

A. Treffers & E. de Goeij
 Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Freudenthal noemde het leren observeren en interpreteren van leerprocessen een didactisch middel. Van den Brink heeft zich in zijn ontwikkelwerk sterk door dit didactische beginsel laten leiden. Dat deze leidraad niet eenvoudig is, moge blijken uit het conservatie-experiment van Piaget, en wellicht nog sprekender uit het zogenoemde kapiteinsprobleem ('Hoe oud is de kapitein van de boot met 26 schapen en 10 geiten?'). Voor het kapiteinsprobleem nemen we het mooie onderzoek van Selter en Spiegel tot uitgangspunt. En voor het onderzoek rond de conservatiekwestie wordt aandacht besteed aan de vermaarde onderzoeken van Mehler en Bever en van Mc Garrigle en Donaldson, die vanaf omstreeks 1980 het tot dan toe sterk Piagetiaans geïnspireerde rekenonderwijs ter discussie stelden, wat 'Wiskobas' overigens al eerder deed.

1 Inleiding

In het boek 'Wie Kinder rechnen' van Selter en Spiegel (1997) staat de volgende anecdoten.

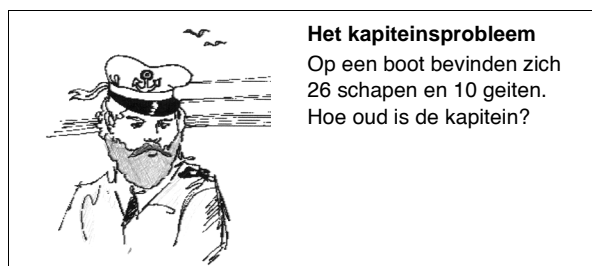
(...) Wir fahren mit der sieben Jahre alten Hanneke und ihren Schwester Ine und Freundin Marion ins Pfannkuchenhaus. Von unseren letzten Besuchen wissen die Kinder, dass die Pfannkuchen so grob sind, dass sie keinen ganzen aufessen können. Sie beschließen daher, zu dritt zwei Pfannkuchen zu bestellen. Ich frage Hanneke: 'Wie viel bekommt denn dann jeder?' Nach einigem Nachdenken antwortet sie: 'Eine halbe Stunde und zehn Minuten. 'Auf Anhieb haben wir dass nicht verstanden.

Algemeen geldt dat we bij het rekenen soms niet begrijpen wat jonge kinderen eigenlijk bedoelen, welke denkweg ze hebben gevolgd, hoe ze tot een bepaald antwoord zijn gekomen. Over die belangrijke kwestie schrijven Selter en Spiegel. Een van hun onderzoeken betreft het curieuze kapiteinsprobleem dat we als basis nemen voor de beschouwing over onderzoek en onderwijs van het aanvankelijke rekenen.

2 Hoe oud is de kapitein?

Bij het kapiteinsprobleem (fig.1) gaat het in de kern om een onmogelijke rekenopdracht die in verschillende varianten, al dan niet in geïllustreerde vorm, wordt aangeboden. In 1980 rapporteerde een Frans onderzoeksteam uit Grenoble, dat op deze vraag maar liefst 76 van

de 97 leerlingen einde basisschool het antwoord '36' gaven. Een soortgelijke studie uit Duitsland (Radatz, 1983) leverde vergelijkbare resultaten op. Hoe is het mogelijk dat een groot deel van de kinderen hier gaat optellen?



figuur 1

Het Franse researchteam zag het bestaande rekenonderwijs met z'n stereotiepe, onrealistische redactiesommen als de grote boosdoener, en de Duitse onderzoeker Radatz kwam tot dezelfde slotsom. Het verschoolste rekenonderwijs, eenzijdig gericht op het zoeken van de correcte bewerking in de ingeklede opgave, zou het gezonde rekenverstand verstikken - eigenlijk niet zo'n gekke conclusie zou je op het eerste gezicht zeggen.

Maar Freudenthal (1980) vond deze verklaring te simpel. Naar zijn mening was het de magische context waarin de kapiteinsopgave geplaatst is die maakt dat kinderen naar het verborgen getal gaan zoeken; hetzelfde gegoochel met getallen als zich voordoet bij het aantal stippen van het lieveheersbeestje, de kaarsen op een verjaarstaart of met de vormen in plaatjespuzzels waarbij de verborgen figuur in het weelderige lover van een tuin moet worden opgespoord. Hij pleit voor diepergaand onderzoek met als centrale vraag: 'Wat zijn de achterliggende beweegredenen van de kinderen om op een dergelijke manier aan

het rekenen te slaan; hoe motiveren ze hun eigen reken-gedrag?’

Wat Freudenthal toen voorstelde is ook werkelijk uitgevoerd. Had hij het bij het rechte eind dat de kinderen die optellen, de kapiteinsopgave in de context van de getallemystiek plaatsen en denken dat ze in het numerieke plaatje de verborgen getalfiguur moeten zoeken?

Laten we om deze vraag te beantwoorden de volgende voorbeelden van Selter en Spiegel waarin kinderen hun ‘duistere’ rekenhandelingen toelichten, nu eens nader beschouwen.

De kapitein heeft op iedere verjaardag een schaap of een geit cadeau gekregen.

De kapitein kan nooit onthouden hoe oud hij is. Daarom heeft hij voor ieder jaar een dier gekocht. Als hij nu wil weten hoe oud 'ie is, dan hoeft hij alleen nog maar zijn dieren te tellen

In de opgave is het nu eenmaal zo dat de kapitein precies zoveel dieren heeft als hij oud is. Dat kan toch?

Als men jarig is dan krijgt men bijvoorbeeld 30 rozen of zo. Nou, de kapitein heeft 36 dieren gekregen.

De kapitein is 136 jaar oud. Omdat we nu met honderden rekenen, moet het antwoord ook een getal met een honderd zijn.

Ik heb de dieren geteld en toen keer twee gedaan. Ik heb gedacht dat als er 36 dieren zijn dan is de kapitein twee keer zo oud. Ik vind de opgave wel een beetje vreemd omdat gevraagd wordt ‘hoe oud is de kapitein?’, terwijl er op het plaatje bij de opgave helemaal geen kapitein te zien is.

Ik heb alle schapen en alle geiten samengeteld. En dan krijg je het antwoord. Alleen ben ik bang dat het een schertsvraag is, eigenlijk zoals alle sommen die we op school maken. Het allerbeste.

Zelfs als de leerling in eigen persoon bij het verhaal wordt betrokken is er altijd nog een uitweg te vinden, zoals Selter en Spiegel laten zien.

Leraar: Je hebt 10 potloden en 20 kleurstiften.
Hoe oud ben je?

Julia: 30 jaar.

Leraar: Maar je weet toch zelf wel dat je geen 30 jaar oud bent?

Julia: Jawel, dat is duidelijk. Maar dat is mijn schuld toch niet? Je hebt me de verkeerde getallen gegeven!

Duidelijke taal van Julia: De vraag is weliswaar onzinnig, maar je verwacht kennelijk van mij dat ik deze som maak, nou dan doe ik dat, ook al slaat de uitkomst nergens op, want dat is niet mijn schuld.

Tot zover het onderzoek van Selter en Spiegel.

Uit recent onderzoek van De Goeij (2005) komt eveneens naar voren dat binnen de context van de rekenles heel wat leerlingen het kapiteinsprobleem opvatten als de opdracht om een situatie te verzinnen waarin de uitkomst van de berekening ook ‘werkelijk’ klopt. Jesse bijvoorbeeld merkt eerst op ‘Wat moet ik hiermee?’, en zegt even later: ‘Jullie nemen het gewoon te serieus. Je moet je fantasie laten werken bij rekenen.’ Verschillende leer-

lingen laten ook inderdaad zien dat ze over de nodige fantasie beschikken. Femke krijgt het zelfs voor elkaar om een leeftijd van 275 jaar voor de kapitein (een voorstel van Freudenthal om een onmogelijk hoge leeftijd te kiezen) als volgt te rechtvaardigen: ‘Het zou kunnen dat de kapitein in een soort coma heeft gelegen, bijvoorbeeld honderd jaar, en toen leefde hij weer even. En toen kwam hij later weer bijvoorbeeld vijftig jaar in coma’.

Hier tegenover staan de leerlingen die sceptisch opmerken: ‘Het is gewoon onzin’.

Van de onderzoeksgroep van De Goeij behoort de helft van groep 5 tot deze categorie; de andere helft bestaat uit fantasierijke verhaaltjes-vertellers zoals Jesse en Femke. Overigens blijkt uit onderzoek van Stern (1992) dat indien kinderen bij de aanbieding van tekstopgaven vooraf de aanwijzing krijgen dat niet alle vraagstukken zijn op te lossen, veel minder kinderen via een fantasieverhaal een oplossing trachten te vinden, maar simpel vaststellen dat de opgave niet kan worden gemaakt.

3 Voorlopige conclusie

Algemeen gesteld handelen de leerlingen vaak ‘proefondervindelijk’, dus zoals ze denken dat de proefleider of leraar meent dat ze in de betreffende situatie moeten handelen. Het ‘slimme’ kind verplaatst zich in de onderzoeker, maar omgekeerd de ‘domme’ onderzoeker zich niet altijd in het kind - althans niet in de eerste experimenten van de jaren tachtig waarin het rekenonderwijs als de hoofdschuldige van het vermeende ondoordachte rekengedrag van kinderen werd aangemerkt.

Al met al levert de kapiteinsopgave interessant onderzoek op met opmerkelijke uitkomsten en hilarische toelichtingen. Maar het is toch vooral de algemene strekking ervan die het onderzoek niet alleen amusant, maar ook belangwekkend maakt: wees er als onderzoeker op bedacht dat kinderen de specifieke situatie waarin het onderzoek plaatsvindt, uitdrukkelijk in hun rekengedrag betrekken waardoor ze lang niet altijd louter logisch - rationeel handelen. Is dit niet een triviale vaststelling? Bij het kapiteinsprobleem is deze grondregel, zoals we zagen, niet altijd in acht genomen. De vraag is nu of dit gebrek aan inlevingsvermogen bij de onderzoeker meer in het algemeen voorkomt bij onderzoek op het gebied van rekenen-wiskunde.

4 Onderzoek over aanvankelijk getalbegrip

Om deze vraag te beantwoorden richten we onze aandacht op een van de bekendste proeven met betrekking tot

het aanvankelijke rekenen, uitgevoerd door de invloedrijkste cognitieve psycholoog van de twintigste eeuw: het zogenoemde conservatie-experiment van J. Piaget (1952). Iedereen die op het terrein van het rekenonderwijs werkzaam is zal het ongetwijfeld kennen, dit befaamde experiment dat zo'n grote invloed op de inrichting van het aanvankelijk rekenonderwijs in de tweede helft van de vorige eeuw heeft gehad.

De onderzoeker laat een vier- of vijfjarig kind twee even lange rijen met bijvoorbeeld zes kopjes en zes schoteltjes zien, en vraagt of er meer kopjes of schoteltjes zijn. 'Evenveel', luidt het antwoord. Blijkbaar doorzien de kinderen van die leeftijd de één-op-één koppeling.

Vervolgens maakt de proefleider de rij van de kopjes langer (zonder er kopjes bij te zetten) en vraagt opnieuw of er nu meer kopjes of schoteltjes zijn. In deze situatie komt het kind tot de conclusie dat er meer kopjes zijn; het wordt kennelijk door de lengte van de rij misleid.

Piaget concludeert hieruit dat het kind dus nog geen goed getalbegrip heeft ontwikkeld. Of in vaktaal gesteld, dat het getal nog niet is 'geconserveerd', dus niet bestand is tegen de visuele afleider van het langer maken.

Pas in de loop van de jaren zestig kwamen de onderzoekers Mehler en Bever op de gedachte om dit klassieke experiment uit de jaren dertig en veertig ook eens met twee- en driejarigen uit te voeren. En wat bleek? Deze jonge kinderen lieten zich niet door het verlengen van die ene rij misleiden (zie Treffers & De Moor, 1980, pag.37)!

Hoe valt dit te verklaren? Wel, zo rond een jaar of vijf beginnen kinderen het vermogen te ontwikkelen om het standpunt van een ander in te nemen en vanuit die andere persoon te redeneren: 'De onderzoeker stelt weliswaar precies dezelfde vraag als daarnet, maar blijkbaar bedoelt hij welke rij de langste is, want dat is wat er veranderde' - dit in grote-mensentaal geformuleerd, want een kind van die leeftijd kan zijn eigen denken uiteraard nog niet in deze bewoordingen samenvatten. Blijkbaar probeert een vijfjarige de verwachtingen van een ander te doorzien.

Om deze alternatieve verklaring van het 'conservatiegedrag' van jonge kinderen verder te onderbouwen, bedachten dezelfde onderzoekers een ander experiment. In plaats van kopjes en schoteltjes presenteerden ze twee rijen met snoepjes (M&M's). De ene rij bevat er zes en de andere, de langere, slechts vier. Nu vroegen ze niet in welke rij de meeste snoepjes lagen maar welke rij snoepjes het kind graag wilde hebben. De kinderen wezen zonder aarzelen de korte rij van zes snoepjes aan. Die was blijkbaar goed geconserveerd en werd vervolgens lekker geconsumeerd door zowel de twee- als vijfjarigen.

In de jaren zeventig werd door McGarrigle en Donaldson nog een andere, minder inhalige variant bedacht. In een spelsituatie veranderde een teddybeer de lengte van de eerder genoemde rij met kopjes zonder dat de proefleider die zich omkeerde dit had gezien. En vervolgens vroeg de

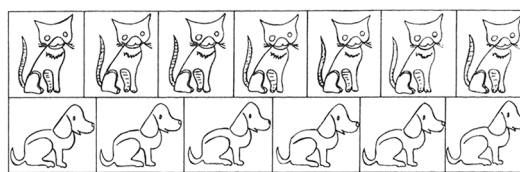
onderzoeker aan het kind die wel zag wat het beertje deed: 'O jee, de beer heeft aan het rijtje gezeten. In welke rij staan nu meer voorwerpen?'

Vanuit het kind gezien is dit een legitieme vraag, omdat de onderzoeker niet precies had gezien wat er gebeurde. Zowel de twee- als de vijfjarigen gaven hier het correcte antwoord.

Maar als de experimentator zelf de rijen veranderde, dan waren de uitslagen bij de vier- en vijfjarigen exact dezelfde als bij Piaget, en bij de twee- en driejarigen dezelfde als in de proeven van Mehler en Bever.

Is dat niet wonderbaarlijk?

Teruggekoppeld naar het kapiteinsprobleem zouden we kunnen zeggen dat het eerste, Franse onderzoek Piageti-aans van opzet is, en dat het onderzoek van onder meer Selter en Spiegel overeenkomt met dat van Mehler en Bever en van McGarrigle en Donaldson, welke ook in de lijn van Freudenthal liggen, wat wil zeggen dat ze ook rekening houden met de 'proefondervindelijke' redeneer- en zienswijze van de onderzochte personen in casu van de jonge kinderen in de onderscheiden leeftijdscategorieën. Van den Brink (1979) gaat nog een stap verder en plaatst het begrip conservatie in een didactische context. Hij legt de volgende grafiek met honden en poezen aan leerlingen van groep 3 voor (fig.2).



figuur 2

De bedoeling is de kinderen bij verrassing te laten ontdekken dat de eenheden van een dergelijke grafiek even groot moeten zijn. De perceptieve indruk van de grafieken op de kinderen is zo groot dat ze direct, zonder te tellen, aannemen dat er evenveel poezen als honden zijn: 'Want de rijen zijn even lang'. Overigens is het een belangrijk didactisch punt deze indruk niet te verstoren! Daarna knippen de kinderen de poezen en honden uit en plakken ze als 'vriendje-naast-vriendje' op een stuk papier. Als er een poes overblijft, is de verwarring onder de kinderen groot. 'Een toverpoes', verklaart een leerling. Een ander gaat ijverig onder tafel zoeken of er soms een hond gevallen is. (pag.77)

Van den Brink stelt vast dat deze situatie de kinderen stimuleert om naar een verklaring van de tovertruc te zoeken dat de conservatie van het aantal wordt verstoord - een goede aanleiding om te leren dat de eenheden van de grafiek even groot moeten zijn. Door deze cognitieve conflictsituatie ontstaat als het ware een denkcrisis die er toe kan leiden dat een bepaald begrip verhelderd wordt. Hij besluit met de aanbeveling dat het onderwijs zich niet alleen moet beperken tot het signaleren van onderwijssituaties die bij de kinderen, en ook bij onszelf, verwondering wekken maar dat aansluitend daarop vakbekwamend onderwijs dient te volgen.

5 Invloed van onderzoek op het aanvankelijk rekenonderwijs

Rest de vraag die nog openstaat hoe het komt dat de beschreven conservatieproef van Piaget zo'n grote invloed op het aanvankelijk rekenonderwijs in de groepen 1 tot 3 heeft gehad.

Wel, de volgelingen van Piaget hebben uit het vermeende, falende conservatiegedrag de conclusie getrokken dat de ontwikkeling van het getalbegrip niet door tellen gestimuleerd wordt, omdat tellen bij jonge kinderen voornamelijk een verbale handeling is die dezelfde betekenis heeft als het opzeggen van een versje en aanvankelijk dus niets met het kunnen bepalen van hoeveelheden van doen heeft. En als jonge kinderen al wel aantallen kunnen bepalen, dan zijn ze in de regel toch nog niet in staat om zinvol met die resultaten te redeneren en te rekenen.

Als het onderwijs al invloed op de ontwikkeling van het getalbegrip wil hebben, dan zal het zich voornamelijk op de redeneerbekwaamheden moeten richten die aan het kunnen bepalen van hoeveelheden ten grondslag liggen. Een van die kundigheden is het één-op-één kunnen koppelen van objecten uit twee collecties. Om daartoe in staat te zijn, moeten ze die objecten in twee geordende rijen kunnen plaatsen, om vervolgens die koppeling te kunnen maken. En ten slotte moeten ze dan in staat zijn om vast te stellen welke rij meer objecten heeft. Kortom, het kunnen bepalen van meer, minder of gelijk via éénduidige koppelingen is een van de voorwaarden voor getalbegrip en het kunnen werken met getallen. Tellen op zich heeft weinig betekenis en dient aanvankelijk zoveel mogelijk op de achtergrond te blijven - aldus de Piagetianen.

In de beginperiode van Wiskobas ondervond deze vernieuwingsbeweging dan ook veel weerstand uit Piagetiaanse hoek tegen het accent dat zij bij de ontwikkeling van het getalbegrip op het tellen plaatste. Vandaag de dag is de aloude opvatting dat tellen bij de ontwikkeling van het getalbegrip van grote betekenis kan zijn, echter weer in ere hersteld. De oorzaak daarvan ligt mede in de straks

genoemde experimenten van Mehler en Bever en van McGarrigle en Donaldson, die allen een andere interpretatie aan het genoemde conservatie-experiment van Piaget toekenden, al dient gezegd dat er ook al eerder bezwaren tegen Piagets onderzoeksoepzet waren gemaakt, onder meer door Freudenthal (1973).

Dat kinderen anders denken dan volwassenen soms denken, heeft niet alleen gevolgen voor het onderzoek, maar zeker ook voor het onderwijs, zoals onder meer Van den Brink en Selter en Spiegel aangeven, zij het met dezelfde moraal, namelijk dat je moet proberen te achterhalen hoe kinderen denken, om daar vervolgens in het onderwijs op te kunnen aanhaken.

Literatuur

- Brink, J. van den (1979). Wiskundige wereldoriëntatie. Realistisch Wiskundeonderwijs. *Wiskobas bulletin*, 8(3), 76-81.
- L'Equipe 'Elémentaire de l'IREM de Grenoble (1980). Quel est l'âge du capitaine? *Bulletin APMEP*, 323.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel P.C.
- Freudenthal, H. (1980). Wat is onderzoek van onderwijs? - een paradigma. In: S. Pieters (red.). *De achterkant van de Möbiusband*. Utrecht: IOWO, 11-16.
- Goeij, E. de (2005). *Hoe oud is de kapitein?* Utrecht: Freudenthal Instituut (intern verslag).
- McGarrigle, J. & M. Donaldson (1974). Conservation Accidents. *Cognition*, 3, 341-350.
- Mehler, J. & T.G. Bever (1967). Cognitive Capacity of Very Young Children. *Science*, 158, 141-142.
- Piaget, J. (1952). *The Child's Conception of Number*. New York: Norton.
- Radatz, H. (1983). Untersuchungen zum Lösen eingekleideter Aufgaben. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 3, 205-217.
- Selter, C. & H. Spiegel (1997). *Wie Kinder rechnen*. Düsseldorf: Klett.
- Spiegel, H. & C. Selter (2003). *Kinder und Mathematik. Was Erwachsenen wissen sollten*. Seelze-Velber: Kallmeyer.
- Stern, E. (1992). Warum werden Kapitänsaufgaben 'gelöst'? *Mathematikunterricht*, 38(5), 7-30.
- Treffers, A & E. de Moor (1990). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2: Basisvaardigheden en cijferen*. Tilburg: Zwijssen.

Freudenthal called the observation and interpretation of learning processes a didactical means. Van den Brink's work has been strongly guided by this didactical tenet. That this guideline is not quite simple as it seems, comes to the fore in the different interpretation of Piaget's conservation experiment. And even more telling in this respect is the research concerning the so-called 'captain's problem' ('How old is the captain of a boat with 26 sheep and 10 goats?').

For this problem we discuss the fine study of Selter and Spiegel, and for the conservation problem we look at the famous research of Mehler and Bever, and of Garrigle and Donaldson which both examined Piaget-oriented early arithmetic.