, geen $\frac{1}{5}$!). Dat wil zeggen, die context, de deelsituatie, is de steun en zonder die context zie ik de toekomstige breukenmanipulaties van Yasmina en Ouiam somber in.

De gang naar de wiskundige objecten lijkt vaak verbonden te zijn met de gang naar 'wiskunde op zich', onafhankelijk van een of ander reëel nut. Ik denk dat dat ook een misverstand is. Freudenthal (1984) wijst in zijn 'Mathematics as an Educational Task' expliciet het standpunt af dat zonder axiomatiek geen exacte redeneringen mogelijk zouden zijn. Daar ging het om meetkunde; voor het onderhavige gebied zou ik het graag overnemen: ook binnen de wereld van de benoemde getallen (en breuken) is zuivere wiskundige activiteit mogelijk en wenselijk. Hoeveel handen met acht pepermuntjes van een halve centimeter dik is nodig om een rol van twaalf centimeter te maken? In zo'n vraagstelling ga je niet klagen over onnauwkeurigheden en benaderingen, maar werk je toch met benoemde getallen en redenen en reken je 'exact'.

D. Tall en E. Gray (1994) hebben gepleit voor benoeming van iets dat zowel wiskundig 'object' (of concept) is als 'proces': een procept. Een van hun voorbeelden is de breuk. Een breuk als $\frac{5}{13}$ vertelt een verhaal. Hier moet iets in dertienen zijn verdeeld en hebben we er vijf stukjes van, of er zijn vijf ietsen gezamenlijk in dertienen

gedeeld. Het resultaat is $\frac{5}{13}$ en het proces is als het ware nog enigszins zichtbaar.
L. Streefland (1991) gebruikt al de term verdeelsituaties. Hij benadrukte het nog zichtbare verschil in contextsituaties als $\frac{6}{8}$ en $\frac{3}{4}$ bij het verdelen van zes of drie pizza's in achten of vieren. Processen verschillen, resultaathoeveelheden zijn gelijk, dat is juist de waardevolle kennis die rekenen met breuken ondersteunt.
Freudenthal (1984) laat precies hetzelfde zien en geeft er het verschil tussen breuk en rationaal getal vorm mee.
De Tal-brochure legt de nadruk op het bereiken van het 'wiskundig object', het (rationale) getal. Bedoeld is dat een breukrelatie als $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ los moet komen van de realisatie in chocolade, pizza's of iets ander eetbaars. Het stoffelijk karakter moet als het ware verdwijnen. Verwijnt daarmee ook niet het karakter van de verdeelprocessen? Is dat wel zo nastrevenswaard, didactisch gezien? In de brochure tref ik weinig in de richting van een antwoord op mijn zorgen, terwijl de hier genoemde bronnen toch vast niet de enige zijn die dit thema aan de orde stellen.

3 Rationale getallen?

Van de kant van de wiskunde uit gezien is hier nog iets vreemds aan de hand. 'Rationaal' staat in de wiskundige praktijk wat getallen betreft altijd tegenover irrationaal. Irrationaal is oorspronkelijk een onderscheidend begrip dat voor verhoudingen geschapen is: de diagonaal en zijde van een vierkant hebben bijvoorbeeld een irrationale verhouding. Letterlijk: hebben geen verhouding. Waarmee in de vroege dagen van Pythagoras bedoeld is: hebben niet de verhouding van twee gehele getallen. Rationaal is: hebben wel een verhouding als van twee gehele getallen.
De lengte '6' heeft wel een gehele verhouding met de lengte '1'. Daarom is in de wiskunde '6' een rationaal getal. Blijkbaar is niet alles wat in de wiskunde rationaal getal heet een wiskundig object dat verkregen wordt uit generalisatie van breuken.
De wiskundige constructie van 'rationaal getal' is eerder op te vatten als iets dat het tegenovergestelde van generalisatie is. In het kort komt het er op neer dat de wiskundige constructie doet alsof er een 'getal' is, dat in het lege vakje hier 'precies past': $\square * 7 = 13$. We willen graag dat dit nieuwe ding ook past in $\square * 14 = 26$, anders zou rekenen ermee wel een rare zaak worden en afwijken van wat we al weten van gewone getallen.
De rationale getallen zijn een geconstrueerd systeem van 'invulantwoorden' op eerder onmogelijke vermenigvuldigopgaven. Zo'n antwoord 'heeft' geen teller of noemer. De teller of noemer zou bij een specifiek invuloefening horen, en we willen juist van die specificatie af; een hele serie vergelijkingen krijgt één antwoord toegewezen. Bij breuken is het net andersom, daar is de specifieke deelsituatie nog zichtbaar.
$\frac{13}{15}$ is een breuk met teller en noemer. Het rationaal getal dat 'antwoord' is voor onder andere $\square * 13 = 30$ kan hoogstens gerepresenteerd worden door de breuk $\frac{13}{15}$, het is zelf juist geen breuk.

4 Een relatienet. Maar welk?

In de brochure is een relatienet een net van bij de leerlingen parate samenhangen tussen wiskundige objecten, de rationale getallen. We zullen allemaal wel de telrelaties:

1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3, 3 + 1 = 4

in het relatienet van alle leerlingen willen hebben, en voor de breuken ook wel talige verbanden als:

twee halven maken een hele

en:

de helft van de helft is een kwart.

Vast ook wel:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

en later misschien:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

en mogelijk in 6-VWO kennis van het hele patroon waar deze laatste twee het begin van zijn. Anders gezegd: relatienetten, dat is mooi. Maar ik wil geen telefoonboek van losse feitjes, ik wil een relatienet dat groeit en een samenhangende structuur is. De definitie in de brochure is erg kaal:

> De term relatienet wordt gebruikt om te refereren naar een netwerk van getalrelaties. Die ontstaan door relaties tussen getallen in contextsituaties te generaliseren. (pag.72)

Waarover gegeneraliseerd wordt is hier niet duidelijk uit deze zin, maar in de rest van de brochure wel: over de contexten, om daar los van te komen, naar de wiskundige objecten toe.
Het 'telefoonboek' wordt niet bedoeld door de Tal-auteurs, want zoveel kunnen we niet 'paraat' houden:

> Op een gegeven moment is de grens echter bereikt, want je kunt niet alle relaties tussen alle mogelijke breuken paraat hebben. Net als bij de natuurlijke getallen moet er op een gegeven moment een overstap gemaakt worden naar procedures. (pag.12)

Op een of andere manier zint mij het woord 'overstap' niet. Het lijkt er op of er een zwart-wit onderscheid te maken valt tussen wat onthouden wordt en wat procedureel uitgevoerd wordt. Ik denk even aan Yasmina: 'Omdat ik vermenigvuldigen ken: 12 = 4 keer 3.' Mooi dat haar onvolmaakte taalgebruik kennen en kunnen op een hoop gooit, want die zijn hier een geheel. Het relatienet moet ook geschikt zijn om procedureel werken aan

te zetten en te ondersteunen. Docenten voortgezet onderwijs gebruiken vaak steuntjes uit het relatienet van getallen om formeel breukwerken te ondersteunen of te vermijden.
Bekend is het oplossen van x uit de vergelijking

$$\frac{14,2}{x} = 23$$

VWO-5 leerlingen (van nu) herkennen - als dat aangereikt wordt - wel het trio:

$$\tfrac{6}{2} = 3;\ \tfrac{6}{3} = 2;\ 2 \,.\, 3 = 6$$

Het is wel een relatie van relaties, die hier aan het werk is. Dat is precies wat van belang is, het relatienet ondersteunt dan ook de samenhang tussen getallen met een sleutelvoorbeeld. Oproepbare structuur in relatienetten dus, en niet alleen parate kennis. Parate kennis bij sommige breukrekenaars is zowel 25% = $\frac{1}{4}$ als 25% = $\frac{1}{25}$. Vaak gekozen op grond van andere getallen in de verschillende situaties.
De Tal-brochure definieert het relatienet in termen van wiskundige objecten. Gebruik van de relaties moet ook verankert zijn in verbanden onderling en parate voorbeelden van toepassingen van benoemde getallen. Maar, laat het gezegd zijn, ook bij dit onderwerp lijkt de Tal-brochure in de uitwerking van de voorbeelden vaak veel rijker dan in de wat principieel aandoende theoretische omschrijvingen.

5 Wat is een relatief getal?

Uit de brochure (pag.35):

> Breuken zijn in contexten eigenlijk altijd relatief in de zin dat ze naar objecten of hoeveelheden verwijzen.
> Zo heeft de breuk $\frac{3}{4}$ in het eerdergenoemde voorbeeld van de benzinetank een dubbele betekenis, daar $\frac{3}{4}$ verwijst naar 30 van de 40 liter benzine. Maar ook in eenvoudiger gevallen zijn breuken relatief. Een breuk als $\frac{1}{4}$ staat in contexten altijd voor $\frac{1}{4}$ van iets; het staat voor $\frac{1}{4}$ reep, $\frac{1}{4}$ pizza of $\frac{1}{4}$ meter. We spreken in dit verband daarom van benoemde getallen.

Relatief en benoemd worden hier gelijkgeschakeld. Elders is sprake van 'het relatieve karakter van breuken, procenten en kommagetallen' (pag.27). Hier wordt over een paar onderscheidingen heen gelopen. Principieel punt is dat de wiskundige objecten (dus de totaal kaalgeplukte rationale getallen) niet relatief of absoluut 'zijn', maar dat getallen in allerlei situaties op een relatieve of absolute manier 'gebruikt kunnen worden'.
Een kleine verkenning rond '$\frac{3}{4}$ kilo kaas' helpt mogelijk de zaken wat beter in kaart te krijgen. Met extra haakjes geef ik hier aan wat de samenhangen in enkele uitdrukkingen zijn. We bedoelen met:

$\frac{3}{4}$ kilogram kaas

altijd:

($\frac{3}{4}$ kilogram) kaas.

De uitdrukking:

$\frac{3}{4}$ van (een kilogram kaas)

beschrijft iets anders, al is de hoeveelheid kaas dezelfde. In het eerste geval is ($\frac{3}{4}$ kilogram) evident een *maataanduiding*, in het tweede geval is de $\frac{3}{4}$ een beschrijver van het deelproces dat het kilogram kaas in onze gedachten ondergaat.
Als het waar was dat het kommagetal 0,75 gelijkwaardig was aan de breuk $\frac{3}{4}$, zouden we de uitdrukkingen:

(0,75 kilogram) kaas

en:

0,75 van (een kilogram kaas)

beide tegenkomen. Maar dat is niet zo. De 0,75 wordt steevast alleen in de maatsituatie gebruikt en de '$\frac{3}{4}$ van' in de verdeelsituatie.
Nog overtuigender wordt de kritiek op de gelijkschakeling van breuken, kommagetallen en procenten als we '75%' invullen in beide gevallen:

(75% van een kilogram) kaas

en:

75% van (een kilogram kaas)

Kortom: er zijn verschillen en de constatering dat alles 'relatief' is een loze kreet. Willen we ($\frac{3}{4}$ kilogram) echt lezen als een aanduiding van een gewicht in relatie tot een gewicht van één kilogram? Dat lijkt me toch wel erg pedant; $\frac{3}{4}$ kilogram is één geheel, namelijk een maataanduiding. Het is in '$\frac{3}{4}$ kilogram kaas' een 'absolute' maataanduiding, want de gebruiker van deze uitdrukking wijst niet op zijn behoefte aan relaties met de kilogram als eenheid, maar wil gewoon een heel bepaalde hoeveelheid kaas.
In het dagelijks gebruik zijn de breuken in de maatsituaties al lang naar het kerkhof der dode getallen verwezen en daarom is de situatie die nu volgt betrekkelijk simpel te overzien.

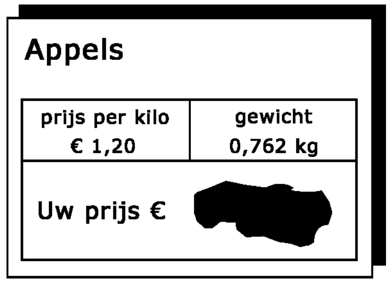
De samenvatting weerspiegelt het kleine onderzoekje van het gebruik van breuken, kommagetallen en procenten in de dagelijkse toepassingen en voegt er enkele observaties nog aan toe.
'Breuken' worden steeds minder gebruikt als hulpmiddel om absolute maten aan te geven; slechts de oudste breuken, die vaak bijzonder namen hebben zoals de helft, een derde en een kwart, houden het in de matenwereld nog even vol. Breuken worden in verdeelsituaties veel meer gebruikt.
'Kommagetallen' zijn de maataanduiders bij uitstek. Waren ze al in de dagen van Hammurabi de Babyloniër, al waren ze toen in de zestigtallige jas gestoken, zoals nu nog onze tijd- en hoekaanduidingen. (Het verband tussen die twee is zelfs nog te zien in het feit dat wij zowel uren als graden in minuten en seconden onder verdelen.) Kommagetallen overheersen totaal de commerciële en wetenschappelijke markt. De monopoliepositie zal nog wel bereikt worden in de niet zo verre toekomst.

De kommagetallen zouden dan ook best geïntroduceerd kunnen worden in hun natuurlijke context, die van de verfijning van de (absolute) maataanduidingen. Dat Simon Stevin van de breuken naar de kommagetallen kwam (ook in zijn notatie) is geen argument dat ook zo te doen. Eerder om nog een stap verder te gaan dan Stevin: het breukkarakter kan losgelaten worden.
Kommagetallen rollen dagelijks massaal van onze rekenmachine- en computer-displays af en maken een opmars, ook in de deelsituaties en hebben dan ook steeds vaker een relatief karakter. Maar dit is een bijrol.
‘Procenten’ worden steeds relatief gebruikt. De relatie is die ten opzichte van een expliciet of impliciet aangegeven geheel. Hun geboortegrond is de handel en de rentepercentages. Ze functioneren het beste om veranderingen of afwijkingen aan te geven ten opzichte van een verondersteld geheel, maar doen het ook goed in de deel-van toepassing. Worden echter vaak misbruikt. Er zijn makkelijk tegenvoorbeelden uit de praktijk bij deze indeling te geven. Aanduidingen als 400 procent halen bijvoorbeeld geregeld de pers. Laten we in de rekendidactiek niet alle missers uit de dagelijkse omgangstaal een plaats geven.

Het gevaar is dat we bij de wiskundige analyse van een begrip als percentage toch tot uitersten willen gaan, die niet echt kerninzichten zijn. Een inmiddels klassiek voorbeeld is de vraag of het uitmaakt als je 10 procent korting krijgt en de prijs daarna met 20 procent verhoogt, of dat het in omgekeerde volgorde gebeurt. Werken met de factoren 0,9 en 1,2 zou duidelijk moeten maken dat het niets uitmaakt. Leve het multiplicatieve karakter van procenten! Jawel, maar de hele operatie van het vervangen van geheel minus 10 procent van het geheel door 90 procent van het geheel lijkt me al een niet te onderschatten actie waarvan het begrijpen niet bij alle kinderen zal slagen. Ik zou deze thematiek liever oppakken met wat sterkere middelen: algebra in klas 2- of 3-VWO. Daar kan het oppervlaktemodel heel effectief bij worden ingezet.
Bovendien is het in de praktijk van belang dat procenten wel een ‘enigszins’ additief karakter hebben als het om schattingen gaat. Als we iets met 2 procent vergroten en daarna het geheel nog eens met 3 procent dan is het schattingsinzicht dat we met 5 procent totaal vergroten vaak veel nuttiger dan een verre decimaal.
Dat is ook de reden waarom bij meetfouten deze vuistregel geldt: relatieve fouten kun je optellen.

6 Permanentie van bewerkingen

Het toeval wil dat Yasmina en Ouiam een probleem kregen voorgezet dat (met andere getalwaarden) precies over eenkomt met een voorbeeld uit de brochure. De vlek op de bon. De leerlingen krijgen de vraag om een redelijk precieze schatting te maken van de prijs van de appels (fig.3). De brochure merkt op dat de leerlingen niet tot vermenigvuldigen komen. Hetzelfde gebeurde bij Ouima en Yasmina. In de klas werd het probleem aangepakt met een verhoudingstabel. Daarin stond een 1000 voor grammen boven de 1,20 euro. De 1000 werd prompt door 1000 gedeeld, de ontstane 1 (gram) met 762 vermenigvuldigd. De rekenmachine mocht gebruikt worden. .



figuur 3

Wat er mis is, is dat bij het aldus aanpakken van het probleem gereageerd wordt op de aard van de getallen in de opgave. Dat lost het niet kiezen voor vermenigvuldigen niet op.
Vlak voor het klassengesprek had ik Ouima gevraagd of ze het met 3 kg wel zou kunnen. Ja, natuurlijk. Vervolgens deed ze de appelsom correct op de rekenmachine.
Is mijn aanpak intimidatie? Ik denk van niet. Op dat moment is het een kort gesprek met Ouiam en geen uitzetten van een leerlijn. In de leerlijn zou ik het inzicht dat je bij prijs-per-gewicht en gegeven gewicht moet vermenigvuldigen benadrukken en niet het onderscheid tussen de getallen. In dit artikel past dat bij mijn pleidooi voor kommagetallen als maatgetallen, bij de opmerking dat een relatienet ook een relatienet van prototypische konteksten moet zijn.
Als een leerling zo’n opgave niet aan kan, is dat niet zonder meer te wijten aan gebrekkige kennis van de specifieke getallen (kommagetallen) en ook niet aan onkunde wat betreft rekenen met kommagetallen, maar aan onvoldoende vertrouwen in kennis die er allang is: over hoe er in de situatie gehandeld kan worden. Daar moet juist de veiligheid vandaan komen: uit de betekenis van de situatie.
Kommagetallen als breuken behandelen en dan met de verhoudingstabel gaan rekenen, dat helpt echt niet.

7 Verhoudingen, een klasse apart

Om inzicht in het begrip ‘Verhouding’ te krijgen sloeg ik een oude bron op, ‘De Elementen van Euclides’. Boek 5 daarvan gaat over verhoudingen. Want verhoudingen vormen een kernthema vanaf het ontstaan van de Griekse wiskunde en zijn dat altijd gebleven. Ik hoopte op een

mooie definitie van het begrip verhouding zelf. Wat een verassing: er staat *niet* in wat een verhouding is, maar wel wordt heel precies vastgelegd wat het betekent als een paar grootheden een gelijke verhouding heeft als een ander paar grootheden. Anders gezegd, $A : B$ wordt niet gedefinieerd maar $A : B = C : D$ wel.
Dat lijkt bizar, zeker. Maar in de tekst is geen teken als ':' te zien. Het gaat echt om verbanden tussen paren grootheden en niet om zoiets als berekenen van een verhouding. Het is *echt* een definitie van gelijk-verhoudingschap en niet van een getalsmatig kenmerk van het paar A en B, dat dan met hetzelfde kenmerk van het paar C en D op gelijkheid wordt getoetst. Het idee erachter is het volgende.
Kijk wie er groter is, $7A$ of $4B$. Dat is iets wat met gelijksoortige grootheden kan gevraagd worden. Kijk nu wie er groter is, $7C$ of $4D$. Krijgen we twee keer hetzelfde antwoord (in de vorm van twee keer 'eerste is grootste', 'gelijk', of 'eerste is kleinste') dan zitten we op het goede spoor. De definitie zegt dat de paren A, B en C, D gelijkverhoudingschap hebben, als er steeds hetzelfde antwoord uitrolt, ook bij alle ander keuzen van gehele getallen voor 7 en 4. Ingewikkeld, ja. Maar een geniale vondst, die in de negentiende eeuw de basis werd voor een strenge theorie van de reële getallen. De definitie omvat moeiteloos ook irrationale gevallen.

Dit is geen stof voor het basisonderwijs. Toch is en wordt het begrip verhouding heel veel gebruikt, want het kan best zonder de theorie van Euclides. Merk dat er inderdaad altijd 'vier' grootheden deelnemen aan een verhoudingsvergelijking, ook als we zeggen dat A en B zich verhouden als 2 en 5. Dan zijn er A en B, maar ook 2 en 5. Of:

> De gewichten van de stukken ijzer verhouden zich als hun inhouden.

Twee gewichten, twee inhouden, minimaal.
De standaardopgave is de vierde grootheid te vinden als er drie gegeven zijn. Veel van de traditionele methoden ontaarden in min of meer onbegrepen regels, de regels van 'drieën', ingewikkelde kruisvermenigvuldigschema's en dergelijke. De verhoudingstabel heeft zijn waarde intussen wel bewezen, al is ook hier heel veel onbegrepen procedureel gedrag in de klas waar te nemen.
De Tal-brochure gaat wel heel ver als het begrip verhouding tot één getal, het quotient van twee getallen of maten wordt beperkt. Daarmee wordt het hele verhoudingsbegrip veralgoritmiseerd en valt er echt niets zinnigs te zeggen bij de vragen: waarom gebruiken we dat begrip eigenlijk? Deze benadering is niet te rijmen met het adagium 'Meer inzicht, minder procedures'.

De volgende beschrijving van een verhoudingsvoorbeeld is perfect.

> Bij volwassen mensen verhouden zich arm- en lichaamslengte als 3 en 8.

De armlente 60 bij lichaamslengte 160 moet dus kunnen. Hier gebruik je de 3 en de 8 om een relatie aan te geven. Er is een relatie uitgedrukt, maar daarmee zijn 3 en 8 geen relatieve getallen, Ze worden *gebruikt* om een relatie aan te leggen. Dat $\frac{3}{8}$ hier een relatief getal is, dat is niet de essentie, dat is een mogelijke algoritmische werkwijze bij verhoudingen. Volkomen gelijkwaardig met de beschrijving is:

> Bij volwassen mensen verhouden zich lichaams- en armlengte als 8 en 3.

De twee beschrijvingen kunnen zonder verwarring door elkaar gebruikt worden. Maar moeten we nu ineens de breuk $\frac{8}{3}$ gaan gebruiken?
Het hoofdstuk over 'Verhoudingen' (Freudenthal, 1984) is rijk aan analyses en voorbeelden en ontrafelt ook vele verwarringen. De Tal-brochure zou een samenvlechting van elementen uit dat hoofdstuk moeten combineren met inzichten die van later zijn: het functioneel gebruik van de verhoudingstabel. Dat lijkt me goed te doen. Het zou aantonen dat verhoudingen echt apart staan van breuken, procenten en kommagetallen samen maar, inderdaad, dat ze er wel aan verwant zijn.
Er zijn elementen uit de verhoudingswereld die in groep 2 van het basisonderwijs aan bod komen, zoals het zien van gelijkvormigheid van werkelijkheid en foto bijvoorbeeld. Er zijn elementen die beter in het VWO passen: evenredigheden van ingewikkelder vorm, zoals bij de derde wet van Kepler; bij planeetbanen rond de zon geldt:

> De kwadraten van de omloopstijden verhouden zich als de derdemachten van de stralen van de banen.

Maar of verhoudingen rationale getallen *zijn*: nee!

Literatuur

Gray, Eddie M. & David O. Tall (1994) Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 115–141.

Freudenthal, H. (1984) *Didactische Fenomenologie van wiskundige Structuren.* Utrecht: OW & OC. Rijksuniversiteit Utrecht.

Keijzer, R. e.a. (2005). *De kern van breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Wisbaakproject: http://www.fi.uu.nl/wisbaak

This paper takes a stance against some viewpoints expressed in the discussion paper 'Central concepts for fractions, proportions, percentages and decimal numbers'. Two viewpoints are scrutinised in particular: the misconception of fractions, proportions, percentages and decimal numbers being one and the same, namely rational numbers, and the idea that students at primary school level should progress from fractions used in context to rational numbers as 'mathematical objects'. This unclear theoretical veil hides the complexity of the subject and obstructs the road to practical didactics. An analysis of street language about fractions, percentages, decimal numbers also shows the inadequacy of the proposed concept 'relative number'.