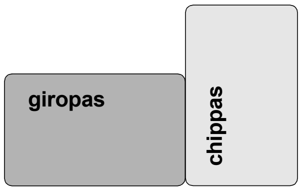
De gulden rechthoek

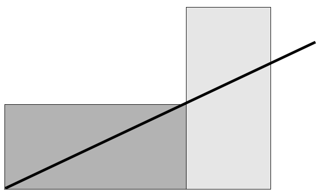
M. Kindt
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Neem uw giropas en chippas (of ander pasje met dezelfde afmetingen) en leg die op de volgende manier tegen elkaar (fig.1).



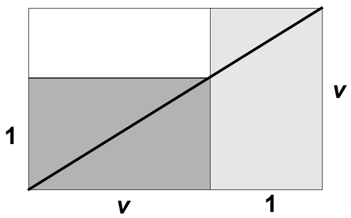
figuur 1

Leg een liniaal langs de diagonaal van de giropas (van links onder naar rechts boven). U kunt nu iets bijzonders constateren, namelijk dat de lijn door de liniaal bepaald, precies door het hoekpunt (rechts boven) van de chippas gaat. Dat heeft alles te maken met de verhouding tussen lengte en breedte van de rechthoek die met de giropas of creditcard of treinabonnement of ... correspondeert.
Bij twee identieke rechthoeken met een andere verhouding van lengte en breedte gaat die vlieger niet op (fig.2).



figuur 2

De vorm van een rechthoek kan worden gekarakteriseerd door het quotiënt lengte : breedte. We noemen dit het *vormgetal* van de rechthoek.



figuur 3

Het vormgetal van een vierkant is 1. Het vormgetal van een krantenpagina (hetzij A2, hetzij A3) is ongeveer 1,414. Hoe zit het nu met het vormgetal van een rechthoek die de diagonaaleigenschap van de giropas heeft?
Stel de breedte van die rechthoek 1 en het vormgetal v (fig.3). De rechthoek die om de twee grijze rechthoeken past heeft dan de breedte v en de lengte $v + 1$. Uit de diagonaal eigenschap volgt dat de omhullende rechthoek gelijkvormig is met de twee grijze rechthoeken. Daaruit volgt:

$$\frac{v+1}{v} = v$$

Vermenigvuldiging van beide leden met v geeft:

$$v + 1 = v^2$$

en hieruit kan de waarde van v worden berekend. Het vergt geen timmermansoog om te zien dat die waarde wel ergens tussen 1 en 2 zal liggen.
Even wat proberen: $1{,}5 + 1 = 2{,}5$ en $1{,}5^2 = 2{,}25$. Jammer, het wijkt teveel af.
Tweede poging $1{,}6 + 1 = 2{,}6$ en $1{,}6^2 = 2{,}56$. Dat is al een stuk beter.
Voor wie een exacte uitkomst wil, zit er niets anders op dan het oplossen van de bovenstaande tweede-graadsvergelijking in v. In de schoolboekjes voor het voortgezet onderwijs is daartoe een formule te vinden, maar het lukt bijvoorbeeld ook zo:

$$v + 1 = v^2 \Rightarrow v^2 - v = 1 \Rightarrow v(v-1) = 1$$

Stel nu dat m het getal is dat precies midden tussen v en $v - 1$ ligt.
Dan geldt $v = m + \frac{1}{2}$ en $v - 1 = m - \frac{1}{2}$ en dus

$$\left(m + \tfrac{1}{2}\right)\left(m - \tfrac{1}{2}\right) = 1$$

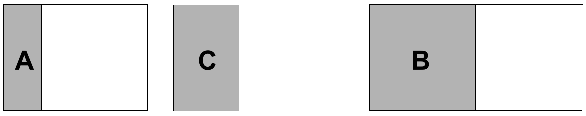
Hieruit volgt dan $m^2 - \frac{1}{4} = 1$ dus $m = \sqrt{1\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$:
Kortom:

$$v = \tfrac{1}{2}\sqrt{5} + \tfrac{1}{2} \approx 1{,}618$$

De ‘golden ratio’

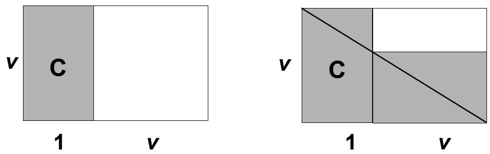
Het zojuist berekende getal v, wordt wel de *golden ratio* (gulden verhouding) genoemd. De rechthoek, waarvan lengte en breedte zich verhouden als $1 : v$, staat bekend als de gulden rechthoek. Sommige bevlogen auteurs, zoals. Fra Liuca Paciola, tijdgenoot en vriend van Leonardo da Vinci, spreken van de 'goddelijke rechthoek'. Deze rechthoek lijkt overal op te duiken in de beeldende kunst en de architectuur, maar de mythen rond de gulden verhouding (ook wel gulden-snede-getal) moeten met een flinke korrel zout worden genomen (Van der Schoot, 1998). In de wiskunde speelt de gulden verhouding op verschillende plaatsen wel degelijk een prominente rol.

In een eerdere jaargang van dit tijdschrift belichtte E. de Moor (1988) ooit de rol van het gulden-snede-getal bij de regelmatige vijfhoek en de daarin beschreven vijfpuntige ster. In dit stukje beperken we ons tot de gulden rechthoek.
Een andere manier om die te introduceren is de volgende. Ga uit van een willekeurige rechthoek (in de figuur grijs) en plak aan de langste zijde daarvan (buitenwaarts) een vierkant. Er ontstaat zo een nieuwe, grotere rechthoek (zie A; fig.4).



figuur 4

Gaan we uit van een 'smalle' rechthoek A (met een vormgetal groter dan 2), dan zien we bijna in één oogopslag, dat de grote rechthoek een kleiner vormgetal heeft dan die van A. Bij rechthoek B is het juist omgekeerd; het vormgetal van B is kleiner dan die van de grote rechthoek. Zal er nu een 'tussenrechthoek' (C) bestaan waarvan het vormgetal gelijk is aan dat van de grote rechthoek?
Een retorische vraag natuurlijk, denk maar aan de giropas!



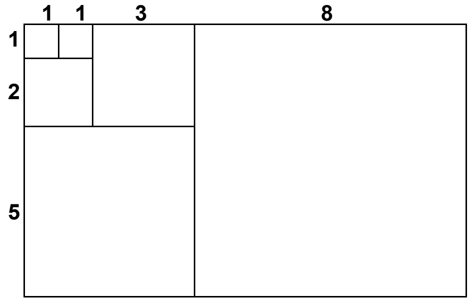
figuur 5

Het komt er dus op neer dat als we aan de lange zijde van een gulden rechthoek een vierkant plakken er weer een gulden rechthoek ontstaat. Dit is een karakteristieke eigenschap van de gulden rechthoek (fig.5)!

De rij van Fibonacci

We gaan uit van een vierkant van 1 bij 1 en plakken daar een vierkant aan vast; er ontstaat nu een rechthoek van 1 bij 2. Plakken we aan de lange zijde daarvan weer een vierkant vast, dan krijgen we een rechthoek van 2 bij 3. Herhalen we deze handelwijze, dan komt er een rechthoek van 3 bij 5, enzovoort.

Het opmerkelijke is nu dat de zo ontstane rechthoeken steeds beter op een gulden rechthoek gaan lijken. Voor een verklaring hiervan, letten we eerst op de lange zijden van de rechthoeken. Die zijn achtereenvolgens
1, 2, 3, 5, 8, 13, ... (fig.6).



figuur 6

Sommige lezers zullen hier de getallen van Fibonacci in herkennen. De wet volgens welke deze rij kan worden voortgezet is snel duidelijk aan de hand van figuur 6: elk getal is precies de som van zijn twee voorgangers.
De vormgetallen van de serie rechthoeken (ofwel de quotiënten van opvolgende getallen in de rij van Fibonacci) zijn achtereenvolgens (fig.7).

$$\frac{1}{2}$$
$$\frac{3}{2} = 1,5$$
$$\frac{5}{3} \approx 1,667$$
$$\frac{8}{5} = 1,6$$
$$\frac{13}{8} = 1,625$$
$$\frac{21}{13} \approx 1,615$$

figuur 7

Het lijkt er inderdaad op dat deze quotiënten steeds dichter bij het gulden-snede-getal komen. Met een grafische rekenmachine kunnen we razendsnel deze rij uitkomsten en het vervolg daarop vinden met behulp van de *Ans(wer)*toets. Dat gaat zó. Startend met de beginwaarde 1, toetsen we de 'herhaalformule' 1 + 1 / *Ans* in. Na tien keer *enter* komt er 1.617977528 op het scherm, na nog eens tien keer komt er 1.618033985, en even later zien we geen verandering meer op het scherm, het blijft 1.618033989, dat is de benadering van het gulden-snede-getal in negen decimalen.
De verklaring van dit 'trucje' berust weer op algebra. Als v het vormgetal is van een rechthoek, dan is het vormgetal van de rechthoek die na aanplakken van het vierkant ontstaat gelijk aan

$$\frac{v+1}{v} = 1 + \frac{1}{v}$$

De rekenmachine suggereert dat de uitkomsten convergeren naar een zeker getal en als we hier aannemen dat dit inderdaad zo is, zal dat getal moeten voldoen aan:

$$v = 1 + \frac{1}{v}$$

met als oplossing de golden ratio. Het bewijs van de convergentie laten we hier achterwege. Wel merken we nog op dat welke rechthoek ook als startpunt gekozen wordt, het herhaald vierkant-aanplak-proces na enige stappen een goede benadering van de gulden rechthoek geeft.

Op het internet is er van alles over *the golden ratio* te vinden, maar voor wie een aardig boekje over het onderwerp verkiest, verwijzen we naar Kleijne & Konings (2000).

Literatuur

Schoot, A. van der (1998). *De ontstelling van Pythagoras*, Kampen: Kok Agora.

Moor, E. de (1988). De gulden snede en het Gildeglas. *Panama-Post, 6*(3), 70-75.

Kleijne, W. & T. Konings (2000). *De Gulden Snede.* Utrecht: Epsilon uitgaven.

Panama Praktijktip nummer 103

De gulden rechthoek

Twee vierkanten, hoe verschillend van grootte ook, zijn gelijkvormig. Dat wil zeggen dat je het ene vierkant met een zekere factor kunt vergroten of verkleinen om hem identiek te maken met de andere.
Voor twee rechthoeken geldt dat niet. Er zijn smalle rechthoeken en bijna-vierkante rechthoeken. In de wiskunde wordt trouwens een vierkant ook als (bijzondere) rechthoek bestempeld.
De vorm van een rechthoek wordt bepaald door de verhouding tussen lengte en breedte.
Het quotiënt van lengte en breedte zullen we het vormgetal van de rechthoek noemen:

$$\textit{vormgetal} = \frac{\textit{lengte}}{\textit{breedte}}$$

1 Teken een rechthoek met vormgetal 4. Teken aan de buitenkant langs de lange zijde een vierkant. De rechthoek en het vierkant vormen nu samen een nieuwe rechthoek. Wat is het vormgetal van die nieuwe rechthoek?

2 Teken een rechthoek en breidt die, net als in de vorige opgave, met behulp van een vierkant uit tot een nieuwe rechthoek. Zorg er voor dat het vormgetal van de grote rechthoek groter is dan dat van de kleine rechthoek.

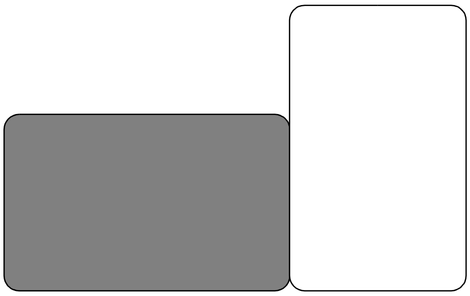
3 Je voelt het misschien al aankomen: er zijn ook rechthoeken waarbij de met een vierkant uitgebreide rechthoek hetzelfde vormgetal heeft als de oorspronkelijke rechthoek.
Stel het vormgetal van zo'n speciale rechthoek v. Laat zien dat voor dat vormgetal geldt: $v^2 = v + 1$.

4 Omdat vormgetal te bepalen moet je dus een vergelijking oplossen. Daar is een formule voor, maar als je die niet meer zo precies weet, is hier een tip. Vervang v op de twee plaatsen in de vergelijking door $w + \frac{1}{2}$ en los w op uit de nieuwe vergelijking (alleen de positieve oplossing telt).

5 Als je genoegen wilt nemen met een benadering van het vormgetal, bijvoorbeeld in drie decimalen, kun je de vergelijking van de vorige opgave ook met behulp van een rekenmachine oplossen. Doe dat en vergelijk je uitkomst met de 'exacte' uitkomst.

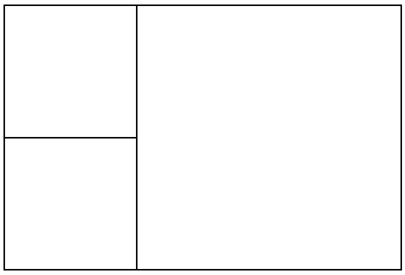
6 Het getal dat je in de vorige opgaven hebt gevonden wordt de *golden ratio* ('gulden verhouding') genoemd en een rechthoek met dat vormgetal is een gulden rechthoek.
Gulden rechthoeken of bijna-guldenrechthoeken kom je overal tegen in de architectuur en de schilderkunst. Misschien is het scherm van jouw grafische rekenmachine ook een gulden rechthoek.

7 Giropas, chipkaart, treinabonnement ..., lijken gulden rechthoeken (in de hoeken afgerond). Je kunt natuurlijk lengte en breedte opmeten en constateren dat het niet veel scheelt, maar er is een leukere manier. Leg twee van zulke pasjes aan elkaar met de lange zijde van de één aan de korte zijde van de ander als in figuur 1.
Leg nu een liniaal langs de diagonaal van het linkerpasje (van linksonder naar rechtsboven). Die liniaal gaat dan ook door de hoek rechtsboven van het andere pasje. Verklaar hiermee dat het pasje een gulden rechthoek is.



figuur 1

8 In het voorgaande heb je gezien hoe je een rechthoek kunt uitbreiden door aan de lange zijde een vierkant te plakken. Begin nu met een vierkant van 1 bij 1 cm. Aanplakken van een vierkant geeft een rechthoek van 1 bij 2 cm. Aanplakken van een vierkant aan de nieuwe rechthoek leidt tot een rechthoek van 2 bij 3 cm (fig.2).



figuur 2

Dit proces kun je blijven herhalen, zodat er een steeds grotere rechthoek ontstaat.
Leg uit dat je na een aantal stappen een rechthoek van 13 bij 21 cm kunt krijgen (dat is de grootste rechthoek die nog op een A4-vel past).
Bereken op je rekenmachine het vormgetal van die rechthoek.
Doe dat ook voor een paar rechthoeken die je bij voortzetting van dit proces zou krijgen.
Als je dit correct uitvoert merk je dat de rechthoek steeds meer op een gulden rechthoek gaat lijken!