Cijferen, hoe nu verder?

W. Koersen & W. Uittenbogaard
Hogeschool INHOLLAND, Alkmaar

Inleiding

In vrijwel geen enkel ander land bestaat er een woord voor ‘cijferen’. In het Nederlands wel. Het heet hier ook wel ‘onder elkaar zetten’. Zowel het woord ‘cijferen’ als de aanduiding ‘onder elkaar zetten’ geeft aan hoe je te werk gaat. Het gaat om een procedure waarbij je cijfer voor cijfer te werk gaat en de getallen daarvoor nauwkeurig onder elkaar zet. In andere landen heet cijferen ‘een algoritme gebruiken’. Amerikaanse kinderen zetten vrijwel alles onder elkaar, ook omdat ze dat al vanaf groep 3 zo leren. Dat doen ze zelfs als ze optel- en aftreksommen al gememoriseerd hebben. Bij veel kinderen gaat 7 + 8 als volgt:

$$\begin{array}{rl} {}^{1} & \\ 7 & \\ \underline{8} & + \\ 15 & \end{array}$$

seven plus eight is fifteen, put down the five and carry the one. One down, fifteen.

Het is lastig om kinderen te laten inzien, dat ze het antwoord halverwege hun versje al een keer zijn tegengekomen. Ook een opgave als 1002 – 998 wordt vrijwel altijd cijferend opgelost en is daarmee is ook een van de lastigste aftrekkingen. Vroeger was goed leren cijferen ook leren voor later. Tot dertig jaar geleden maakten banken, belastingdiensten, salarisadministraties en winkels voor een belangrijk deel gebruik van papier en pen. Die werden in de loop der tijd stukje bij beetje vervangen door mechanische rekenmachines. Men kan met een gerust hart stellen dat er nu in de westerse wereld geen beroepen meer zijn waar - misschien op een enkele uitzondering na - snel en foutloos cijferen toegepast wordt.

Stukjes touw van 2 meter 75

In de laatste Cito PPON (einde basisonderwijs 2006) stond de volgende opgave:

> De juf heeft voor de handenarbeidles stukken touw van 2,75 meter nodig. Ze heeft een bol van 80 meter. Hoeveel stukken van 2,75 meter kan ze daar in totaal uithalen?

Ongeveer 10 procent van de Nederlandse kinderen in groep 8 kan dat vraagstukje goed oplossen, zo stelde het Cito vast. Het is in onze ogen verbazingwekkend dat zo weinig kinderen deze opgave correct beantwoorden. We besluiten dit vraagstukje voor te leggen aan kinderen op een basisschool, aan mensen die we tegenkomen op straat en aan studenten in de lerarenopleiding. We beginnen bij deze laatste groep. We kiezen voor eerstejaarsgroepen. In alle groepen waar we dit vraagstukje hebben voorgelegd, kon minder dan een kwart van de studenten het probleem redelijk snel en foutloos oplossen.
Als we aan studenten vragen hoe zij denken dat kinderen in de basisschool het er vanaf brengen, denken ze daar heel positief over. Ze noemen in het algemeen goed-percentages tussen de 50 en de 90; vaker dicht in de buurt van de 90. We dwingen de studenten ook tot een blikwisseling. In de eigen groep maakt minder dan een kwart van de studenten het vraagstuk goed. Denken zij werkelijk dat het aan basisschoolleerlingen zo goed wordt onderwezen en dat dat de verschillen verklaart?
Snel wordt duidelijk waar de moeilijkheden zitten. Natuurlijk moet je in het probleem een deling herkennen. Maar als je kiest voor een cijferende aanpak, krijg je een van de moeilijkste delingen voor je neus: 80 : 2,75. Een niet opgaande deling met in de deler een komma.
Dan maar eens de straat op. Op de markt in IJmuiden staat wekelijks ‘ome Herman’ met zijn groenten- en fruitkraam. Hij is 68 jaar oud en heeft de zaak bijna aan zijn zoon overgedaan. Ome Herman ziet kans, terwijl je van alles bij hem bestelt, een gesprek met je te voeren. Als je dan op zijn zoveelste vraag: ‘anders nog iets?’, ‘nee, dank u’ antwoordt, noemt hij onmiddellijk het totaalbedrag.

figuur 1: ome Herman in z’n kraam

Een kwestie van ‘doortellen’ noemt hij het. Ook heeft hij

geen problemen om snel over te schakelen naar de volgende klant.
Ome Herman het vraagstukje ook maar eens voorgelegd. Na een paar keer proberen,‘36, nee dat is veel te veel’, geeft hij het toch op. We houden het op een stuk of 30.

figuur 2: patatboer voor zijn kraam

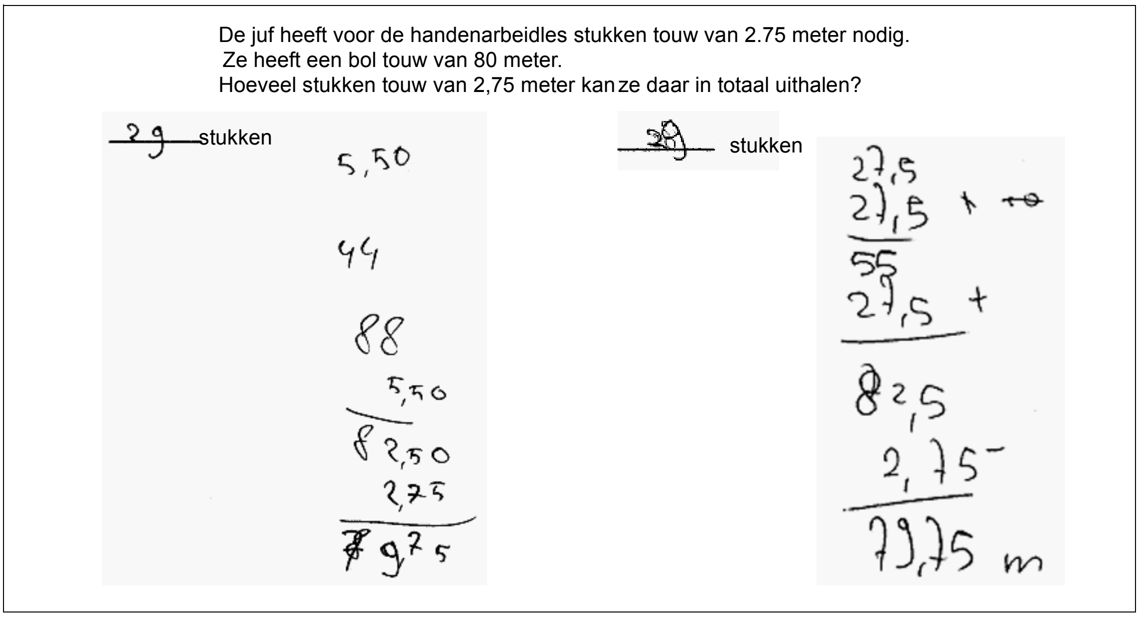
De patatboer (fig.2) is er razendsnel mee klaar. ‘Twee stukken is 5,5 meter. Vier stukken is 11 meter. 28 stukken is 77 meter. Dus 29 stukken’. Ik denk dat de patatboer veel vaker opvermenigvuldigingen maakt dan de groenteboer. Je verkoopt nu eenmaal veel vaker vier keer een patatje oorlog dan vier komkommers.
We leggen de vraag ook voor aan andere marktbezoekers. Zij brengen er minder van terecht dat de marktkooplieden. En, ze schamen zich wel een beetje als je vertelt dat het om een basisschoolopgave gaat.

> Ik doe eerst 90 gedeeld door 3. Dat is 30. De stukken zijn geen drie meter, maar 2,75. Ik heb dus 30 keer een kwart meter teveel gebruikt. Dat is 7,50 meter. 30 stukken van 2,75 is 82,50 meter. De juf heeft maar 80 meter, dus één stuk minder: 29 stukken’.

We vinden het een briljante oplossing en dat laten we Eva weten ook!
In figuur 3 ziet u het werk van Jordi en Daan. Jordi gebruikt verdubbelstrategieën, terwijl Daan gebruikmaakt van tien keer. Dat Eva, Daan en Jordi veel geleerd hebben, is duidelijk. We denken echter wel dat veel andere leerlingen dankzij het genoten onderwijs dit probleem niet kunnen oplossen. Zij hebben kennelijk geleerd om een probleem in een bewerking te vertalen en niet na te denken over een gezond-verstandaanpak. De cijferende aanpak is weinig succesvol.

Een kijkje in groep 4

We besluiten ook te kijken naar aanpakken van kinderen in groep 4 die nog niet te maken hebben gehad met kolomsgewijs rekenen of een andere cijfermatige aanpak. In de groep waar we kijken zijn ze bezig met het rekenen tot 100. Dat doen ze overwegend rijgend. We willen wel eens zien hoe ze optellingen met twee getallen van drie cijfers aanpakken.
Met ronde honderdtallen hebben de kinderen die wij



figuur 3: werk van Jordi en Daan

In de basisschool gaan we aan het werk met een stuk of vijf duo’s uit groep 8. Ook hier wordt duidelijk dat de leerlingen die een deling opschrijven, vastlopen in de uitwerking ervan. Eva doet het helemaal uit haar hoofd. Zij schrijft alleen 29 op.
Gevraagd naar haar denken, zegt ze:

spreken geen problemen. Bij 320 + 400 splitsen de meeste kinderen die 20 even af en doen die bij 700. Roxenne krijgt daar 360 als antwoord. Ze heeft van een meester de ‘nultruc’ geleerd. Haal eerst alle nullen weg: 32 + 4, en dan een nul weer terug. ‘Waarom geen twee nullen terug, of zelfs geen drie?’, vragen we. Als we een

poosje met haar werken ziet ze in hoe de ‘nultruc’ echt werkt. We nemen ook onze toevlucht tot grote getallen. We proberen 1000 + 10 en ook 10.000 + 100 en zelfs 1.000.000 +10. Maar ook 700 + 20. ‘Ja’, zegt Roxenne, ‘één nul van allebei eraf: 70 + 2. En dan één nul erbij: 720’. In het werken met deze leerlingen uit groep 4 wordt duidelijk hoe ze te werk gaan. Soms kun je de getallen zomaar optellen. 517 + 210 wordt bij veel leerlingen in één keer 727. Soms, als het kennelijk niet overzichtelijk genoeg is, wordt er wat afgesplitst. De ene leerling splitst de lossen af en vindt een aanpak om om te gaan met de tienen, een ander maakt de splitsing anders. 713 + 101 wordt eerst 700 + 100 en dan nog 13 + 1. Samen 814.
We hebben niet het gevoel dat we hoognodig met een kolomsgewijze aanpak zouden moeten beginnen om deze kinderen verder te brengen. Leerlingen kunnen zich heel goed redden met een handige en informele werkwijze. Als daar binnen methoden en bij leerkrachten wat meer ruimte en aandacht voor zou zijn, zouden we aan cijferende aanpakken minder aandacht kunnen besteden.

Een zakje appels

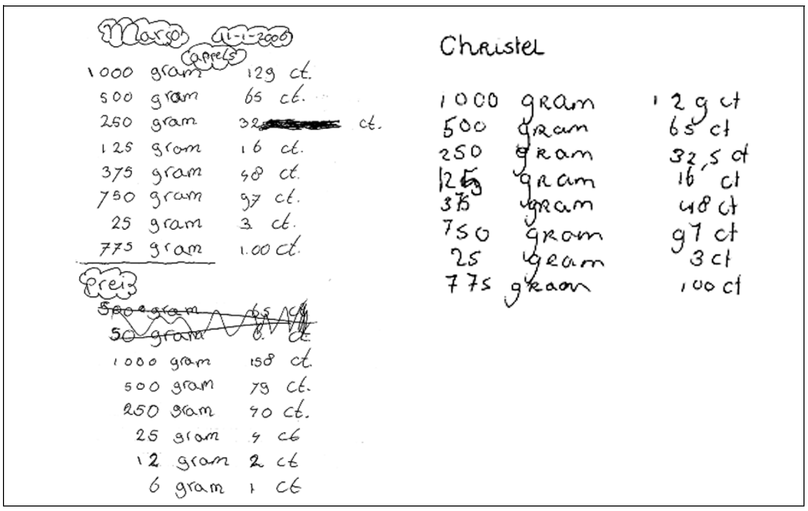
figuur 4

We gaan verder op onderzoek en geven in groep 7 een les met een zakje appels. We kochten de appels de dag ervoor bij de buurtsuper (zie ook Uittenbogaard (in druk)). Het idee is het volgende: zouden leerlingen op een etiket van 0,774 kg van 1,29 euro per kilo een vermenigvuldiging herkennen? En hoe zouden ze dat dan oplossen? We maken in de winkel twee etiketten (fig.4). Na een (lange) introductie, waarin de prijs van één appel, het hele zakje en de manier waarop je zoiets doet in een winkel aan de orde komen, komen we uiteindelijk op het eigenlijke probleem uit. We bespreken het etiket uitvoerig. Alle kleine lettertjes worden nader bestudeerd. Dan gaan de leerlingen aan het werk. Ze proberen in tweetallen de prijs op het etiket te achterhalen. Het valt ons op dat geen van de leerlingen in het probleem een vermenigvuldiging herkent. Na verschillende interventies, die aanpakken van sommige kinderen laten zien, komen we gezamenlijk tot een soort van rijtjesaanpak.

Het werk van Christel en Margo

Na een nabespreking waarin die rijtjesaanpak centraal staat geven wij de leerlingen nog een verwerkingsopdracht met andere etiketten (fig.5).

figuur 5



figuur 6: het werk van Margo en Christel

Op het werkblad van Margo en Chantal is te zien hoe zij de etiketten van de prei hebben aangepakt (fig.6).
We stellen vast dat als je onderwijssituaties organiseert waarin leerlingen strategieën kunnen ontwikkelen om net zo dichtbij de prijs van een zakje appels te komen als je zou willen, je het voortgezet cijferen met kommagetallen achterwege kunt laten. Verstandig gebruik van een rekenmachine lijkt ons veel zinniger.
Dat sluit ook aan bij wat wij zien als de essentie van het leren van wiskunde. Dat is het ontdekken van patronen, van mogelijke regelmaat, maken van verkortingen en het ontwikkelen van een regel. En natuurlijk ook het warme gevoel van het toepassen van een ontdekte regel. Ook het ontdekken van korte procedures voor het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen behoren wat ons betreft tot de wiskunde. Je zou dus het ontwikkelen van algoritmische aanpakken moeten insluiten bij het leren en bedrijven van wiskunde. Het gaat er echter niet om deze aanpak stevig in te oefenen.

Tot slot

Onze zoektocht met een PPON-opdracht in de hand en later met gepaste werkbladen voor leerlingen in de basisschool leerde ons het een en ander over het leren rekenen. We ontdekten dat kolomsgewijs rekenen ook een vorm van cijferen is. In alle methoden komt die naar voren en daar wordt derhalve gekozen voor een vaste, regelgeleide aanpak, met weinig ruimte voor eigen aanpakken en ontdekkingen.
We ervoeren dat de situatie in de scholen feitelijk erger is. Veel scholen zetten, boven op het leren van kolomsgewijze aanpakken van links naar rechts voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, nog een leergang voor traditionele cijferalgoritmen (van rechts naar links). Meestal los van de methode. Wellicht denkt de leerkracht of het team dat leerlingen hier nu of later veel aan hebben. Voor goed, snel en foutloos kunnen cijferen bestaat geen later meer. Maar dat hebben veel leerkrachten en ouders in onze ogen niet in de gaten. Ze denken ten onrechte dat goed kunnen cijferen, voor leerlingen de weg naar het gymnasium plaveit. Auteurs van reken-wiskundemethoden bevestigen dit beeld, door stevig in te zetten op het kolomsgewijze rekenen. Zij zouden in onze ogen voor de methoden die verschijnen rond 2010 de durf moeten hebben om regelgeleide aanpakken in bewerkingen met getallen weg te laten.

Laten we afsluiten met drie vaststellingen:
- Ook de TAL-publicatie ‘Kinderen leren rekenen’ is aan de zeer voorzichtige kant. De publicatie kiest toch de kant van de behoudende leerkracht en ouder.
- Veel instromende mbo-opgeleide studenten hebben zich suf geoefend op cijferalgoritmen en denken bij voorbaat dat het daarom gaat in het basisonderwijs.
- De geschiedenis van het cijferen, het maken van al die verkortingen kan een rijke bron zijn voor ons huidige rekenonderwijs, met name in wiskundig opzicht.

Literatuur

Jansen, J., F. van der Schoot en B. Hemker (2005). *Balans (32) van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4*. Arnhem: Cito-groep.

Treffers, A., M. van den Heuvel-Panhuizen & K. Buys (eds.). (1999). *Jonge kinderen leren rekenen. Tussendoelen Annex Leerlijnen. Hele getallen onderbouw basisschool.* Groningen: Wolters-Noordhoff.

Uittenbogaard, W. (in druk). Een zakje appels. *Volgens Bartjens...*

Panama Praktijktip nummer 104

Cijferen of handig rekenen?

De volgende opdracht is als toetsopgave aan leerlingen voorgelegd in het PPON-onderzoek.

> De juf heeft voor de handenarbeidles stukken touw van 2,75 meter nodig.
> Ze heeft een bol van 80 meter.
> Hoeveel stukken van 2,75 meter kan ze daar in totaal uithalen?

a. Reken uit.
b. Welke aanpak is efficiënter: cijferen of handig rekenen? Waarom?

Hier zie je enkele prijsstickers voor uien, tomaten en prei.
De prijs is weggelaten.

c. Hoe ga je te werk om een goede indruk van de te betalen prijs te krijgen?