PANAMA-POST

Vraagtekens bij realistisch reken-wiskundeonderwijs

M.R. Opmeer
Mathematisch Instituut, Rijksuniversiteit Groningen

Dit artikel is een kritische bespreking van het discussiestuk 'De kern van breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen' (Keijzer, Figueiredo, Van Galen, Gravemeijer en Van Herpen, 2005). De voorstellen in het genoemde discussiestuk trekken de lijn door die de afgelopen jaren in het reken-wiskundeonderwijs is ingezet, namelijk de realistische. Ik zet in dit artikel een aantal vraagtekens bij de juistheid van deze keuze.

1 Inleiding

Onlangs is er een discussiestuk verschenen van het TAL-bovenbouw team (Keijzer e.a., 2005; Keijzer & Gravemeijer, 2005; Goddijn, 2005). Het TAL-project is opgestart door het ministerie van OCenW om leerlijnen en tussendoelen te ontwikkelen voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Het discussiestuk geeft deze leerlijnen en tussendoelen niet, maar gaat over didactiek. Volgens de auteurs van het discussiestuk kunnen leerlijnen en tussendoelen niet losstaan van didactiek.[1] Er valt heel wat af te dingen op de realistische reken-wiskundedidactiek die als basis is gekozen voor het ontwerpen van leerlijnen en tussendoelen door het TAL-bovenbouw team.
In dit artikel zal ik een aantal vraagtekens zetten bij de realistische reken-wiskunde didactiek. Ik wil de lezers verder graag attenderen op Homans & Blom (2005) waarin ook door een Pabo-studente vraagtekens gezet worden bij de realistische reken-wiskundedidactiek.

2 Verbanden

Het is mogelijk om concepten als geheel getal, breuk, kommagetal, rechte lijn en driehoek te definiëren in termen van aantallen (dat wil zeggen 0, 1, 2 enzovoort). Het is niet nodig om 'de realiteit' erbij te halen om deze objecten betekenis te geven. Zodra we de aantallen geabstraheerd hebben uit de realiteit kunnen we in principe die realiteit verder buiten beschouwing laten. Ik zeg niet dat dit laatste verstandig is, maar het is wel mogelijk. In de realistische reken-wiskundedidactiek worden bovenstaande concepten allemaal 'geabstraheerd' uit de realiteit. Ik heb geabstraheerd hier tussen aanhalingstekens gezet, omdat er niet echt geabstraheerd wordt: de concepten blijven altijd heel erg verbonden met contexten. De verbanden tussen de verschillende concepten worden niet echt (en soms zelfs echt niet) gelegd. Voor de leerlingen blijven het dan ook dingen die weinig met elkaar te maken hebben. Hun ervaring in het rekenen met aantallen helpt hen dan bijvoorbeeld vaak niet in het rekenen met breuken. Breuken zijn voor hen iets totaal nieuws waar weer van voren af aan mee begonnen moet worden. Zoals ook uit het genoemde discussiestuk blijkt, is dit bewuste didactiek: het is de *bedoeling* dat breuken iets totaal nieuws zijn voor de leerling en het is niet de bedoeling dat ze hun kennis van gehele getallen gebruiken. Hierdoor is deze didactiek het spiegelbeeld van de op definities gebaseerde didactiek die hierboven kort genoemd werd. Beide zien iets belangrijks over het hoofd. De op definities gebaseerde didactiek negeert de realiteit en de realistische didactiek negeert de interne structuur.
Het is mogelijk en wenselijk om een tussenweg te vinden tussen beide extremen die recht doet aan zowel 'de realiteit' als aan de interne structuur.

3 Verwarring

Ik zal u met behulp van twee voorbeelden proberen uit te leggen wat er gebeurt als men de interne structuur van de wiskunde geheel buiten beschouwing laat.
In het discussiestuk wordt gezegd dat breuken en kommagetallen 'eigenlijk hetzelfde' zijn. Wat bedoeld wordt met het woord 'breuk' is nog wel te achterhalen. Het is wat in de wiskunde soms 'breuk' maar meestal 'rationaal getal' genoemd wordt. In de wiskunde kennen we het begrip 'kommagetal' niet en ik vind van dit begrip geen omschrijving in de begrippenlijst van het discussiestuk.

Ik zal dus maar moeten raden wat er mee bedoeld wordt. Het zou kunnen dat met kommagetallen bedoeld wordt een uitdrukking als 100,21 met een eindig aantal symbolen achter de komma. Maar dan is $\frac{1}{3}$ geen kommagetal en gaat 'breuken = kommagetallen', zoals in het duscussiestuk wordt beweerd, dus niet op. Het zou ook kunnen dat er oneindig veel symbolen achter de komma mogen staan. Dan is $\frac{1}{3}$ wel een kommagetal, maar bijvoorbeeld π ook. Dus dan gaat 'breuken = kommagetallen', zoals in het discussiestuk wordt beweerd, eveneens niet op. Het is wel mogelijk kommagetallen zo te definiëren dat 'breuken = kommagetallen' wel opgaat ('uiteindelijk periodiek' is het toverwoord; een voorbeeld: het kommagetal dat bij $\frac{2}{7}$ hoort begint na de komma met 2857 en daarna wordt steeds 142857 herhaald), dit is al een paar honderd jaar bekend en wordt onder andere beschreven in het boek van Beukers (1999, hoofdstuk 10).
Ik krijg sterk de indruk dat het woord 'kommagetal' geen precieze betekenis heeft en dat het in het onderwijs afwisselend gebruikt wordt in alledrie de vormen die ik hierboven genoemd heb (eindig aantal symbolen achter de komma, oneindig aantal symbolen achter de komma, uiteindelijk periodiek). De leerling moet maar raden welke van de betekenissen nu weer bedoeld wordt. Dit soort taalgebruik is niet alleen schadelijk voor het leerproces van de leerling, maar geeft hem of haar ook een totaal verkeerd beeld van de wiskunde, waar alles juist een hele precieze betekenis heeft.

Een ander voorbeeld van slordige definities is te vinden in de reactie van Goddijn (2005) op het discussiestuk. Hij geeft in navolging van bijvoorbeeld Gray & Tall (1994) en Streefland (1991) het volgende als 'definitie' van breuken. Volgens hen vertelt een breuk een verhaaltje. Het verhaaltje bij $\frac{5}{13}$ is bijvoorbeeld als volgt:

> Hier is iets in dertienen verdeelt en we hebben er vijf stukjes van, of er zijn vijf ietsen gezamenlijk in dertienen gedeeld. (Goddijn, 2005, pag.32-33)

Zoals u ziet zijn dit eigenlijk twee verhaaltjes, dit is het eerste mogelijke punt van verwarring voor de leerling. $\frac{5}{13}$ en $\frac{10}{26}$ zijn nu *verschillend* want in de ene situatie hebben we vijf stukjes en in de tweede tien. Goddijn maakt hier in navolging van Streefland ook een heel punt van, maar toch zijn ze ook *gelijk* omdat de 'resultaathoeveelheden' gelijk zijn. Weer twee punten van mogelijke verwarring: 'verschillend, maar toch gelijk' en het wel zeer mysterieuze begrip 'resultaathoeveelheid'. Wat is het verhaaltje bij $\frac{15}{13}$? Is nu iets in dertienen verdeeld en hebben we van de resulterende dertien stukjes er vijftien gekregen? En hoe zit het met het verhaaltje bij $-\frac{5}{13}$? Wat betekent $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$? Hoe vermenigvuldigen we stukjes met elkaar?
Een van de doelen van het realistisch reken-wiskundeonderwijs heet te zijn dat leerlingen kritisch gemaakt worden. Dit doel lijkt echter niet bereikt te worden. Leerlingen worden geconditioneerd om op bepaalde momenten kritisch te zijn en op andere momenten dingen voor zoete koek te slikken.
Het is niet zo moeilijk om breuken te definiëren in termen van gehele getallen. Wanneer dat gedaan wordt dan is tenminste duidelijk waar we het over hebben. Vervolgens kan men breuken kritisch beschouwen en kijken naar bijvoorbeeld de relatie met kommagetallen en de relaties met de realiteit.
De interne structuur van de wiskunde is, ook op de basisschool, belangrijk en moet niet veronachtzaamd worden.

4 Contextsituaties

Contextsituaties zijn heel belangrijk in de realistische reken-wiskundedidactiek; allesoverheersend zelfs. Zoals ook geschreven wordt op pagina 13 van het discussiestuk bestaat het oplossen van een contextprobleem uit drie fasen:

1 Het vertalen van het contextprobleem naar een rekenprobleem.
2 Het oplossen van dit rekenprobleem.
3 Het terugvertalen van de oplossing naar de context.

Fase 1 is altijd de meest lastige fase van een contextprobleem. De tweede fase is in zekere zin de makkelijkste, het oplossen van het rekenprobleem kun je gewoon met standaardprocedures doen, áls deze tenminste gegeven zijn en genoeg geoefend zijn. In fase 3 is het belangrijk om na te gaan of de oplossing 'redelijk' is in de context. Lijkt dit niet het geval te zijn dan is er waarschijnlijk ergens een fout gemaakt - de kans is groot dat dit tijdens het vertalen is gebeurd - en moet alles nog even goed nagelopen worden.

De moeilijkste en meest tijdrovende fase is de eerste. Het voorstel uit het discussiestuk om de didactiek nog 'realistischer' te maken door alle sommen in een uitgebreide context in te bedden, zal dus zeer tijdrovend zijn. Een van de redenen voor de waargenomen overladenheid in het huidige reken-wiskundeprogramma is in mijn ogen nu juist dat een groot gedeelte van de sommen aangekleed is. Het voorstel zal de overladenheid alleen maar vergroten. Door verstandiger om te gaan in welke gevallen contexten te gebruiken en in welke niet, valt de waargenomen overladenheid wél te bestrijden. Het is twijfelachtig of de overstap naar alleen contextproblemen de leerlingen helpt om contextproblemen efficiënter op te lossen. De vertaalfases zullen voor verschillende contextproblemen altijd verschillend zijn en altijd veel tijd vergen. Hier valt wel iets aan te oefenen, maar niet al te veel. Fase 2 zal echter voor veel contextproblemen feitelijk hetzelfde zijn. Hier valt wel op te oefenen en dit hoeft niet altijd in de vorm van een contextprobleem te gebeuren. De geschiedenis van het realistisch wiskundeonderwijs lijkt ook aan te tonen dat het niet erg efficiënt

is: de huidige kerndoelen voor de onderbouw van het voortgezet onderwijs werden vroeger voor een groot deel op de basisschool al bereikt.
Een ander kritiekpunt op het overmatige gebruik van contextproblemen is het volgende. Wordt in contextproblemen niet vooral algemene kennis getoetst en geen reken-wiskundige kennis? In het verlengde hiervan: is realistische wiskunde vooral iets voor de blanke middenklasse en vormt het een zeer sterk selectiemechanisme op sociale of etnische afkomst? En dit terwijl wiskunde waarschijnlijk het meest multiculturele menselijke product is en in het verleden veelal een emancipatiemiddel was? Ik ben bang dat het antwoord op al deze vragen 'ja' is en dat realistische wiskunde (ongetwijfeld onbedoeld) zeer discriminerend is.
Nu we op het punt van onderscheid aan zijn beland nog een aantal kritische kanttekeningen hierover.
Vraagt het zelf ontdekken niet te veel van de zwakkere leerlingen, hebben zij niet meer aan standaardprocedures? Vraagt het altijd werken in contextsituaties qua wiskunde niet te weinig van sterkere leerlingen, ontwikkelen zij daardoor bepaalde vaardigheden niet te weinig? Is realistische wiskunde iets voor de (net iets beter dan) gemiddelde leerling en doet het de extremen te kort? Dat zijn vragen die in het discussiestuk niet gesteld worden. Differentiatie wordt bekeken vanuit de realistische rekenwiskundedidactiek. Dat die didactiek mogelijk ongeschikt is voor de extremen wordt niet overwogen.
Er wordt betoogd dat er ingezet moet worden op inzicht en niet op kunnen. Blijkbaar kun je inzicht in iets hebben zonder het te kunnen. Dit lijkt mij bijzonder twijfelachtig: inzicht en kunnen gaan hand in hand, standaardprocedures helpen bij het kunnen en dus ook bij het inzicht. Zeker voor zwakkere leerlingen bieden standaardprocedures een belangrijke houvast.
Contextsituaties zijn, met andere woorden, weliswaar belangrijk, maar niet zaligmakend.

5 Analogie

Goddijn (2005) is het overigens niet eens met het oplossen van contextproblemen via het bovenstaande driefasenmodel. Hij is voorstander van het analogiemodel. Hierbij moeten nieuwe contextproblemen opgelost worden door in te zien dat ze 'eigenlijk hetzelfde zijn' als eerder opgeloste contextproblemen. Het analogiemodel is echter geen goed model om contextproblemen op te lossen. Dit valt eenvoudig in te zien door het analogiemodel ook op te splitsen in drie fasen.

1 Vertaal het contextprobleem in een ander contextprobleem.
2 Los dit contextprobleem op.
3 Vertaal het antwoord terug naar de oorspronkelijke context.

U ziet dat we in fase twee met een soortgelijk probleem zitten als oorspronkelijk. Misschien 'zien' we nu echter de oplossing wel. Als dit zo is hebben we, na fase drie, een antwoord voor ons oorspronkelijke contextprobleem. Deze moet dan in die oorspronkelijke context nog wel gecontroleerd worden op zinnigheid.[2] Bij problemen die niet heel eenvoudig zijn, zullen we de oplossing in de aangepaste context waarschijnlijk niet geheel 'zien', maar misschien wel gedeeltelijk. Het gedeelte dat we in de aangepaste context niet op konden lossen, kunnen we dan via analogie op proberen te lossen. Zo krijgen we een derde contextprobleem, of een vierde, of een vijfde. De hoop is dan dat dit ooit stopt en we met een antwoord voor het oorspronkelijke probleem tevoorschijn komen. Er zijn nu echter zoveel vertaalslagen geweest - en zoals u weet gaat bij vertalingen altijd wat verloren - dat het antwoord wel eens heel onzinnig kan zijn.[3] Dit is nu precies de reden dat analogieredeneringen in de wetenschap niet gehouden worden: bij problemen die ook maar enigszins complex zijn, levert het vaak niet het goede antwoord op. Het driefasenmodel werkt wel omdat in fase 2 complexe redeneringen gehouden kunnen worden zonder verlies van informatie. Dit is de kracht van de wiskunde. Het driefasenmodel is dan ook wat in de wetenschap gebruikt wordt en wiskunde wordt niet voor niets soms 'de dienstmaagd van de wetenschap' genoemd.
Alhoewel Keijzer c.s. volgens mij het goede model hebben voor het oplossen van contextproblemen, zal de daar gepropageerde didactiek toch stuiten op dezelfde problemen als die bij het analogiemodel. Dit komt door de visie op het opdoen van wiskundige kennis, vaardigheden en inzichten. Volgens de gepropageerde realistische reken-wiskundedidactiek moeten kennis, vaardigheden en inzichten uit contextsituaties geabstraheerd worden. Het lijkt hierbij niet de bedoeling te zijn dat ze geëxpliciteerd worden in de zin dat er precieze definities gegeven worden (dit hebben we gezien bij de behandeling van het concept 'kommagetal'). Feitelijk wordt er dus niet echt geabstraheerd. Als het rekenprobleem in fase 2 op deze manier opgelost moet worden, dan gebeurt dat dus min of meer door analogie. Dan hebben we dus te maken met het analogiemodel voor het oplossen van contextproblemen, met alle kwalen van dien.
Het analogiemodel heeft veel weg van de manier waarop de Babyloniërs wiskunde deden, het driefasenmodel zou men 'Newtoniaans' kunnen noemen. Aan de grote stap vooruit die in de wetenschap gemaakt is sinds de Babyloniërs, wordt door de realistische reken-wiskundedidactiek voorbijgegaan. Het niveau van de Babyloniërs is blijkbaar goed genoeg voor de Nederlander van nu.

6 Bèta

Na de basisschool komt het voortgezet onderwijs en daarna voor bijna de helft van de leerlingen het hoger

onderwijs. Het is net als met gif in de voedselketen, de dieren aan de basis van de voedselketen hebben niet zo veel last van het gif, aan de top van de voedselketen hoopt zich in verloop van tijd echter zoveel gif op dat de dieren aan de top het niet overleven. Dit massale uitsterven heeft op den duur ook zijn repercussies aan de basis van de voedselketen. Nederland heeft internationaal gezien een bijzonder laag aantal bèta's, de berichten hierover zullen u niet ontgaan zijn. Opvallend is dat met de geleidelijke opmars van het realistische reken-wiskundeonderwijs het aantal bètastudenten geleidelijk gedaald is. Het is verleidelijk hier een causaal verband te zien. Ik kan dit niet hard maken, maar het heeft er alle schijn van dat dit causale verband er inderdaad is.
Realistisch reken-wiskundeonderwijs is waarschijnlijk niet de oplossing van het bèta probleem, maar een van de belangrijkste oorzaken van dit probleem.

7 Conclusie

De realistische reken-wiskundedidactiek is in zijn wezen extremistisch. Er zijn vraagtekens te zetten bij de uitgangspunten van deze didactiek, in dit artikel heb ik er een paar geplaatst. Ik claim hierbij overigens geen originaliteit, anderen hebben eerder soortgelijke vragen gesteld. De versie van realistische reken-wiskundedidactiek die tegenwoordig daadwerkelijk gebruikt wordt in scholen, is nog enigszins gematigd. De voorstellen in het discussiestuk van het Tal-team komen erop neer dat een meer extremistische versie van deze didactiek geïmplementeerd moet worden. De argumentatie waarom dit nodig zou zijn, is flinterdun. Het lijkt erop dat het antwoord al bekend was en de vraag er later bij gezocht moest worden.
De realistische reken-wiskundedidactiek is feitelijk niets nieuws, het is te vergelijken met de Babylonische wiskunde van 4000 jaar geleden. In de tussentijd zijn er echter betere dingen bedacht in de wiskunde. Daar zou het reken-wiskundeonderwijs meer profijt van moeten proberen te trekken.

Noten

1 Op dit punt ben ik het met de auteurs van het discussiestuk eens. Bruikbare leerlijnen en tussendoelen zullen, in tegenstelling tot bruikbare kerndoelen, erg gedetailleerd moeten zijn. Hierdoor zijn ze feitelijk de concretisering van een bepaalde didactiek. De grote vraag is waarom het ministerie maar één set van leerlijnen en tussendoelen laat ontwikkelen. Hiermee laadt het ministerie de verdenking op zich slechts één didactiek te dulden.
2 Dit is waarschijnlijk wat Goddijn bedoeld met de zinsnede 'analogie-redeneren moet wel kritisch worden gedaan'.
3 De kritiek van Goddijn op het driefasenmodel richt zich precies op de vertaalslagen in dit model van fase 1 naar fase 2 en van fase 2 naar fase 3. Hij lijkt zich echter niet te realiseren dat er in het analogiemodel ook vertaalslagen gemaakt worden!

Literatuur

Beukers, F. (1999). *Getaltheorie voor beginners*. Utrecht: Epsilon uitgaven.
Homans, I. & K. Blom (2005). Rekenen met breuken, leren met of zonder trucjes. *Euclides*, *80*(4), 231-233.
Goddijn, A.J. (2005). Breuk, komma, getal. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, *24*(2), 30-36.
Gray, Eddie M. & David O. Tall (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 115-141.
Keijzer, R., N. Figueiredo, F. van Galen, K. Gravemeijer & E. van Herpen (2005). *De kern van breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
Keijzer, R. & K.P.E. Gravemeijer (2005). Breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen in discussie. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, *24*(2), 24-29.
Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

This paper is a critical review of the discussion paper 'Central concepts for fractions, proportions, percentages and decimal numbers', which is a part of a project initiated by the Dutch Ministry of Education to refine the 'central goals' for mathematics in elementary school. The discussion paper takes Realistic Mathematics Education as foundation for the refined version of the central goals, as does the whole project. Realistic Mathematics Education is, in my opinion, an extremist view of mathematics and is therefore not suitable as foundation for the nationally enforced refined central goals for mathematics in elementary school.