Korte geschiedenis van de zonsopgang

A. Goddijn
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Jan van den Brink heeft in 1989 samen met Theo Obdeijn een pakket ontwikkeld rond het thema ‘De langste dag’. Voor leao-leerlingen. In dit artikel wordt de beschrijving ervan afgewisseld met een beschrijving van een pakket voor goede vwo-6 ers, die ontdekken hoe ze de tijden van zonsondergang en -opgang kunnen voorspellen. Beide benaderingen doen een fors beroep op het meetkundig voorstellingsvermogen. Leerlingnabije representaties, zoals de hemelbol beschrijven als een theater en de sterrenwereld als een daarover glijdend kleed, vormen het overeenkomstige element in beide uitwerkingen. Een kladje van een vwo-leerling toont een samenvatting van de berekening. Op 27 november gaat de zon op 52 graden Noorderbreedte om 8.20 uur op en om 16.35 uur onder. Dat wijkt nauwelijks van de 'officiele tijden' af.

1 21 December 2005

Iedereen in de klas, een speciaal op beta-motivatie geselecteerde vwo-6 groep[1], weet dat het vandaag de kortste dag van het jaar is. Toch worden de getallen op het bord

8.46 16.30

pas na enige tijd herkend. Zonsop- en -ondergang! Inderdaad, vandaag, in Utrecht.

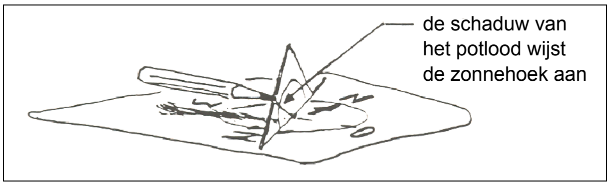
Hoe zit dat nu bij onze tegenvoeters in Nieuw Zeeland? Een kort door de bocht antwoord komt onmiddellijk uit de klas: daar gaat de zon om 8.46 onder en 16.30 op. In de klas is het dan 9.15, onze tijdzone, en ik ben nog niet fris genoeg om op te merken dat de zon toch eerst op moet om onder te kunnen gaan.
Toch is het belangrijk bij deze fenomenen met zo’n symmetrie-argument en een globale blik te kunnen werken, want de verschijnselen zijn veel subtieler dan we in eerste instantie denken en een ‘grof’ overzicht is van belang om die subtiliteiten naar waarde te schatten.
Hoe zou het volgende week zijn?
Dan duurt de dag iets langer; dus iets eerder op en iets later onder. Ik kom daarop met de feiten, nou ja, voorspellingen voor 28 december:

8.48 16.35

Dat wekt verbazing, en terecht, want nu is de ochtend-avondsymmetrie helemaal zoek. De dag duurt langer, maar begint én eindigt later. Zullen we een blok meetkunde doen rond het thema zonop-en-zononder? Dan leer je voorspellen hoe laat de zon op je verjaardag op komt, waar je ook woont, en natuurlijk waarom de zon dat zo doet. We spreken af dat in maart te gaan doen. Er is dus werk aan de winkel!

2 ‘De langste dag’ uit 1989

Samen met T. Obdeijn ontwierp J. van den Brink al in 1989 een GWA[2]-pakket voor klas 1, 2 of 3 van het leao-mavo rond daglengte en seizoenen: ‘De langste dag’. Het gaat in dit pakket eerst om het meten van zonshoogte, dit grafisch weer te geven in de loop van een dag en een jaar, het werken met periodiciteit en hoeken en met beweging en draaiing van aarde en zon. Geleidelijk komt wat meer theorievorming tot stand, maar toch bijna geheel in terminologie van leerlingen zelf, wat wel de belangrijkste karakteristiek van Van den Brinks onderwijsontwikkelwerk lijkt te zijn. Heel complex dit onderwerp? Jazeker, maar ook heel toegankelijk, met illustraties als deze voor het meten van de zonshoogte met de geodriehoek (fig1).

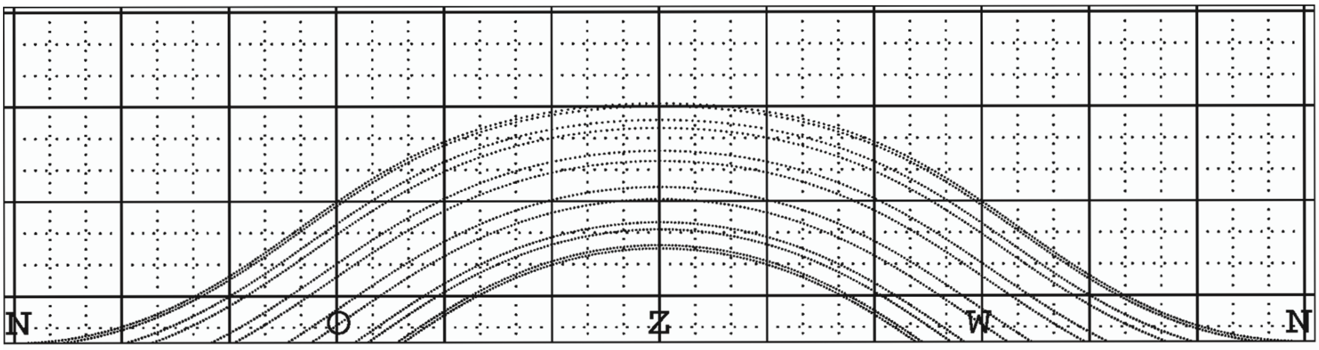


figuur 1: meten van de zonshoogte met geodriehoek

Leerling Renate doet in de docentenhandleiding uit de doeken hoe het moet (fig.2).

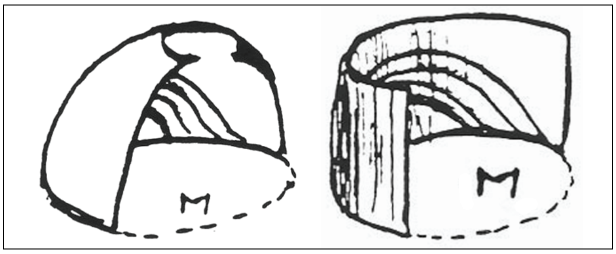
De geodriehoek moet naar de zon wijzen
met de potlood heen en weer
en de schaduw van de potlood moet bij
dan kijken hoeveel graden. nul zijn.

figuur 2: uitleg van Renate



figuur 3: zonnebanenkaart

Met de gevonden waarden, en een paar die in het boekje worden gegeven, wordt een grafiek gemaakt. Zonshoogte (in graden) wordt uitgezet tegen kompasrichting. Zo'n grafiek laat de beweging van oost-laag naar zuid-hoog en west-weer-laag goed zien.

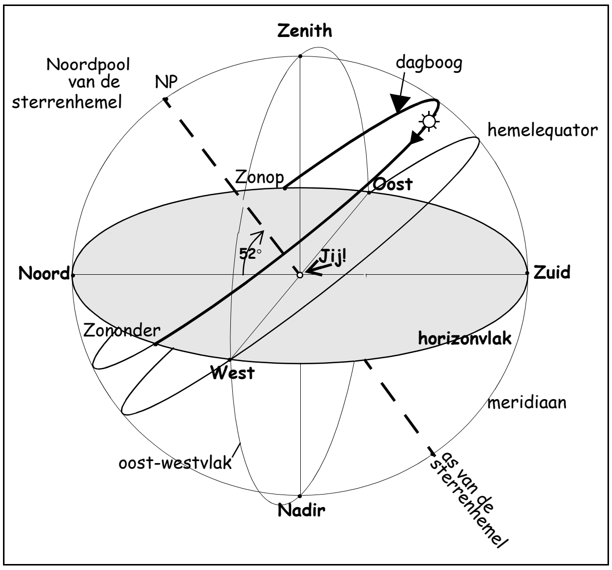


figuur 4: zonnebanenkaart als koepeltje of panorama

In figuur 3 zijn de zonnebanen voor alle eerste dagen van de twaalf maanden van het jaar in één grafiek gezet. In de handleiding bij 'De langste dag' staat hoe je die zonnebanenkaart rond kunt buigen. Je krijgt een soort theatertje waar je zelf in het midden (*M*) staat en de zon trekt als het ware zijn dagelijkse banen op en rond het scherm (fig.4). De leerlingen worden uitgenodigd mee te beslissen of het een koepeltje of een panorama moet worden. Alleen topontwerpers van de klasse van Van den Brink bedenken dat je ook dit soort vragen met je leerlingen kunt delen.

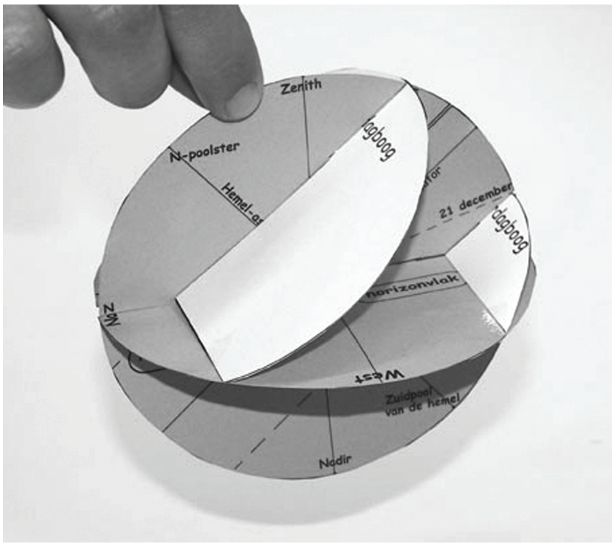
3 De zon is een dansende klok

Terug naar onze vwo-6 klas. Omdat we zonsopgangstijden nauwkeurig willen berekenen, moeten we dit theatermodel nader preciseren. We werken namelijk met hoekmetingen horizontaal, verticaal en schuin in alle richtingen en daarom is het bolmodel het beste. Daar laten we de leerlingen nu echter geen vrije keus in.
Wel beginnen we ook hier met de waarneming van de zonnebaan in globale zin, met name in de bekende omgeving, thuis. Vóór het eigenlijke project in de klas begon dus waarnemen waar (in welke richting) de zon opkomt, hoe hij beweegt en waar die ondergaat. Daarbij ook bedenken hoe dit in het verloop van het jaar is. In de klas wordt met grootse armgebaren verteld over de routes die de zon langs de hemelkoepel maakt. Het gezamenlijk opgeroepen beeld klopt met de zonnebanenkaart: bewegingen van links naar rechts, verschillende richtingen en tijden voor zonsopkomst in het jaar, zonnebanen die boven elkaar liggen, 's zomers hoger dan 's winters.
Een simulatieprogramma van de sterrenhemel (SkyGlobe) vult het beeld aan. Zo te zien draait alles aan de hemel (maan, planeten, zon, sterren) van links naar rechts en het lijkt of het geheel een grote ronddraaiende bol is, met als vaste draaipunten een punt hoog boven het noorden en daartegenover een punt ver onder de horizon, in het zuiden. De leerlingen spraken van het sterrenkleed dat als één geheel over de hemelkoepel glijdt.
De zon is - gedurende één dag althans - een vast punt op die draaiende bol. Op het koepelvormige theater van de hemel om ons heen beweegt de zon als punt van de draaiende sterrenbol over een groot cirkelvormig pad.
Slechts een deel van de dag is de zon voor ons zichtbaar boven de horizon. De fractie van de dagelijkse cirkelbaan die boven de horizon is, heet de dagboog. De lengte van de dagboog verhoudt zich tot de lengte van de volle dagcirkel als daglengte tot etmaal.



figuur 5

In ‘De zon is een dansende klok’ (de leertekst voor leerlingen in 6-vwo) staat een tekening, die uitgebreider verkenning nodig heeft dan in dit artikel verteld kan worden. Maar het is in feite niets anders dan een precieze uitvoering van de zonnebanenkoepel uit ‘De langste dag’.
Bij figuur 5 kun je je het best de hemelbol als heel erg groot voorstellen. Waar het stipje bij ‘Jij’ staat, moet je aan de hele aarde denken, met dien verstande dat je in het plaatje staat zoals je echt staat: het horizonvlak van de figuur is het denkbeeldige, vér doorgedachte raakvlak aan de aardbol op de plek waar jij staat.
Op het moment dat de zon midden in zijn dagboog is, steekt de zon de meridiaancirkel Zuid-Zenith-Noord-Nadir over. Op dat moment is de zon vanuit de waarnemer gezien op zijn hoogst boven de horizon. De zon gaat door zijn culminatiepunt. In de loop van het jaar verandert de hoogte van het culminatiepunt van 23.4° boven de hemelevenaar naar 23.4° eronder en weer terug, dat is de jaarlijkse beweging die we later gaan beschouwen. Meten ten opzichte van de hemelevenaar (dat is de cirkel waarin het aardse evenaarvlak de hemelbol snijdt) is heel zinnig: die hoek is namelijk onafhankelijk van de positie op aarde van de waarnemer.
In de klas besteden we uiteraard aandacht aan de samenhang tussen waarnemingspositie, culminatiehoogte en declinatie. Declinatie is de hoek die de lijn aarde-zon maakt met het evenaarvlak. De declinatie is ook het antwoord op de vraag: recht boven wélke parallelcirkel van de aarde staat de zon? Op 21 juni is dat de kreeftskeerkring, op 21 maart en 21 september de evenaar en op 21 december de steenbokskeerkring. Het zijn de parallelcirkels van plus 23.4^0, 0^0 en van min 23.4^0 noorderbreedte.
Voorlopig doen we alsof we de culminatiehoogte weten en bepalen vandaaruit de bijhorende daglengte. En we doen alsof de zon gedurende een dag netjes boven de zelfde breedtecirkel blijft en de volgende dag over een iets andere parallelcirkel gaat. Dat is een vereenvoudiging die de zaken beter te berekenen maakt.



figuur 6: model met zomer- en winterdagboog

In principe is de voorstelling van de zojuist gegeven figuur voldoende om de lengte van de dagboog en dus de duur van de dag te berekenen, maar dat is beslist nog geen makkelijke klus. Gezien de korte beschikbare tijd is gekozen voor een versterking van dit visuele model met een bouwplaat, waarin horizonvlak en meridiaancirkel vaste elementen zijn en waar verschillende dagbogen in gestoken kunnen worden. In dit model (fig.6) zien we de midzomer- en midwinterdagboog; die horen in Nederland bij de midzomer en midwintersituatie, met culminatiehoogten 61.5^0 en 14.5^0.

Met een eenvoudige computersimulatie, gemaakt in het bij leerlingen bekende constructieprogramma CABRI, kan de positie van de dagboog worden verschoven, de stand van de hemelas gewijzigd en kunnen grootheden nauwkeurig gemeten worden. De CABRI-simulatie geeft de bouwplaat in zijaanzicht weer en legt de dagbogen daarbij in het vlak van tekening. Dat is precies wat de bouwplaat doet als je die in je schrift legt om in je tas te stoppen. Dat beeld geeft dus geen problemen meer.
Berekenen met gebruik van deze simulatie van daglengte, culminatiehoogte en positie van zonsop- en zonsondergang op 21 december, 21 maart, 21 juni en 21 september levert voor Utrecht (52^0 noorderbreedte) het volgende op (fig7).

datum	daglengte	culminatie hoogte	opkomst-positie	ondergangs-positie
21 dec.	7.30 uur	14.5^0	-50^0	50^0
21 mrt.	12 uur	38^0	-90^0	90^0
21 juni	16.30 uur	61.5^0	-130^0	130^0
21 sept.	12 uur	38^0	-90^0	90^0

figuur 7

Waarop de kritische lezer vervolgens kan opmerken: en die 8.46 en 16.30 uur op 21 december 2006, dat maakt toch een daglengte van 7.44 uur?

4 Verbeteren van eenvoud

Zeker! De hele opzet is als een meetkundig model - de bouwplaat en de CABRI-simulatie - te gebruiken, dat verhelderend werkt, het denkwerk als het ware kan dragen en berekeningen toelaat. Het model veegt allerlei bijkomende factoren echter nog even onder de mat.
De lezer moet beseffen dat in het model de zon als punt wordt beschouwd. In werkelijkheid is de zon een schijfje dat in verhouding zo groot is als een aalbes op armafstand, ongeveer een halve graad. We spreken van zonsopkomst als de bovenkant van dat schijfje de horizon raakt. Hier komt nog bij dat door breking van het licht in

de atmosfeer we dat moment zien plaatshebben als de bovenkant van de zon meetkundig nog zo'n halve graad onder de horizon is. We moeten eigenlijk dus berekenen wanneer de meetkundige puntzon van ons model driekwart graad onder de horizon is. Dankzij de CABRI-simulatie is dat goed te doen. Evenzo bij zonsondergang; samen blijkt het genoeg voor veertien minuten méér dag; op 21 december dan, want heus, dat is niet het hele jaar hetzelfde!

Sterrenkunde doen - zeker als het kwantitatief gebeurt - heeft sterk het kenmerk van voortdurend verbeteren van een denkmodel. Simpel beginnen, met draaien van links naar rechts. Dan een bol- en cirkelmodel invoeren, zoals we gedaan hebben, later daarop allerlei correcties aanbrengen, zoals omvang van de zon, straalbreking en later de ellipsvorm van de aardbaan. In klassieke teksten als 'De Almagest' van Ptolemaeus moet de lezer van nu al bij de eerste bladzijde beslagen ten ijs komen, dat wil zeggen met kennis van een eenvoudig model in het achterhoofd. Anders is de grote lijn niet te volgen in de warboel van draaiende cirkels die de planeten in hun ingewikkelde banen dwingen.

5 Oude en nieuwe tijden

Wij zien de zon altijd opkomen in het oosten. Uitgaande van een stilstaande aarde moeten we concluderen dat oostelijk van ons de zon eerder opgaat dan bij ons. Per 15^0 oosterlengte scheelt dat precies een uur, 15^0 is immers $\frac{1}{24}$ deel van 360°. Bij verdere verplaatsing loopt dat steeds evenredig op. Voor de kritische lezer, die na de vorige paragraaf is gaan twijfelen: deze berekening klopt exact; als we uitgaan van een aarde die met constante snelheid om zijn as draait.[3]
Vroeger had elke plaats zo'n beetje zijn eigen kloktijd, die uitging van de plaatselijke zonnestand. De Amsterdamse Tijd verschilde zes minuten van die in Twente! Vooral de opkomst van spoor- en telegraafverbindingen bracht daar verandering in. De Internationale Meridiaan Conferentie van 1884 ontwierp een wereldomspannende tijdrekening, maar die werd pas veel later tot in de laatste hoeken en gaten van de wereld ingevoerd. Nederland als geheel kende tot aan de Tweede Wereldoorlog nog steeds de Amsterdamse Tijd. De Duitsers brachten ons Duitse tijd, later Midden Europese Tijd genoemd. Het is nog steeds onbegrijpelijk dat we na de bevrijding, rond onze 5° oosterlengte, niet aan de *Greenwich Mean Time* zijn geraakt, zodat hier de zon nog dagelijks te laat op gaat!

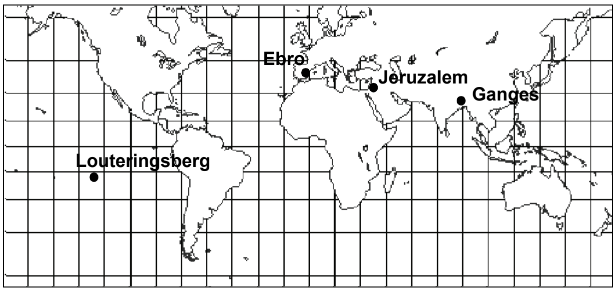
De nu bestaande internationale tijdszones zijn een ruwe mix van de meridianen van 7.5, 22.5, 37.5 enzovoort graden en de grenzen die oorlog, vrede en politiek ons opleggen. Een van de curiositeiten van het systeem kwam in de klas ter sprake:

> Je trekt vanuit Pakistan over de Karakoram (tot 8611 meter hoog) naar China. Hoe verzet je je horloge?
> (Gebruik www.sesamo.com/mapas/timezones.html)

Het juiste antwoord is: drie uur vóóruit. China legt namelijk iedereen van Peking tot Tibet de tijdzone van het Plein van de Hemelse Vrede op. Reis overigens maar niet van Pakistan via Afghanistan naar China, al kan dat laatste redelijk goed via de Kilik Pass, 4827 meter. Je moet namelijk je klokje eerst een half uur terugzetten en dan in de pas weer drie en een half uur vooruit en dat in de hoge koude sneeuw.
Kilik - en dat maakt de omweg voor sommigen zeker de moeite waard - is prominent aanwezig in een beroemde computergameserie. De bijhorende moderne legende laat 'Kilik' als wees gevonden worden voor de poorten van een Chinese tempel[4] hoog in de bergen.
De complexe verstrengeling van de begrippenparen oost/west en vroeg/laat treffen we ook in de het tweede deel van de 'Divina Commedia' van Dante Alighieri uit het begin van de veertiende eeuw.
Eenzelfde tijdsmoment wordt daar beschreven, zoals die zich voltrekken op vier plaatsen op aarde. De plaats waar de spreker zich dan bevindt, is de Louteringsberg, de tegenvoeter op aarde van Golgotha bij Jeruzalem.

> Zoals wanneer hij de eerste stralen afschiet
> naar waar zijn Maker ooit Zijn bloed vergoot
> – de Ebro valt dan onder de hoge Weegschaal
>
> en 't Gangeswater zindert in de noen – :
> zo stond de zon; daarom verliet de dag ons
> toen de engel Gods vol blijdschap ons verscheen.
> (Louteringsberg XXVII, 1-6, vertaling Rob Brouwer)

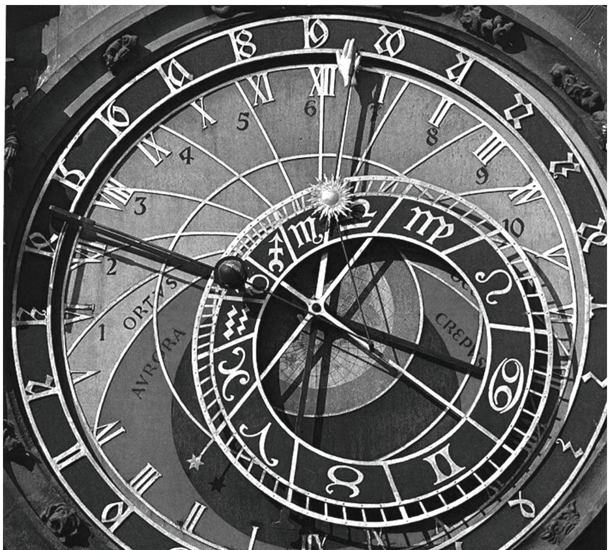
De vergelijking 'Zoals ... zo' is volgens de commentatoren maar 'zo-zo', want wat wordt er nu toch eigenlijk vergeleken? Maar de tijdsaanduidingen vragen nadrukkelijk om een aandachtige analyse.
Ochtend in Jeruzalem (waar de Maker zijn bloed vergoot), middernacht bij de Ebro (de Weegschaal staat in april 's nachts op zijn hoogst), midden op de dag aan de Ganges en avond op de Louteringsberg. Een verdeling in vier gelijke delen van de dag en dus van de cirkel om de aarde die de zon trekt (fig.8).



figuur 8

Op een moderne kaart ziet het er vreemd uit. Dit lijkt echt niet op een gelijkverdeling in vieren. Hoe kan dat?

Dante maakte gebruik van gegevens zoals die toen bekend waren, namelijk de coördinaten voor locaties op aarde zoals door Ptolemaeus in de tweede eeuw na Christus genoteerd. In de noord-zuidrichting konden ook toen al goede afstandsmetingen worden gedaan, door verschillen in zonshoogte te meten. In de oost-westrichting was het meten van grote afstanden een groot probleem, omdat men wel precies kon vast stellen wanneer de zon zijn hoogste punt bereikte in bijvoorbeeld Jeruzalem, maar niet kon weten wat er op datzelfde moment bij de Ebro aan de zonnestand te zien was. De snelle communicatie die daarvoor nodig was, bestond nog niet. Het was dus niet mogelijk het verschil in culminatietijden van de zon (en de sterren) te bepalen. Voldoende nauwkeurige en vervoerbare klokken die na een reis van enkele weken nog aan konden geven hoe laat het in de plaats van vertrek was, waren er immers niet. Kortom: de zon hielp in de oost-westrichting niet veel bij afstandsmetingen. Ptolemaeus en zijn navolgers gingen uit van reistijden van karavanen, bijvoorbeeld van die langs de zijderoute en moesten die proberen te combineren met verslagen van zeevaarders. Dat viel niet mee. De omvang van de bewoonde wereld in de oost-westrichting, die tussen de Ebro en de Ganges, werd met bijna een factor twee overschat!
Columbus gebruikte twee eeuwen na Dante dezelfde Ptolemaeïsche kaarten en gegevens. Hij ging er daarom van uit dat de westelijke zeeweg naar China ongeveer zo lang was als de bekende oostroute. Gelukkig trof hij halverwege een ander land.

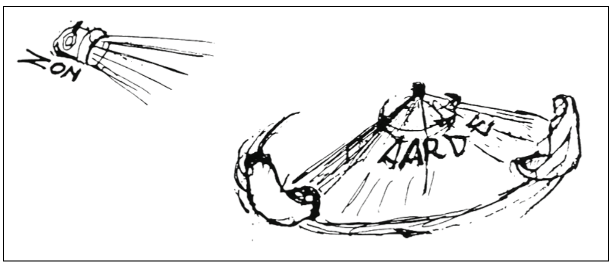


figuur 9: Praagse astronomische klok

Een laatste curiositeit uit de geschiedenis van de tijdrekening mag hier niet ontbreken.
Tot in de middeleeuwen was het gebruikelijk de dag - dat wil zeggen de tijd tussen zonsop- en zonsondergang - in te delen in twaalf gelijke delen; hierin werd dus de Joodse tijdrekening gevolgd die velen van ons nog wel uit de bijbel kennen. Deze uren hadden dus een seizoensafhankelijke lengte; 's zomers lang, 's winters kort. Wij kennen deze 'uren' ook als de 'Canonieke Uren' waarop in kloosters op bepaalde tijden in wisselzang werden gezongen: Metten, Lauden, Priem, Terts, Sext, None, Vespers, Completen.
Voor de dagelijkse praktijk was dat toen zeker heel handig; ook voor het berekenen van zonsopgang en -ondergang trouwens: nul en twaalf uur, iedere dag.
Voor astronomische doeleinden werden echter door de Grieken al de equinoctiale uren gebruikt. Het hele etmaal werd ingedeeld in 24 gelijke delen, dat wil dus zeggen, zoals de Joodse verdeling op de dagen van dag-nacht-gelijkheid, de equinoctia. De astronomische klok in Praag (fig.9) (Mikulas van Kadan, 1410). De Romeinse cijfers geven de (24!) equinoctiale uren aan en de Arabische cijfers de (12!) canonieke. De zon bevindt zicht steeds op de 'wijzer'. De cijfers voor de canonieke uren horen bij de kromme lijnen. Op deze klok is de zonnebaan iedere dag een cirkel; het mechaniek met de dierenriem zorgt dat de zon hoger of lager boven de aarde komt in de loop van het jaar. De zon wijst tegelijk een Romeins cijfer en een canoniek uur aan.[5]

6 Wie draait, wie staat?

Draait de zon om de aarde of draait de aarde zelf, zodat het lijkt alsof de zon beweegt? Op zeker moment in 'De langste dag' wisselt het perspectief wat dit betreft. Dat kan tegenwoordig, wij maken geen geloofszaak meer van het een of het ander en kiezen het model dat het beste 'werkt'.
In figuur 10 is de aarde als een carrousel voorgesteld en staat de zon in de verte als een flinke lamp te schijnen. De leerlingen konden goed uit de voeten met dit model. Ze zagen dat als je op de draaiende aarde zit, op gezette tijden die berg dan in het midden van de carrousel tussen jou en de zon draait. Als je hoger (noordelijker) zit, zie je de zon altijd. Marina (1989): 'Dan kan de bult er niet meer voor'.



figuur 10: zonschijnwerper en carrousel aarde

In 'De langste dag' wordt er geen melding van gemaakt dat de draaiende aardcarrousel in een jaar ook nog eens een ronde om de zon maakt. De combinatie van de jaar-

lijkse en dagelijkse beweging eist in zowel de geocentrische als de heliocentrische voorstelling erg veel van het ruimtelijk inzicht.
Effectief rekenen aan de positie van de zon ten opzichte van de achterliggende sterrenhemel is wel goed te doen, als we een tussenstap maken. De sterrenbol op zich bekijken en de baan daarop zien die de zon maakt. En dat even niet laten verstoren door aardse hindernissen als horizonnen en bulten.

7 De ecliptica

In 'De zon is een dansende klok' moet op zeker moment exact bepaald worden hoe de zon in de loop van het jaar nu eens dichter bij de Noordpool, dan weer dichter bij de Zuidpool langs lijkt te gaan. Het traditionele beeld van het Armillarium wordt gebruikt: een bolvormige sterrensfeer waarop de gang van de zon (en eventueel de planeten) wordt afgebeeld. De zon blijkt op die sterrensfeer (het sterrenkleed in de terminologie van de leerlinge) in één jaar tijds over een cirkel te lopen die ook de sterrenbol in twee gelijke delen deelt, maar deze cirkel ligt in een vlak dat het evenaarvlak onder een hoek van 23.4 graden snijdt. Zo'n model zien we boven op het pand Singel 390 in Amsterdam in volle glorie (fig11).

figuur 11

Het is goed te zien dat het de sterrenbol betreft waarop deze baan ligt.[6] De schuine cirkel is de ecliptica, de sterrenbeelden die de zon passeert zijn de twaalf van de dierenriem. Leerlingen kenden er daar natuurlijk allemaal wel minstens één van.
Berekeningen verliepen in een kartonnen model om te bepalen welke hoek (de declinatie δ) de zon van de evenaar afstaat, als de zon vanaf het lentepunt (waar ecliptica en evenaar elkaar snijden) een bepaalde ecliptische lengte, aangegeven met de letter λ, heeft afgelegd.
De gevonden relatie tussen δ en λ ziet er mooi uit, het is met al die sinussen een typische formule uit de bolmeetkunde, die historisch bijna geheel ontwikkeld is vanuit de thema's tijd en navigatie:

$$\sin\delta = \sin 23.5 \cdot \sin\lambda$$

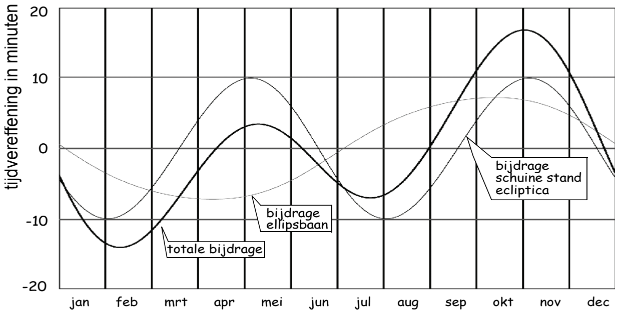
We zijn er bijna!
Ga nu eens uit van een bepaalde dag in het jaar, bijvoorbeeld je verjaardag. Bereken de fractie van een jaar die verlopen is sinds het laatste lentepunt. Dezelfde fractie van een cirkel geeft een hoekgrootte, dat is λ. Met de formule vind je nu de declinatie δ van de zon. Met de CABRI-applicatie (zie hiervoor) bepaal je de lengte van de dag op je verjaardag. De positie in de tijdzone helpt het moment bepalen waarop de zon culmineert en dan is berekenen van zonsopgangs- en ondergangstijd een peuleschil. Ga je gang!

Helaas, helaas! Er zitten nog twee forse adders onder het gras. Die zorgen ervoor dat we er op deze manier toch nog wel een kwartier naast kunnen zitten.

8 De tijdsvereffening

De eerste adder kunnen we een beetje zien als we de zon volgen vanaf het lentepunt. De zon klimt dan langs de ecliptica de noordhelft van de hemelbol op. Na bijvoorbeeld $\frac{1}{24}$ van een jaar heeft de zon 15° langs de ecliptica afgelegd. Maar omdat de ecliptica schuin loopt, is de zon dan nog niet op de 15^0 meridiaan aangeland. Als de zon hoger klimt, haalt hij dat weer in, want na het afleggen van 90^0 is de zon wél op de 90 meridiaan. Dat komt omdat hogerop de meridianen naar elkaar toe krommen! Daarna wordt het voorlopen tot het herfstpunt en dan nog eens een kwartaal achterlopen en een kwartaal voorlopen tot het lentepunt bereikt is. Kortom: de zon passeert de opeenvolgende meridianen van de sterrenbol niet gelijkmatig en de gecombineerde beweging van dagelijkse draai en beweging over de ecliptica levert geen perfecte klok op!
Het effect hiervan op de culminatietijden van de zon is twee cycli per jaar van voor- en achterlopen, met een maximum afwijking van tien minuten.
De tweede adder is giftiger, maar van grote schoonheid. Er horen beroemde namen bij: Newton en Kepler. 'De zon is een dansende klok' geeft er informatie over.
Kepler besloot op grond van waarnemingen aan de planeet Mars dat modellen die op cirkelvormige gelijkmatige bewegingen (en samenstellingen daarvan) niet bestonden. Hij zag in dat een ellipsvormige baan echter wel goed met de werkelijkheid overeenstemde. Het afzien van de volmaakte cirkelvorm was minstens zo'n grote revolutie als het afzien van het geocentrisch wereldbeeld, daarvan was Kepler zich bewust.
De planeet Mars (en de aarde) bewegen dus om de zon in een ellipsbaan, waarbij de zon zich niet in het midden van de ellips bevindt, maar een stuk daarbuiten: in een van de brandpunten van de ellips. Kepler kon ook precies beschrijven hoe de planeet sneller bewoog als die dicht bij de zon was en langzamer verder van de zon af. Newton kon later op grond van zijn gravitatiewetten afleiden dat

Kepler gelijk had. Waarmee ook de revolutionaire gedachte wordt onderbouwd dat de bewegingen van de hemellichamen dezelfde wetten van Newtons mechanica volgen als vallende stenen en kanonskogels op aarde. Het effect van de Kepler-ellips op de culminatietijden van de zon is één cyclus per jaar van voor- en achterlopen, met een maximumafwijking van acht minuten, waarbij het nulpunt van de cyclus begin januari plaatsvindt.



figuur 12: grafiek van de tijdsvereffening

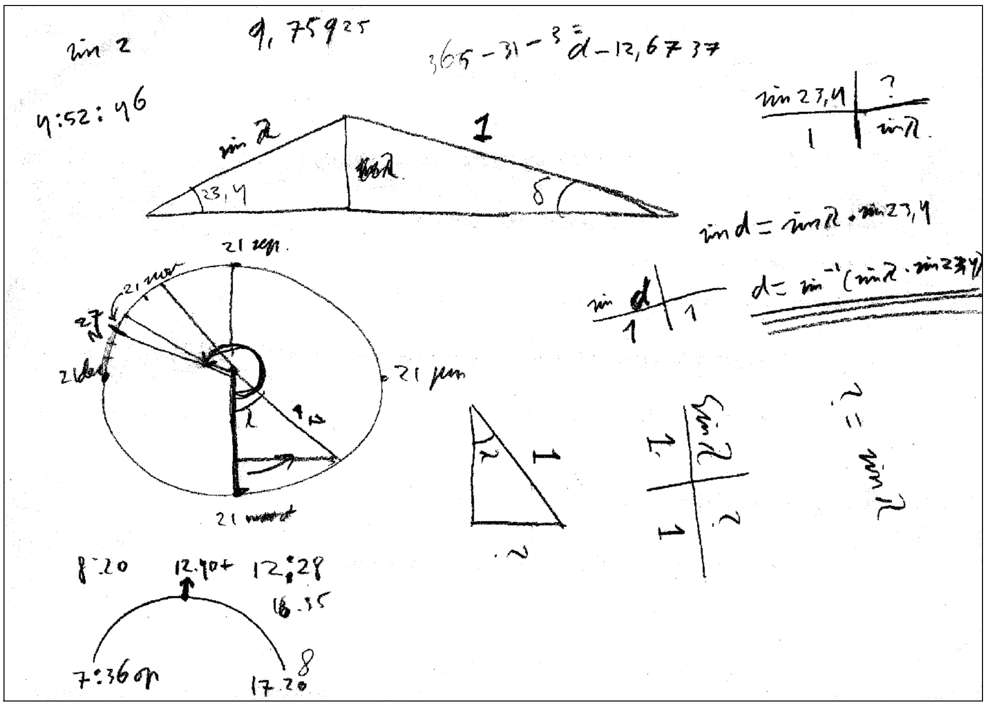
De gezamenlijke tijdsvereffening en zijn twee venijnige componenten zijn overzichtelijk in een grafiek weer te geven, die te gebruiken is bij de uiteindelijke berekening. De grafiek geeft ongeveer vier minuten positief aan voor midden mei. Dat betekent dat de zon dan vier minuten voorloopt op de zogenaamde middelbare zon (een soort denkbeeldige gelijkmatig lopende zon). Voor het vinden van de culminatietijd moeten we dus vier minuten aftrekken van de waarde die we al eerder vonden op grond van onze 5° oosterlengte, de 12.40 uur. De zon culmineert midden mei dus rond de 12.36 uur MET, of 13.36 uur MZET (Middelbare Europese Zomertijd) (fig.12).

9 Karel vat het samen

Hieronder is de berekening van een van de vwo-leerlingen, Karel, opgenomen (fig13). Karel is op 27 november geboren. Zie de cirkel met data linksmidden, waar de ecliptische lengte wordt berekend. De formule voor de berekening van de declinatie wordt op het blaadje nog eens afgeleid; het blijkbaar noodzakelijke gebruik van verhoudingstabelachtige notities verraadt beperkingen van de algebraïsche vaardigheden. Linksboven verschijnen getallen die uit de daglengteberekening met behulp van CABRI volgen.
De zonnebaan is rudimentair getekend als ondersteuning bij het berekenen van de tijden op gelijke afstand van het culminatiepunt, linksonder. De onderste waarden (7.36 en 17.28) zijn later gecorrigeerd. We zien de tijdsvereffeningscorrectie van 12.40 naar 12.28 prominent boven de zonnebaan. De uiteindelijke waarden 8.20 uur voor zonsopgang en 16.35 uur voor zonsondergang wijken maar één minuut af van wat 'in de boeken' staat!

10 Tot slot

De leerlingen in 6-vwo weten tijdens de les al na enkele minuten op de computer te vinden wat de juiste tijden van zonsop- en -ondergang op hun verjaardag zijn. Dat daagt ze later alleen maar uit hun eerste gebrekkige resultaten te verbeteren; het gaat hen om de eigen wiskundige actie zelf en niet om het resultaat. Zo hoort het.[7]



figuur 13: Karels uitwerking

Wie na bijna twintig jaar 'De langste dag' nog eens inziet, valt op dat Van den Brink aan die mentaliteit gewoon niet twijfelde. Ook bij 'Mekka' (1991), over het vinden van de juiste bidrichting (Kibla) op verschillende plaatsen op aarde, is dat zo. 'Mekka' bevat ook een hoop extra, wiskundig gezien strikt overbodige informatie, alleen omdat die zo natuurlijk en aardig bij het onderwerp past.
Wat de intrinsieke motivatie betreft: het kan nog steeds. Alle grijs-grauw-zwarte verhalen over de verloedering van het onderwijs ten spijt.
Jan, nog bedankt voor de inspiratie.

Noten

1 Van het Junior College te Utrecht.
2 GWA staat voor: Geïntegreerde Wiskundige Activiteit.
3 En zelfs dat is niet helemaal meer zoals het geweest is. Zie http://nl.wikipedia.org/wiki/Schrikkelseconde
4 Deze tempel was het centrum van de opperste oosterse martiale kunst, zoals in 'Soul Calibur' en de opvolgers Soul Calibur II en III goed te merken is.
5 Amsterdamse tijd, Kilik, Dante, Columbus, Metten, Praag: alles strikt overbodig. Ik bied Jan van den Brink deze passage speciaal aan, omdat hij kinderen vooral liet zien hoe fascinerend de wereld blijkt te zijn als je meer wilt weten dan wat nuttig en goed voor je is. Ik sluit niet uit dat de betrokken observator die in Van den Brink schuilt dit zelf van kinderen geleerd heeft.
6 De armillariumsfeer was een symbool voor navigatie en daarmee van kunnen heersen over de zeeën. Portugal voert nog steeds een armillarium in de vlag, het scheepvaartmuseum in Amsterdam (voorheen magazijn van de VOC) heeft er een groot aantal op het dak.
7 Voor reacties op dit artikel: a.goddijn@fi.uu.nl

The length of day changes during the year and differs from place tot place on our spherical world. Two approaches to study this phenomenon with students are discussed in this contribution. One is 'The Longest Day' by Jan van den Brink and Theo Obdeijn (1989) for Junior High School; the other 'The Sun is a Dancing clock' is designed for gifted students in Senior High school.
Both approaches are highly geometrical and use representations that are familiar to the students, such as the heaven as a global theater and the starry sphere as a drape sliding over the heaven. Strong images are necessary to support geometrical imagination. Finally one of the students briefly shows his work; on his birthday, november 27, the sun rises at 8.20 and sets at 16.35. This is very close to the official times which are found in abundance on the web, but the student is rightly proud of his own result.