



Het actor's en observer's perspectief: een analyse vanuit een meetkundeapplet¹

N. Figueiredo, K.P.E. Gravemeijer & F.H.J. van Galen
Flsme, Universiteit Utrecht

Bij het ontwerpen van reken-wiskundeopgaven probeert een ontwerper te voorspellen hoe leerlingen op de opgaven zullen reageren. Leerlingen kunnen echter heel anders naar opgaven kijken dan ontwerpers of leerkrachten. Men spreekt in dit verband van een verschil tussen het 'actor's perspectief' en het 'observer's perspectief'. Bij het ontwerpen van computeropgaven speelt deze spanning nog meer dan bij het ontwerpen van klassikaal onderwijs, waar de leraar kan bijsturen. In dit artikel gebruiken we een onderzoek bij een meetkundige applet om preciezer na te gaan wat deze twee perspectieven in de praktijk inhouden. We proberen daarbij aanwijzingen te vinden die van belang zijn voor het ontwerpproces.

1 Inleiding

Volgens het socio-constructivisme construeert de leerling in de reken-wiskundeles zijn eigen kennis. Dit is ook het basisidee van realistisch reken-wiskundeonderwijs (RME): 'de leerling construeert zijn/haar eigen wiskunde', waarbij het onderwijs georganiseerd wordt volgens het principe van *guided reinvention*.

In deze opzet probeert de ontwerper vooraf te bedenken hoe leerlingen via een reeks van taken en daaraan gerelateerde redeneringen, de beoogde wiskunde kunnen ontdekken. Het probleem is echter dat mogelijke reacties op de taken door de ontwerper vooraf moeten worden bedacht. Dit vraagt van de ontwerper dat hij door de bril van de leerlingen naar de opgaven kijkt. Men spreekt in dit verband wel van het verschil tussen een *actor's* en een *observer's* perspectief (Gravemeijer, 2004; Cobb & Bowers, 1999; Cobb, 1987).

Bij het ontwerpen van computeropgaven speelt de spanning tussen deze twee perspectieven nog meer dan bij het ontwerpen van klassikaal onderwijs, omdat de leraar daar bij kan sturen.

Een extra complicatie is dat we niet precies weten wat het verschil in perspectief in de praktijk precies inhoudt, en daardoor ook niet hoe je er als ontwerper effectief rekening mee kunt houden.

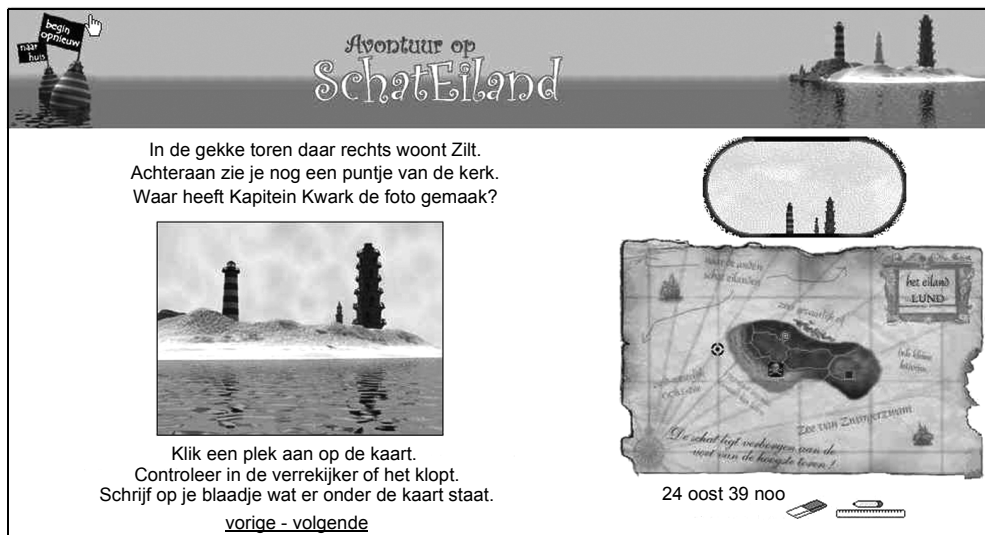
Het doel van dit artikel is om preciezer na te gaan wat de twee perspectieven in de praktijk kunnen inhouden en na te gaan of we daar aanwijzingen aan kunnen ontleen die van belang zijn in het ontwerpproces. Hiertoe gaan we uit van een onderzoek bij een meetkundige applet.

2 Context van het onderzoek en vraagstelling

Kijkmeetkunde is een rijk onderwerp binnen de meetkunde voor de basisschool. Daarbij horen allerlei activiteiten waarbij leerlingen verschillende standpunten in nemen, en objecten vanuit die verschillende posities bekijken en beschrijven (TAL-team, 2004). De wereld om je heen is voor kinderen de beste situatie om ervaringen op te doen en te leren over dit soort zaken. Naast zulke activiteiten in de echte, driedimensionale wereld zijn er ook zinvolle activiteiten mogelijk binnen de digitale wereld van de computer. Computerprogramma's - we zullen meestal het woord 'applets' gebruiken - bieden leerlingen de mogelijkheid om het kijken te onderzoeken op een manier die in de werkelijkheid niet altijd mogelijk is. In dit artikel doen we verslag van een exploratief onderzoek naar kijkmeetkundeopgaven die zijn ontworpen bij een bestaande meetkundeapplet. Dit applet, dat we in het artikel 'het eiland' zullen noemen, is gebruikt bij het computerspel 'Schateiland' (fig.1).²

Het is de bedoeling dat leerlingen door te werken met dit computerspel allerlei ontdekkingen doen op het gebied van kijkmeetkunde. Het verhaal gaat over kapitein Kward die rondom het eiland Lund vaart waar drie torens te zien zijn: een vuurtoren, de toren van Zilt en een kerk-toren. Kapitein Kward heeft een verrekijker en de leerlingen kunnen daarmee zien wat de kapitein ook ziet. Door een punt op de kaart aan te wijzen en vervolgens op de verrekijker te klikken, krijgen ze de torens te zien vanuit het standpunt van de kapitein.

In eerste instantie is het onderzoek opgezet om te kijken naar de mogelijkheden van dit applet voor:



figuur 1: het spel 'Schateiland'

- het stimuleren van het gebruik van kijklijnen;
- het stimuleren van het redeneren met kijklijnen op een hoger niveau.

Aanleiding voor dit onderzoek was de constatering van Van Galen (2000) dat leerlingen een weinig reflectieve en probleemoplossende houding toonden bij dit spel, terwijl dat juist wel de bedoeling was. We gingen er vanuit dat er mogelijkheden waren om het applet bij nieuwe opgaven zo in te zetten dat reflectie beter van de grond zou komen.

Het stimuleren van het gebruik van kijklijnen sluit aan bij het idee van heruitvinden. Het begrip 'kijklijnen' zou de leerlingen, naar we aannamen, nog niet bekend zijn. We wilden zien of de leerlingen zelf op het idee zouden komen om (kijk)lijnen te gaan gebruiken. Het tweede doel had te maken met het idee van verticaal mathematiseren. We wilden uitzoeken hoe het applet gebruikt kon worden om generalisatie van meetkundige constructies met kijklijnen te stimuleren.

Bij het ontwerpen van de opgaven is zorgvuldig naar de context en de formulering van de opgaven gekeken, opdat deze zoveel mogelijk zou aansluiten bij wat leerlingen al wisten en konden. We hoopten hen zo te stimuleren om eigen, informele strategieën te gebruiken. Daartoe werd van tevoren een hypothetisch leertraject (Simon, 1995) bedacht (meer hierover verderop in dit artikel). De leerlingen kwamen echter met allerlei interpretaties en oplossingsmanieren die door de ontwikkelaars/onderzoekers niet op die manier waren voorzien en die we graag wilden begrijpen. We besloten daarom het onderzoek te richten op wat leerlingen anders deden, om daar verklaringen voor te vinden.

De onderzoeksvraag werd: 'In welk opzicht verschillen de redeneringen van de leerlingen van die die de ontwerper verwachtte, en hoe kunnen deze verschillen worden verklaard?'

Voordat we ingaan op de beschrijving en bevindingen

van dit onderzoek, schetsen we eerst het theoretische kader dat als basis diende voor het beantwoorden van de onderzoeksvraag. Daarna geven we een beschrijving van het ontwerp en de verwachtingen (het hypothetische leertraject) van de ontwerpers. Vervolgens gaan we in op de onderzoeksopzet en analysemethode. In de daarop volgende paragraaf bespreken we hoe leerlingen de opgaven anders hebben gemaakt dan de ontwerper had verwacht en hoe we die interpretaties en redeneringen van de leerlingen kunnen begrijpen wanneer we een onderscheid maken tussen het *actor's* en *observer's* perspectief. In de paragraaf 'discussie en aanbevelingen' plaatsen we onze bevindingen in een theoretisch kader om zo meer grip te krijgen op de verschillen tussen deze twee perspectieven.

3 Theoretisch kader

Het denken over leren en onderwijzen wordt tegenwoordig gedomineerd door het constructivisme, in de zin dat het idee dat 'leerlingen hun eigen kennis construeren' de basis vormt voor hedendaagse onderwijstheorieën. Volgens het socio-constructivisme worden deze constructies beïnvloed door de interactie van leerlingen met hun omgeving. Het leren van wiskunde wordt gezien als een proces waarin leerlingen als groep, samen met de leraar, kennis ontwikkelen. Cobb, Yackel & Wood (1992) noemen die kennis *taken as shared*, omdat we nooit zeker kunnen weten of die kennis werkelijk gedeeld is. Leerlingen en leraar bouwen samen gedeelde kennis op, in een proces dat beïnvloed wordt door de 'sociale normen' en de 'sociaal-wiskundige normen' van de klas. Deze normen refereren aan de verwachtingen die leerlingen en leraar hebben over ieders rol, het leren van wiskunde, de relatie met de wiskundige taken, hun opvattingen over wat wiskunde is en over hoe daaraan in de

klas wordt gewerkt. Het idee dat leerlingen hun eigen kennis construeren, is in overeenstemming met Freudenthal's idee van wiskunde als menselijke activiteit (Freudenthal, 1973), dat aan de basis ligt van het realistisch reken-wiskundeonderwijs. Volgens dit idee moeten leerlingen de mogelijkheid krijgen wiskunde te leren door te mathematiseren, dat wil zeggen, door zowel zaken vanuit de alledaagse werkelijkheid als vanuit de eigen wiskundige activiteit te organiseren. Belangrijk hierbij is dat wat georganiseerd moet worden, betekenisvol voor de leerling moet zijn.

Echter, wat voor de ene leerling reëel is, hoeft dit voor een andere niet te zijn. Op dezelfde wijze geldt, dat wat reëel is voor de leraar, dat niet voor de leerling hoeft te zijn. In dit kader wijst Van Hiele (1973) op een verschil in referentiekader, dat te maken heeft met een verschil in denkniveau. Van Hiele keek naar de communicatieve processen tussen leraar en leerling en nam daarbij waar dat de begrippen die zij gebruiken vaak niet dezelfde betekenis hebben (Gravemeijer, 1994). Anders dan leerlingen, beschikken leraren over wiskundige kennis die hen een ander referentiekader biedt bij wiskundige begrippen, ook al gebruiken ze dezelfde woorden.

Dit verschil in denkkader is bijvoorbeeld een probleem bij het gebruik van concreet materiaal, zoals de Dienes-blokken, in het onderwijs (Cobb, Yackel & Wood, 1992, verwijzing in Gravemeijer, 2002). Leerlingen kennen de relaties nog niet die ze in de materialen zouden moeten zien. Deze door Bereiter (1985) genoemde *learning paradox*, wordt door Cobb et al. (1992) als volgt toegelicht:

The assumption that students will inevitably construct the correct internal representation from the materials presented implies that their learning is triggered by the mathematical relationships they are to construct before they have constructed them. (...) How then, if students can only make sense of their worlds in terms of their internal representations, is it possible for them to recognize mathematical relationships that are developmentally more advanced than their internal representations? (pag.5)

Leraren en ontwerpers zullen van tevoren moeten proberen te voorspellen hoe het redeneren van de leerling zal verlopen binnen de context van de ontworpen activiteiten. Simon (1995) noemt dit het bedenken van een *hypothetical learning trajectory*. Daarbij helpt het om het leerlingperspectief - het *actor's* perspectief - te gebruiken (Gravemeijer, 2004; Cobb & Bowers, 1999): met welke kennis en inzichten zal de leerling de opgaven interpreteren, welke betekenis zal hij aan de contexten en opgaven ontleen, enzovoort? Zoals het woord *hypothetical* al zegt, zullen de leerlingen in werkelijkheid soms anders redeneren dan wat de leraar of ontwerpers verwachten.

De ontwerper moet dus in staat zijn om te 'zien' hoe de leerling de wiskunde ziet vanuit zijn of haar perspectief, en moet tegelijkertijd oog hebben voor 'onze' wiskunde

die daarin besloten ligt. Ze moeten, wat Ball (1993) noemt, een *bifocal perspective* gebruiken:

Perceiving mathematics through the mind of the learner while perceiving the mind of the learner through the mathematics. (pag.159)

Dit is niet eenvoudig, omdat de ontwerper in de schoenen moet gaan staan van iemand die over minder kennis beschikt. Hij kent de wiskunde en ziet die dus ook in de opgaven. Voor de leerling, die de wiskundige inhoud nog niet kent, is deze wiskunde vooralsnog niet zichtbaar. Behalve dit verschil in kennis van de wiskunde, spelen ook verschillen in verwachtingen een rol. De leraar heeft bijvoorbeeld bepaalde verwachtingen over de mate waarin de context in de oplossing van een wiskundig probleem kan worden betrokken, terwijl de leerling daar andere ideeën over heeft. Men spreekt in dit verband van sociaal-wiskundige normen (Cobb & Yackel, 1996). Gravemeijer (2004, pag.6) gebruikt de volgende verhaaltjes-sommen uit het onderzoek van Verschaffel, Greer en De Corte (2000) om dit te illustreren:

Jim has 5 planks of 2 meters.
How many planks of 1 meter can he make?
John has 4 planks of $2\frac{1}{2}$ meters.
How many planks of 1 meter can he make?

Verschaffel et al. (2000) laten zien dat leerlingen bij beide opgaven meestal tien als antwoord geven, terwijl dit bij de tweede som niet realistisch is. Daar zou het goede antwoord acht moeten zijn, omdat het hele planken moeten zijn. De leerling moet rekening houden met de context van de opgave. Bij de eerste som is iedereen wel overtuigd dat het antwoord tien moet zijn. Ook hier wordt echter de context tot op zekere hoogte genegeerd, want de breedte van de snede, gemaakt door de zaagmachine, wordt namelijk niet meegerekend. Blijkbaar is er een impliciete afspraak dat dit niet hoeft.

De ontwerper moet ook in staat zijn om vanuit het perspectief van de leerling te kijken naar de gereedschappen die de leerling kan gebruiken. Bij de opdrachten die we in dit artikel bespreken fungeerde de verrekijker als het belangrijkste gereedschap. Hoe iets als gereedschap functioneert hangt af van de manier waarop je het gebruikt. In het onderzoek van Doerr en Zangor met de grafische rekenmachine is te zien hoe leerlingen die op verschillende manieren gebruiken. De gevonden rollen van de grafische rekenmachine kunnen we globaal als volgt typeren: als onderzoeksgereedschap (om data te verzamelen of te visualiseren, patronen te vinden, enzovoort), als antwoordhulp (om antwoorden uit te rekenen), als controleapparaat (om vermoedens of antwoorden te controleren) en als transformatiegereedschap (om de aard van de opgave te veranderen). Het gereedschap kunnen we dus opvatten als een construct dat hoort bij een bepaalde praktijk (Lave & Wenger, 1991). Dat wil zeggen dat de kenmerken van het gereedschap niet iets in en van het ding zelf zijn, maar een onderdeel van een construct

dat samenhangt met de handelingen die je ermee uitvoert. Leerlingen gaan het gereedschap begrijpen tijdens het gebruik ervan bij het oplossen van reken-wiskundige problemen (Hiebert et al, 1997). Bovendien wordt dit beïnvloed door de normen in de desbetreffende klassenpraktijk, over hoe het gereedschap gebruikt dient te worden (Doerr & Zangor, 2000). Dit alles verklaart waarom gereedschappen op verschillende momenten in het leerproces anders gebruikt kunnen worden. Het is iets waarmee een ontwerper rekening mee moet houden.

4 Ontwerp en verwachtingen

Voor het onderzoek zijn twee series opgaven ontworpen (opgave 1 tot en met 6 en 7 tot en met 9) rond het eilandapplet, die op verschillende dagen aan de leerlingen werden voorgelegd. Het hypothetisch leertraject achter het ontwerp was dat leerlingen eerst het idee van kijklijnen zouden ontdekken (opgave 1 en 2), vervolgens de lijn als verzameling van kijkpunten zouden gebruiken (opgave 3 en 4), dit zouden kunnen toepassen om een gebied te begrenzen (opgave 5 en 6) en deze ideeën dan zouden toepassen bij het oplossen van complexere opgaven (met kijkhoeken), waarvoor opdracht 7 een inleidende opdracht was (opgave 7, 8 en 9).



figuur 2: opdracht 3: twee torens op de foto

In de eerste serie kregen de leerlingen steeds een verkennende opdracht op de computer en daarna een opgave op papier om de beoogde generalisatie en het gebruik van kijklijnen te stimuleren. Bij de computeropdracht gaat het om het vinden van één punt vanwaaruit je de torens op een bepaalde manier kunt zien en waarbij leerlingen de 'ingebouwde' verrekijker kunnen gebruiken (fig.2). Strikt genomen functioneert de verrekijker overigens niet echt als verrekijker, want in een verrekijker zou je eerder een enkele toren zien dan drie torens samen. Gezien de grootte van de kijkhoek zouden de plaatjes eigenlijk beter van een fototoestel kunnen komen. In dat geval was gekozen voor een verrekijker in verband met het verhaal: je kunt, net als de kapitein, op ieder moment de verrekijker pakken om je te oriënteren.

kijker pakken om je te oriënteren.

Op de kaart kunnen ze een punt in zee aanwijzen. Door vervolgens op de verrekijker te klikken, krijgen ze te zien hoe je vanaf dat punt de torens ziet. Bij de opdracht op papier ging het er vervolgens om het antwoord te generaliseren, door al redenerend een verzameling van kijkpunten te vinden (fig.3).



figuur 3: opdracht 4: de kerktoren

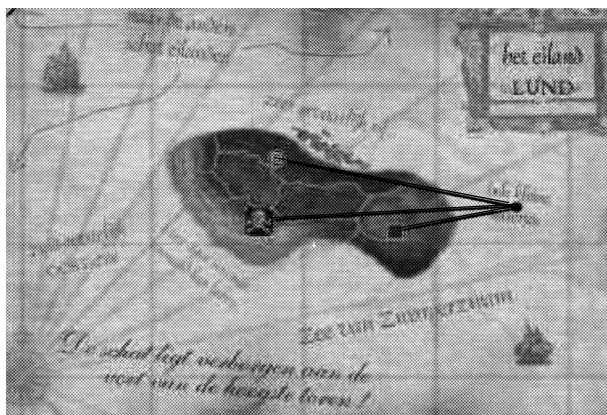
De verrekijker werd dus ingezet als gereedschap bij de verkenning van het probleem, maar was bij de generaliserende opgaven niet meer beschikbaar. Op deze manier wilden we voorkomen dat leerlingen via *trial and error* het antwoord zouden gaan zoeken, omdat dat het generaliseren in de weg zou staan. We verwachtten echter ook dat de verrekijker goed gebruikt kon worden als controleapparaat achteraf en daarom wilden we dit gebruik van de verrekijker toelaten als leerlingen daar om zouden vragen.

De opgaven uit de tweede serie (opgave 7 tot en met 9) zijn allemaal opgaven op papier, waarbij de verrekijker dus niet beschikbaar is. Onze verwachting was dat leerlingen in de eerste serie opgaven dusdanige kennis opgebouwd zouden hebben dat ze in staat zouden zijn hier zonder verrekijker aan te werken. Bij deze opgaven gaat het om kijkhoeken, waarbij de kijkpunten in de opgaven zijn aangegeven. Er wordt weer naar een verzameling van punten gevraagd, dit keer naar plaatsen vanwaaruit je iets op een bepaalde manier ziet.

Opdracht 1 en 2

Bij opdracht 1 wordt een foto gegeven en de vraag gesteld waar deze gemaakt is. Leerlingen kunnen met de verrekijker de plaats zoeken. Bij opdracht 2 krijgen leer-

lingen weer een foto van het eiland te zien en een plaats op de kaart waarvan de kapitein beweert de foto te hebben gemaakt. De leerlingen wordt gevraagd of dit klopt en uit te leggen waarom wel of waarom niet. We verwachtten dat leerlingen een uitleg met gebruik van (kijk)lijnen zouden geven (fig.4).

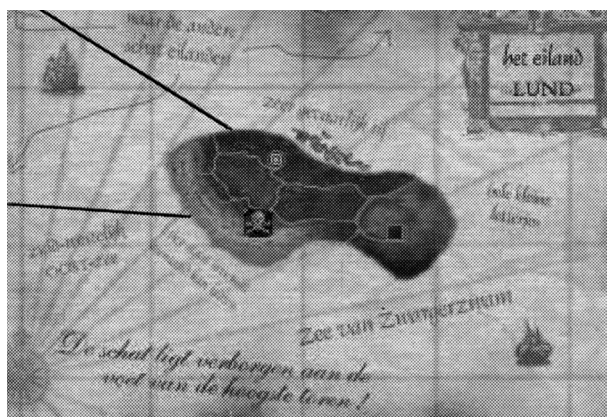


figuur 4: een correcte oplossing bij opdracht 2

Opdracht 3 en 4

Bij opdracht 3 en 4 moeten leerlingen de plaatsen aangeven waar slechts twee torens te zien zijn, omdat de derde toren zich achter een van de torens bevindt. Bij opdracht 3 kunnen ze eventueel met de verrekijker één plaats zoeken, terwijl ze in opgave 4 alle mogelijke plaatsen moeten aangeven.

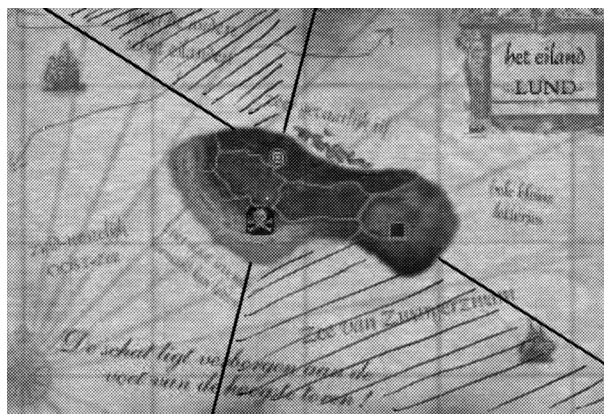
Als voorbereiding op opdracht 4 wordt in opdracht 3 de volgende vraag gesteld: ‘Waarom zie je daar maar twee torens?’ Verder wordt bij opdracht 4 (en later ook bij opdracht 6) gevraagd om het antwoord ‘precies’ aan te geven, om zo de leerlingen te stimuleren nauwkeurig te zijn en dus kijklijnen te tekenen. We hadden een antwoord voor ogen in termen van één of twee lijnen of stroken (fig.5).



figuur 5: een correcte oplossing bij opdracht 4

Opdracht 5 en 6

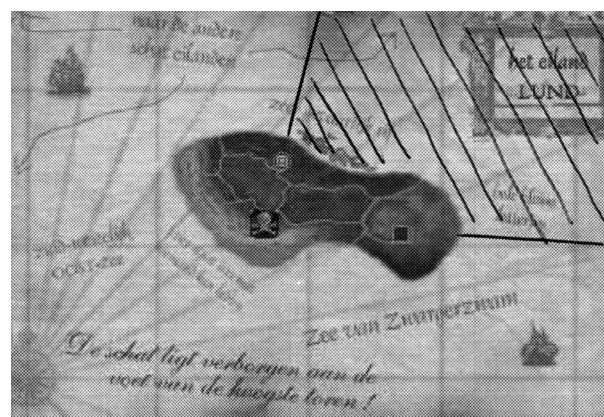
Bij deze opdrachten moeten leerlingen de plaatsen aangeven waar de kapitein kan zijn als hij de vuurtoren ergens tussen de andere twee torens ziet. Weer kunnen ze dat bij opdracht 5 met de verrekijker onderzoeken en één oplossing vinden, terwijl ze bij opdracht 6 hun antwoord moeten generaliseren door alle mogelijke plaatsen aan te geven. De verwachting was dat leerlingen zouden ontdekken dat het om een gebied gaat (in feite twee gebieden) en dat ze de grenslijnen van die gebieden zouden opzoeken. Hopelijk zouden leerlingen hun ervaringen die ze met opdracht 3 en 4 opgedaan hadden hier op een of andere manier toepassen. De grenslijnen zijn namelijk dezelfde type lijnen die ze ook in de vorige opdracht hadden getekend (fig.6).



figuur 6: een correcte oplossing bij opdracht 6

Opdracht 7

Bij opdracht 7 kijkt Zilt uit zijn toren naar de zee en ‘ziet een groot schip tussen de vuur- en de kerktoren’. In de tekst staat een ‘groot schip’ om het verhaal spannender te maken. Met ‘zien’ bedoelden we dat Zilt rondkijkt en niet dat hij zonder zijn hoofd te bewegen het schip en de twee torens tegelijk zou moeten zien.



figuur 7: een correcte oplossing bij opdracht 7

Dit idee van ‘zien tussen’ was al in opdracht 5 en 6 aan de orde geweest. Deze opgave was ons inziens een makkelijker dan de vorige twee opdrachten, omdat het kijkpunt nu bekend is. We hoopten dus dat leerlingen de opgave nu zonder gebruik van de verrekijker konden maken en kijklijnen zouden gebruiken om de kijkhoek te tekenen (fig.7).

5 Onderzoeksofzet

De studie is een exploratief kwalitatief onderzoek met een participerende observator, in de geest van wat Steffe (1983) een ‘onderwijsexperiment’ noemt. In dit type onderzoek geeft de betrokken onderzoeker onderwijs aan één of enkele leerlingen. Deze activiteit wordt bijvoorbeeld op video vastgelegd voor een retrospectieve analyse (Steffe, 1983; Steffe & Thompson, 2000). Het doel van dit type analyse is te begrijpen wat leerlingen doen en het in kaart brengen van de wiskundige realiteit van de leerling.

Bij het applet ‘Het eiland’ zijn twee series opdrachten ontworpen en uitprobeerde met een tiental leerlingen van groep 7 van een basisschool in Utrecht. De leerlingen werkten in tweetallen, en door iedere groep werd ongeveer een half uur per keer aan de opdrachten gewerkt, iedere serie telkens op een andere dag, met een week ertussen. Al het groepswerk werd op video vastgelegd. De leerlingen werkten samen aan de opdrachten, maar hadden wel een eigen werkblad, met een klad- en antwoordgedeelte. De onderzoeker zat bij de leerlingen, maar nam zoveel mogelijk een terughoudende houding aan. Omdat het oorspronkelijke doel het verbeteren van het applet was, moesten leerlingen vooral zelfstandig werken. De onderzoeker probeerde pas vragen te stellen als leerlingen een antwoord hadden (goed, fout of incompleet) of als ze er niet uitkwamen en dreigden af te haken. Het doel van deze vragen was enerzijds de redeneringen, inzichten en moeilijkheden van de leerlingen op te sporen en hen anderzijds te stimuleren te reflecteren op wat ze gedaan hadden, teneinde op die manier tot een hoger niveau van antwoorden te komen.

Over het algemeen stelde de onderzoeker de volgende vragen:

- Vragen naar een uitleg, zoals: Hoe ben je aan je antwoord gekomen?
- Vragen over de volledigheid van hun antwoord, zoals: Zijn dat alle mogelijke plaatsen? Hoe zit het met deze plaats?
- Vragen naar bewijs, zoals: Kun je laten zien dat het zo is? Of: Hoe weet je dat?
- Vragen om samen te werken door bijvoorbeeld te wijzen op de verschillen in antwoorden of redeneringen van beide leerlingen.

De data voor de analyse bestonden uit video-opnamen van het werk van iedere groep, de leerlingenwerkbladen en de aantekeningen van de onderzoeker.

De analysemethode

De analysemethode in dit onderzoek is gebaseerd op de methode van Cobb & Whitenack (1996), die steunt op de constante *comparative method* van Glaser en Strauss (1967). Cobb en Whitenack gebruikten een analysemethode met drie fasen. Eerst werd episode na episode afzonderlijk geanalyseerd aan de hand van een beperkt aantal geformuleerde thema’s. Dit leidde tot een aantal vermoedens en conclusies die als basis dienden voor nieuwe analyses, nu meer op metaniveau. Deze analyses werden vervolgens gecombineerd tot een samenvattende conclusie.

In ons onderzoek is er een dergelijke procedure gevolgd. In eerste instantie zijn er korte verslagen gemaakt van het werk van de leerlingen op basis van aantekeningen, globale analyses van de video-opnamen en werkbladen. Vervolgens zijn er verschillende aspecten gesignaleerd die bij de groepen en opdrachten steeds terugkwamen en die om een nadere analyse vroegen. Tegelijkertijd vormden deze aspecten ook een eerste kader voor het opnieuw analyseren van de werkbladen en video-opnamen. Deze aspecten waren:

- verschillen in constructies met kijklijnen binnen de verschillende groepen leerlingen;
- de rol van de verrekijker;
- de rol van motivatie in het oplossingsproces;
- de rol van de leerkracht/onderzoeker in het oplossingsproces;
- de invloed van het blikveld in de oplossingsstrategie.

In deze fase van de analyse zijn per opgave nauwkeurige beschrijvingen gemaakt van het werk van de leerlingen, aangevuld met stukjes protocol en een reconstructie van het schematiseringsproces. Zo zijn er binnen de genoemde aspecten enkele patronen gesignaleerd die als basis dienen voor het formuleren van enkele vermoedens. Dit waren constatering van het type ‘leerlingen in deze onderzoeksgroep handelen in het algemeen zo’. In eerste instantie zijn er alleen constatering geformuleerd voor opgave 4, maar we wisten dat een aantal daarvan ook bij de andere opgaven voorkwamen.

Daarna werd opnieuw naar de data gekeken om deze constatering te toetsen. Eerst bij opgave 4, daarna bij opgave 6 en 7. De vragen hierbij waren: ‘Gebeurt dit inderdaad steeds? En wanneer dit niet het geval is, is er dan sprake van tegenspraak?’ Tijdens het toetsen van de constatering bij opgave 6 en 7 vielen weer nieuwe zaken op, die ook als constatering werden opgesteld en vervolgens getoetst bij alle opgaven. Zo kwamen we uiteindelijk tot een eerste lijst van constatering (fig.8).

Ten slotte zijn deze constatering zelf data geworden en geanalyseerd op metaniveau: ‘Wat hebben ze met elkaar te maken en hoe zijn ze te koppelen aan het theoretische

Leerlingen wijzen in eerste instantie geen lijnen, maar punten aan.	constructies (opdracht 4 en 6)
Leerlingen denken in termen van richtingen.	constructies
Leerlingen zetten streepjes of bolletjes op de lijnen of gebieden.	constructies
Leerlingen tekenen in eerste instantie kijklijnen die aangeven hoe je kijkt (en niet een gebied).	constructies (opdracht 4 en 6)
Wanneer leerlingen lijnen tekenen, tekenen ze in eerste instantie parallelle lijnen tussen de twee kerktorens.	constructies (opdracht 4 en 6)
Leerlingen denken aan de context 'foto maken'.	
Het gebruik van de verrekijker als controleapparaat stimuleert het leerproces, terwijl het hindert als die gebruikt mag worden om de oplossing te vinden. In het laatste geval redeneren leerlingen op een concreter niveau, dat wil zeggen, ze nemen de waarnemingen met de verrekijker over als antwoord zonder het te gebruiken om het antwoord te generaliseren.	verrekijker (opdracht 4 en 6)
Leerlingen betrekken een beperkt blikveld bij hun redeneringen.	blikveld
Leerlingen betrekken een beperkt blikveld bij de context van de verrekijker.	blikveld (opdracht 4 en 6)
Leerlingen betrekken de breedte van de torens bij hun oplossing.	(opdracht 4 en 6)
Leerlingen brengen contextelementen uit hun eigen belevingswereld in.	(opgave 7)

figuur 8: eerste lijst van constateringingen

kader?' Hierbij was het nuttig om afstand te nemen en een lijst te maken van opvallende zaken die de leerlingen deden:

- Ze gaan uit van de authentieke situatie, terwijl ontwerpers uitgaan van een meer gemathematiseerde situatie.
- Ze gebruiken representaties op concreet niveau.
- Wanneer de verrekijker gebruikt wordt om het goede antwoord te vinden, wordt die als een zoekmachine gebruikt, waardoor het verticale mathematiseren, generaliseren en abstraheren wordt belemmerd. Wanneer de leerlingen de verrekijker als controleapparaat gebruiken wordt het leerproces gestimuleerd.

Door uit te gaan van een verschil tussen *actor's* en *observer's* perspectief bleek het vervolgens mogelijk om de constateringingen verder te structureren en aan elkaar te relateren tot een samenvattende eindbeschrijving, die een

verklaring biedt voor de zaken die gebeurd zijn. Op deze wijze zijn we gekomen tot een lijst van constateringingen met daaraan gekoppeld subconstateringingen, die de eerste helpen verklaren (fig.9).

6 Leerlingen aan het werk - de resultaten

In deze paragraaf bespreken we het werk van de leerlingen in detail. Om praktische redenen beperken we ons tot de bevindingen rond opdracht 3 tot en met 7, met meer specifieke aandacht voor de generaliserende opgaven (opdrachten 4, 6 en 7). We kijken naar wat leerlingen

Context	<ul style="list-style-type: none"> - Leerlingen betrekken een beperkt blikveld bij hun redeneringen. <ul style="list-style-type: none"> - leerlingen betrekken een beperkt blikveld bij de context van de verrekijker; - leerlingen denken aan de context 'foto maken'; - leerlingen denken in termen van richtingen; - dat het schip tussen de torens wordt gezien, wordt geïnterpreteerd als 'hij ziet beide torens tegelijk'; - Leerlingen brengen contextelementen uit hun eigen belevingswereld in.
Representaties	<ul style="list-style-type: none"> - Leerlingen wijzen in eerste instantie punten aan waar het om een lijn gaat en lijnen waar het om een gebied gaat. - Leerlingen zetten streepjes of bolletjes op de lijnen of gebieden. - Leerlingen tekenen parallelle lijnen om het gebied aan te geven. <ul style="list-style-type: none"> - wanneer leerlingen geen parallelle lijnen tekenen, tekenen ze kijklijnen (lijnen die tot aan het kijkobject of vanaf het kijkpunt gaan). - Leerlingen betrekken de breedte van de toren erbij.
Het gereedschap	<ul style="list-style-type: none"> - Het gebruik van de verrekijker als controlemiddel stimuleert het leerproces. - Het gebruik van de verrekijker om de oplossing te vinden belemmert het leerproces.

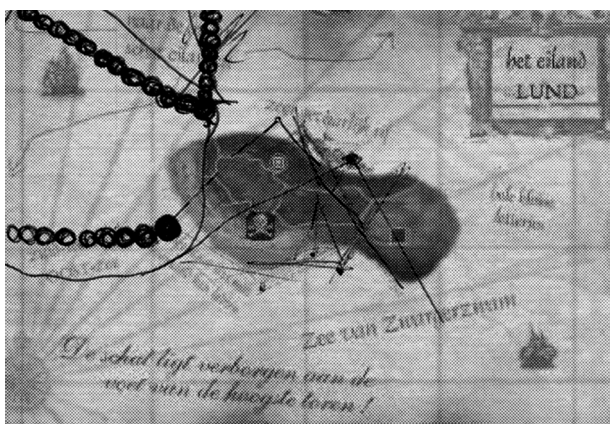
figuur 9: lijst constateringingen

anders deden dan de ontwerpers hadden verwacht en hoe dat begrepen kan worden door een onderscheid te maken tussen het leerling- en het ontwerpersperspectief. We organiseren de observaties en verklaringen in drie clusters, zoals ze tijdens de data-analyse naar voren zijn gekomen (zie lijst van constatering): ‘anders omgaan met de context’, ‘anders representeren’ en ‘de verrekijker anders gebruiken’. In de laatste paragraaf proberen we hierop meer greep te krijgen door uit te gaan van de theoretische verklaring voor deze verschillen.

Anders omgaan met de context

Het blikveld

Bij alle opdrachten speelt de context van kijken een centrale rol. Het gaat steeds om wat iemand kan zien, of zou kunnen zien. Bij opdracht 3 en 4 zoeken leerlingen naar de plekken waar de kapitein slechts twee torens kan zien, omdat de derde toren zich achter een van de torens bevindt. In opdracht 5 en 6 moeten ze plaatsen aangeven waar de kapitein kan zijn als hij de vuurtoren ergens tussen de andere twee torens ziet, en in opdracht 7 kijkt Zilt uit zijn toren naar de zee en ‘ziet een groot schip tussen de vuurtoren en de kerktoren’. Met dit ‘zien’ bedoelden de ontwerpers ‘rondkijken’ en niet, zoals de leerlingen het opvatten, kijken met stilgehouden hoofd. Deze interpretatie van zien, die we een beperkt blikveld noemen, wordt door veel leerlingen in vrijwel alle opdrachten gebruikt.

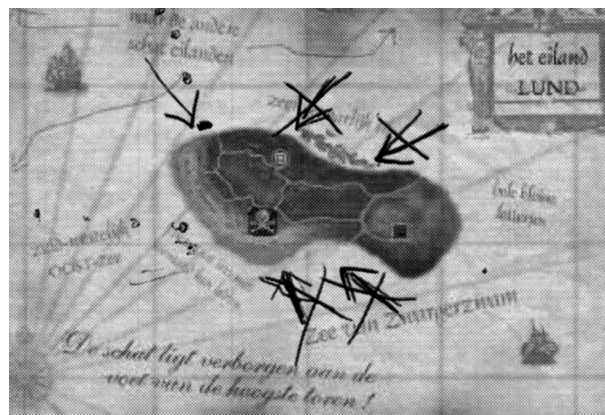


figuur 10: werk van Silvana (opdracht 4)

We geven een aantal voorbeelden. Bij opdracht 4 redeneren zes van de tien leerlingen vanuit het idee van een beperkt blikveld. Je ziet het aan de manier waarmee ze de plaatsen aangeven. Ze tekenen bijvoorbeeld kijkhoeken of pijlen bij de plaats waar de kapitein moet staan (Silvana, fig.10) en (Annika, fig.11). Daarmee geven ze aan dat de kapitein in een vaste richting moet kijken. Ze laten dus zien dat ze het ‘zien’ niet interpreteren als rondkijken.

Silvana verwoordt deze interpretatie als ze uitlegt wanneer je maar twee torens kunt zien: ‘Dan staat er een toren

voor of je kijkbeeld is te klein’. Ze zegt dus niet alleen dat de onzichtbare toren achter een andere toren kan staan - wat de ontwerpers voor ogen hadden - maar ook dat die buiten het blikveld kan vallen.



figuur 11: werk van Annika (opdracht 4)

Bij opdracht 6 wordt beweerd dat de kapitein op een gegeven moment de vuurtoren tussen de twee andere torens in ziet. Gevraagd wordt waar de boot op dat moment kan zijn. Silvana heeft al een gebied getekend (smaller dan het zou moeten) en denkt hardop na over een punt rechts onder de kerktoren dat net buiten haar gebied valt, maar er nog wel bij zou moeten horen. Ze twijfelt over dit punt, omdat de kapitein de torens pas ziet als hij ‘schuin kijkt’: ... als je hier (punt rechtsonder net buiten het gebied) staat ... pauze ... ja, als je schuin kijkt kan het natuurlijk wel, maar als je recht kijkt niet’.

Bij opdracht 7 ziet Zilt een groot schip op zee, tussen de vuur- en kerktoren. De leerlingen vatten dat op alsof Zilt in één blik beide torens en het schip kan zien, met tot gevolg dat drie van de vijf groepen het gebied niet tot aan de kerktoren tekenen (fig.12).



figuur 12: werk van Han (opdracht 7, antwoordblad)

Han is daar tegenover Leo heel expliciet over:

Han: hij kijkt vanuit zijn toren en hij ziet deze twee (de vuurtoren en de kerktoren).

- Leo: ja, hij mag zelf weten naar welke toren hij kijkt. (Leo denkt aanvankelijk dat hij niet per se beide torens tegelijk hoeft te zien).
- Han: nee, kijk 'tussen de vuurtoren en de kerktoren ziet hij een groot schip' (leest). Als je hier kijkt dan zou hij die nog net kunnen zien denk ik, en die, en dan zou daar tussen het schip zijn. (...)
- Leo: Of hij heeft gewoon een kromme blik.
- Han: (lacht) erg kromme blik ... daar (wijst de kerktoren aan) staat het spiegeltje ... (lacht).

Bij de groep van Bertwin en Lukas doet zich een vergelijkbare situatie voor. Bertwin vindt dat het gebied tot aan de kerktoren gaat, maar Lukas denkt dat Zilt dan niet beide torens kan zien. Bertwin wil dat met de verrekijker nagaan, maar merkt dat die niet beschikbaar is. Vervolgens zegt hij dat het van het soort fotoestel afhangt. Later legt hij Lukas nog uit dat hij best alle twee de torens kan zien, en voert daarvoor zelf een kijkexperiment uit in de klas:

Maar als ik ... kijk! Ik kijk naar dat schilderij (schilderij staat voor de kerktoren). En kan ik dat nog wel zien, ah? (wijst met de rechterhand in de richting van waar de vuurtoren zou moeten zijn, links van hem, terwijl hij nog steeds naar het schilderij kijkt). Dus, dan kun je de vuurtoren nog wel zien.

Het feit dat leerlingen bij hun redeneringen uitgaan van een beperkt blikveld en dus 'zien' anders opvatten dan de ontwerpers bedoelden, heeft alles te maken met de specifieke situatie van de computertaak, waarin het gaat om foto's die de kapitein heeft gemaakt en om het kijken met een verrekijker. Bij een verrekijker heb je te maken met bepaalde kijkrichtingen, en dus een beperkt blikveld. Je ziet bijvoorbeeld dat leerlingen zich verbazen over het plaatje dat de verrekijker van de torens geeft: 'Je ziet ze (de torens) gewoon niet op de goede plaats', zegt Lukas bij opdracht 6. Daarnaast speelt het gegeven dat het beeld dat de verrekijker geeft (en dat op het computerscherm verschijnt) een statisch plaatje is (een soort foto). In drie van de vijf groepen redeneren leerlingen ook expliciet vanuit het idee van foto's maken.

Annika: Omdat als je hier ziet, een foto kijkt, kun je niet die (kerktoren) zien. (...) als ik een foto daar naar toe maak (ze maakt een kader met haar handen in die richting en knijpt haar oog toe, alsof ze een foto aan het maken is), dan zie ik die twee, en niet die (kerktoren).

Leerlingen zoeken dus naar kijkrichtingen en niet naar verschillende posities, zoals de ontwerpers hadden bedoeld. Dit is duidelijk te zien aan de reactie van Ricky, wanneer zijn medeleerling Dano in opgave 3 een tweede punt op dezelfde lijn met de verrekijker wil testen: 'Ja, maar, dat is dezelfde plek ja maar, dan krijg je de hele tijd zo'n streep'. Vanuit dat punt kijk je in dezelfde richting en daarom is dat tweede punt volgens Ricky niet een tweede oplossing maar gewoon 'dezelfde plek'. Dit doet zich ook voor bij leerlingen die pijlen tekenen in plaats

van punten (zie figuur 10b). Ook bij opdracht 7 zijn er leerlingen die vanuit een beperkt blikveld redeneren. Dit zou het gevolg kunnen zijn van een vergelijkbare vraag bij opdracht 6, waar de verrekijker steeds drie torens tegelijk laat zien.

Contextelementen inbrengen vanuit de eigen beleavingswereld

Bij het oplossen van de opgaven zien we een aantal keren hoe leerlingen hun eigen ervaringen gebruiken om de opgaven te interpreteren en op die manier greep te krijgen op wat van hen verwacht wordt. Ze zetten de context naar hun eigen hand en creëren op die manier een eigen context voor de opgave. Een voorbeeld is Bertwin, die zich bij opdracht 7 voorstelt dat het blikveld breed kan zijn, want dat hangt af van het type fotoestel dat je gebruikt. Hij weet blijkbaar dat er breedbeeldopnamen mogelijk zijn en past die kennis hier toe. Bij Bertwin heeft dit geholpen om de opgave correct te maken. Dat leerlingen hun eigen interpretatie aan de context geven kan het leerproces echter ook verstoren.

Een voorbeeld van dat laatste zien we bij Maura. Zij leidt af uit de opmerking bij opdracht 7 dat het schip groot is en dus niet ver van de kust kan zijn. Hoe zou Zilt anders kunnen weten dat het een groot schip is? Maura betreft hierbij het weer (het kan mistig zijn) en ook de grootte van de kaart en dus impliciet de schaal daarvan (die overigens niet gegeven wordt). Het is een 'klein plattegrondje, maar eigenlijk is 'ie in het echt heel groot'. Ze wil dus het gebied niet al te ver van de kust begrenzen. Haar medeleerling Silvana denkt hier echter anders over. Ook al ziet Zilt hem misschien klein, toch kan hij weten dat het schip groot is. Maar dat doet er eigenlijk niet toe, zegt ze, dat hoort bij het verhaaltje. De opdracht is: waar kan het schip zijn? Silvana laat zien dat ze weet dat je bij rekenen niet met alle contextelementen rekening hoeft te houden. In termen van Cobb (1987) hanteert Silvana duidelijk een andere sociaal-wiskundige norm.

Anders representeren

De ontwerpers hoopten dat leerlingen antwoorden zouden geven in termen van punten, lijnen en gebieden. Ze verwachtten dat leerlingen zouden ontdekken dat het bij opgave 6 en 7 om een gebied gaat en niet dat zij met punten of lijnen als antwoord zouden komen. De ontwerpers vatten een lijn op als een manier om een verzameling van oneindig veel punten achter elkaar te representeren, terwijl leerlingen blijkbaar behoefte hebben om die punten zichtbaar te maken, bijvoorbeeld als een serie punten achter elkaar of als een lijn met daarop bolletjes of streepjes.

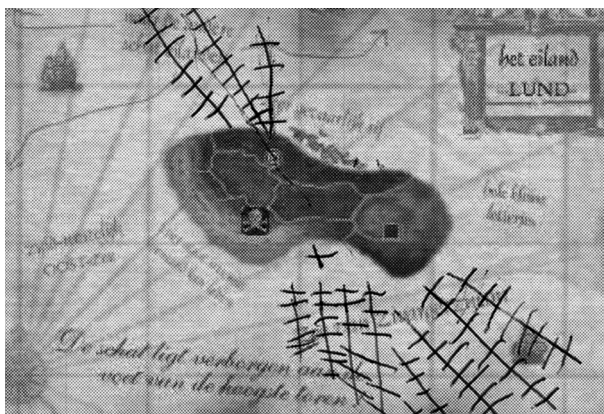
De ontwerpers redeneren met kijklijnen op een vergelijkbare manier als met het licht van een vuurtoren om een gebied te bepalen, terwijl leerlingen individuele tussenoplossingen (punten of lijnen) zoeken en die vervolgens

combineren tot een antwoord. Wanneer we naar de representaties die leerlingen gebruikten kijken, zien we over het algemeen het volgende:

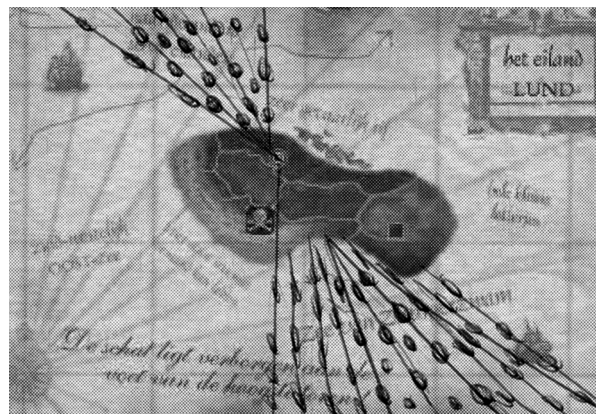
- Leerlingen wijzen in eerste instantie punten aan waar het om een lijn gaat en punten en/of lijnen waar het om een gebied gaat.
- Leerlingen tekenen parallelle lijnen om het gebied aan te geven. Wanneer zij geen parallelle lijnen tekenen, tekenen ze kijklijnen (lijnen die tot aan het kijkobject of vanaf het kijkpunt gaan).
- Leerlingen zetten streepjes of bolletjes op de lijnen of gebieden.
- Leerlingen betrekken de breedte van de torens bij hun oplossing.

Lijn en gebied als verzameling van punten

Leerlingen wijzen in eerste instantie punten aan waar het om een lijn gaat en punten en/of lijnen waar het om een



figuur 13: werk van Lukas (opdracht 6)



figuur 14: werk van Maura (opdracht 6)

gebied gaat. De gebieden zijn eerst klein en worden steeds groter naarmate zij er meer punten aan toevoegen. Bij opdracht 4 verwachtten de ontwerpers dat leerlingen vanuit losse punten de stap zouden maken naar een lijn. Er is echter slechts één leerling die dit zelf ontdekt. Bij de andere leerlingen is tussenkomst van de onderzoeker nodig, namelijk de vraag wat er gebeurt als kapitein Kward een stukje achter het aangewezen punt gaat staan. Deze vraag was voor de meeste leerlingen voldoende om het direct te doorzien. Ze reageren, zoals Ricky: 'Dat maakt niet zoveel uit eigenlijk. Gewoon op deze hele lijn dan'. Alleen Silvana reageert verbaasd en vindt dat het onmogelijk is om al die plaatsen achter elkaar te tekenen en concludeert dat dit dus ook niet de bedoeling van de opgave zal zijn.

Silvana: Hij mag toch ook niet hier staan (achter op dezelfde lijn), want dan kijkt 'ie gewoon vanaf dezelfde lijn, en dan kun je het net zo goed zo doen, hier een bolletje, daar een bolletje, daar een bolletje (ze tekent bolletjes achter elkaar).

Onderzoeker: Maar zijn dat niet verschillende plekken?

Silvana: Ja wel, maar dat is wel een beetje oneerlijk eigenlijk.

Onderzoeker: Maar het zijn wel verschillende plekken.

Silvana: Ja, maar volgens mij is dat niet de bedoeling.

Onderzoeker: Waarom niet?

Silvana: Nou, dan kun je gewoon ... zo heel kleine bolletjes en dan kun je er duizenden doen.

Bij opdracht 6 en 7 verwachtten de ontwerpers dat leerlingen de stap zouden maken naar een gebied als een verzameling van (kijk)punten. Bij opdracht 6 is er echter slechts één leerling die direct een gebied tekent. De andere leerlingen geven over het algemeen eerst punten aan en vervolgens de lijnen die naar die punten gaan (wat ze bij opdracht 4 hebben geleerd). Ze ontdekken daarna allemaal dat het om een gebied gaat, maar drie leerlingen blijven die gebieden met kijklijnen aangeven, zonder de grenslijnen duidelijk aan te geven (fig.13 en fig.14).

Bij opdracht 7 gebeurt iets dergelijks, ook al zijn er nu meer leerlingen die het gebied gelijk ontdekken en er de grenslijnen van tekenen. Zoals eerder gezegd, zoeken alle leerlingen bij opdracht 4 naar kijkrichtingen en niet naar kijkposities. Dit verklaart waarom ze bij deze opgave geen punten achter elkaar of lijnen aanwijzen. Een ander punt op dezelfde lijn wordt ook gezien als dezelfde plaats (gaat om dezelfde kijkrichting). Ze geven punten aan en bedoelen daarmee een kijkrichting.

Verder worden leerlingen bij opdracht 6 en 7 beïnvloed door eerdere opdrachten, met name computeropdracht 3 en 5 en opdracht 4. Bij de computeropdrachten hoefden ze slechts één punt te zoeken; in de volgende opdrachten was de vraag het antwoord verder te generaliseren door te zoeken naar alle mogelijke plaatsen. Het is logisch om dezelfde redenering voort te zetten en dus naar andere punten te zoeken. Voorts waren er leerlingen die na het vinden van één punt als oplossing, vervolgens de lijn erachter ook als een oplossing zagen, wat ze bij opdracht 4 hadden ontdekt. Als je een punt weet, dan weet je ook gelijk een hele lijn. Daarnaast heeft dit ook te maken met

het feit dat leerlingen eerst met trial en error werken en dus naar individuele oplossingen zoeken om vervolgens het antwoord (het gebied) te kunnen ‘zien’.

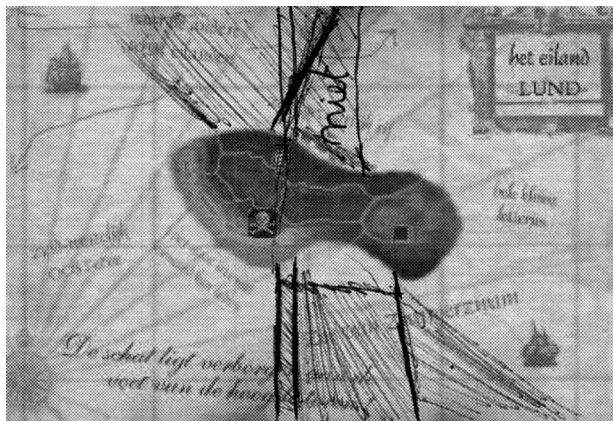
Streepjes of bolletjes

We zien dat de helft van de leerlingen lijnen met streepjes, bolletjes of puntjes achter elkaar tekent bij minstens een van de drie opgaven. Er is één leerling die dat zelfs bij alle drie opgaven doet en twee leerlingen die punten met bootjes aangeven in het gebied van opdracht 7.

Onze interpretatie is dat leerlingen behoefte hebben aan te geven dat die lijnen of gebieden uit punten bestaan. Ze kennen het wiskundige object lijn als oneindig veel punten niet, waardoor ze alle mogelijke plaatsen niet met een lijn representeren, maar een representatie gebruiken die iets van die punten laat zien. Lukas, bijvoorbeeld, tekent in opdracht 4 een lijn met daarop veel kruisjes: ‘Oh, dan moet ik ... wacht even ... dan zet ik gewoon een streepje vol kruisjes, dat is wel makkelijker’. In opdracht 6 gebruikt hij dezelfde representatie en legt uit waarom hij dat doet: ‘Nou, alle mogelijke plaatsen naast elkaar vind ik er raar uitzien. Dan zet ik het zo ...’

Parallele lijnen

Bij opdracht 6 en 7 valt nog op dat er slechts één groep is die bij beide opgaven geen parallelle lijnen tekent bij het aangeven van het gebied. De meeste leerlingen geven dus in eerste instantie de gebieden aan met lijnen die parallel getekend worden en wel zo, dat ze tussen de torens lopen (fig.15).



figuur 15: werk van Bertwin (opdracht 6)

Onze interpretatie is dat leerlingen gestuurd worden door het idee van ‘tussen de torens’. Ze redeneren dan niet vanuit kijklijnen, maar geven een bepaald gebied tussen de torens aan. Han laat duidelijk zien dat wanneer leerlingen het kijken zelf proberen te representeren, ze geen parallelle lijnen tekenen maar wel kijklijnen. In opdracht 7 kleurt hij eerst in het klad het gebied met parallelle lijnen die recht voor de kijker en tussen de torens lopen (fig.15). Als hij naar het antwoordblad gaat, tekent hij

echter geen parallelle lijnen maar kijklijnen. Hij representeert niet meer de mogelijke plaatsen waar het schip kan zijn, maar wel hoe Zilt naar de zee kijkt.



figuur 16: werk van Han (opdracht 7; kladblaadje)

Hij tekent nu de lijnen vanuit het kijkpunt (de toren van Zilt) terwijl hij hardop zegt: ‘Hij kijkt dan zo ...’ (zie figuur 12).

De breedte van de torens op de kaart

De leerlingen houden rekening met de breedte van de torens op de kaart, terwijl de ontwerpers de torens als punten voorstellen. Dit komt, omdat leerlingen vanuit de context en de alledaagse werkelijkheid redeneren en niet vanuit punten en lijnen, zoals de ontwerpers. Wanneer je naar echte torens zou kijken, is het inderdaad zo dat de ene toren niet onmiddellijk, maar geleidelijk achter de andere verdwijnt. De breedte van de torens doet er dus toe, en je ziet dat leerlingen dat weten. Je hoort ze namelijk praten over het randje van de toren dat je net achter de andere kunt zien. Dit is overigens ook in de computertaken (opdrachten 1, 3 en 5) het geval; ook daar doet de breedte van de toren er werkelijk toe. De torens zijn op de kaart weliswaar breder dan ze zouden moeten zijn bij een letterlijk bovenaanzicht, maar hun breedte speelt niettemin een rol wanneer je de verrekijker gebruikt. Als je een plek hebt gevonden waarin bijvoorbeeld de vuurtoren achter de kerktoren staat, kun je de punt nog steeds een klein beetje naar opzij verplaatsen zonder dat de vuurtoren tevoorschijn komt.

De verrekijker anders gebruiken

De ontwerpers stelden de verrekijker alleen beschikbaar bij de verkennende opgaven van de eerste serie (opdrachten 1, 3 en 5), met als doel hem vooral de functie te geven van onderzoeksgereedschap. Leerlingen zouden daarmee de opdrachten kunnen exploreren en ervaringen met de context kunnen opdoen, om daarna de meer generaliserende opdrachten te kunnen maken. Op deze manier wilden we voorkomen dat de verrekijker bij deze meer generaliserende opdrachten gebruikt zou worden als een

middel om de antwoorden op te zoeken, wat het generaliseren zou kunnen belemmeren. De leerlingen mochten eventueel wel achteraf de verrekijker gebruiken om hun antwoord te controleren.

Bij opdracht 4 en 6 is er een aantal leerlingen (vier in opdracht 4 en twee in opdracht 6) dat de verrekijker als controleapparaat heeft gebruikt. Zij corrigeerden daarmee zelf hun antwoorden en gebruikten deze om elkaar te overtuigen van de juistheid van hun vermoedens. Dit stimuleerde het leerproces, omdat het ze iets in handen gaf om zelfstandig te kunnen werken. Dat was bij alle groepen duidelijk merkbaar.

Daarnaast waren er echter ook leerlingen die op een gegeven moment de verrekijker gebruikten om antwoorden te zoeken, zonder daarbij te generaliseren. Een goed voorbeeld hiervan is het antwoord van Han en Leo bij opdracht 4: 'Het zijn drie plekje's eigenlijk ... ja, op deze lijn (achter de toren van Zilt), op deze lijn (achter de vuurtoren), en deze plek (punt naast de laatste lijn)'. Behalve de twee lijnen geeft hij ook een punt naast een van die lijnen aan als antwoord. Hij legt uit dat de punt niet bij de lijn hoort, want dat is wat de verrekijker aangeeft. We zien dus dat zowel de wiskundige als de concrete oplossing van het probleem naast elkaar komen te staan, en Han en Leo zijn niet meer in staat die waarneming te generaliseren.

Kortom, ook al hadden de ontwerpers maatregelen genomen om de functie van de verrekijker te sturen, dit is toch niet helemaal gelukt. In plaats van het gereedschap als controleapparaat te gebruiken, maakten de leerlingen er een antwoordhulp van, wat vervolgens het generaliserende karakter van de opdracht veranderde.

Voordat we deze bevindingen vanuit de literatuur bekijken, nog een opmerking over de prestaties van de leerlingen in het algemeen. Hoewel ze steeds een niveau achter de verwachtingen aan liepen, zoals we in het voorgaande konden zien, hebben bijna alle leerlingen de lijnen en gebieden op een meer of minder hoog niveau ontdekt (ook al is dit deels te danken aan de interventies van de onderzoeker). Verder is er ook een leerproces zichtbaar. Aan de ene kant zie je dat er steeds minder leerlingen zijn die achter de verwachtingen aan lopen. Anderzijds zie je ook dat ze de kennis die ze in een opgave hebben opgebouwd in een volgende opgave toepassen. Dit is voornamelijk het geval bij opgave 6. Je ziet leerlingen die na het vinden van één punt, meteen de lijn erachter als oplossing geven, wat een ontdekking was in opgave 4.

7 Discussie en aanbevelingen

In de vorige paragraaf is in detail uitgewerkt wat de leerlingen anders deden dan de ontwerpers hadden verwacht en hoe dit begrepen kan worden. Al eerder merkten we op

dat het hier gaat om het verschil tussen het *actor's* perspectief en het *observer's* perspectief. Hoewel het onderscheid hiertussen op zich een duidelijke heuristiek voor ontwerpers biedt, is het tegelijkertijd ook niet meer dan dat: het geeft een richting aan, maar hoe die verschillen er nu precies uitzien wordt niet duidelijk. Het hier beschreven onderwijsexperiment is gebruikt om een concretere invulling aan het *actor's* en *observer's* perspectief te geven. In deze paragraaf willen we een stap verder gaan, door uit te gaan van de theoretische verklaringen voor de verschillen tussen een *actor's* en een *observer's* perspectief.

De eerste theoretische verklaring betreft het door Van Hiele (1973) aangedragen verschil in denkniveau. Leraar en leerlingen verschillen in hun niveau van wiskundige kennis en inzichten en dit leidt ertoe dat ze dezelfde termen, opdrachten en situaties verschillend interpreteren.

De tweede verklaring betreft het idee van sociaal-wiskundige normen, die verwijzen naar opvattingen over wat wiskunde is, wat een wiskundig probleem is, wat een wiskundige oplossing is en wat we onder een wiskundige argumentatie verstaan. Leraar en leerling kunnen er in dit opzicht verschillende opvattingen op na houden.

De derde theoretische verklaring betreft het idee dat het gebruik van gereedschap - in de ruimste zin - een subjectieve component bevat. Wat het werken met een bepaald gereedschap oplevert, hangt af van de functie die je er aan toekent.

Verschillen in niveaus van wiskundige kennis

Leerlingen en ontwerpers beheersen de wiskundige begrippen in opgaven op een ander niveau. De ontwerper is de deskundige, terwijl de leerling die begrippen nog aan het leren is en die dus slechts op informeel niveau kent. In dit onderzoek ging het om de wiskundige begrippen punt, (kijk)lijn, en kijkhoek. Oneindig veel punten achter elkaar is voor de ontwerper een lijn. Dat de oplossing een gebied is, en dat dit begrensd is door twee lijnen, is voor de ontwerper vanzelfsprekend. Hij ziet als het ware de wiskundige oplossingen in de opgaven, terwijl leerlingen slechts de situatie zien, en vandaaruit de opgaven proberen op te lossen.

Dit verschil in kennis van de wiskunde speelt in dit onderzoek een rol op het niveau van meetkundige representaties. We zagen dat de ontwerpers de symbolen van de torens als punten beschouwden, terwijl leerlingen ze interpreteerden als bovenaanzichten en daarom de breedte van de torens in hun antwoorden betrokken.

De ontwerpers denken aan een lijn als een manier om een verzameling van oneindig veel punten achter elkaar te representeren, terwijl leerlingen behoefte hebben om die punten zichtbaar te maken (als punten achter elkaar zetten of als lijnen met daarop bolletjes of streepjes). De ontwerpers redeneren met kijklijnen op een vergelijkbare manier als met het licht van een vuurtoren om de

gebieden te bepalen, terwijl leerlingen individuele tussenoplossingen (punten of lijnen) zoeken en die vervolgens combineren tot een antwoord.

Een tweede rol die dit verschil in kennis in dit onderzoek speelt, is de manier waarop de context van de opgaven door de leerlingen en de ontwerper wordt ervaren en gebruikt. Omdat de ontwerper de wiskunde in de opgave ziet, ziet hij ook welke contextelementen wel en niet nodig zijn om het probleem op te lossen. Tegelijkertijd ziet hij om die reden nauwelijks wanneer de context iets verschilt van de reële context. Leerlingen zijn echter heel gevoelig voor deze verschillen. Ze moeten vanuit de context redeneren en zoeken naar contextelementen die je nodig hebt om het probleem op te lossen. Ze zetten de context naar hun hand om greep te krijgen op wat van hen verwacht wordt.

Dit wordt door Mercer (1992) op de volgende manier beschreven:

Pupils accomplish educational activities by using what they know to make sense of what they are asked to do. As best they can they create a meaningful context for an activity, and the contexts they create consist of whatever knowledge they invoke to make sense of the task situation.

(Mercer, 1992, pag.1 & 32)

In dit onderzoek zagen we wat dit kan betekenen voor de manier waarop leerlingen de opgaven maken:

- leerlingen betrekken contextelementen uit hun eigen belevingswereld bij hun aanpak. Dit kan een positieve effect hebben, zoals bij Bertwin, die denkt dat beide torens tegelijk gezien kunnen worden omdat het afhangt van het soort fotoestel, maar het kan het oplossingsproces ook belemmeren. Denk daarbij aan Maura, die de weersgesteldheid bij opgave 7 betreft;
- leerlingen gebruiken contextelementen die er niet toe doen. Dat zagen we bijvoorbeeld bij Maura, die de schaal van de kaart erbij betreft en veel betekenis geeft aan het feit dat het schip groot is;
- leerlingen ervaren de context als authentiek en redeneren vanuit de reële situatie die de context schetst. In het onderzoek zagen we dat leerlingen vanuit de context van kijken redeneren, en dus naar kijkrichtingen zoeken, in plaats van naar kijkpunten; leerlingen redeneren met een beperkt blikveld in plaats van met een reeks van blikvelden; leerlingen redeneren vanuit het idee van een echte verrekijker, waarmee je een kijkrichting kiest, inzoomt, enzovoort, terwijl de verrekijker in dit ontwerp al een gemathematiseerd gereedschap is dat dit niet toelaat.

Kortom, wanneer je de wiskunde in de opgaven niet kent, kun je vandaaruit ook niet redeneren. Je doet dat vanuit de context en de kennis die je hebt uit je eigen belevingswereld die een rol speelt bij het oplossingsproces.

Anders gezegd, wanneer je de wiskunde kent, zie je de context door een wiskundige bril, waardoor het moeilijk is te voorspellen hoe leerlingen vanuit de context gaan redeneren.

Voor ontwerpers betekent dit dat ze de context zorgvuldig moeten formuleren en het verschil tussen de reële context en de ‘gemathematiseerde’ context van een opgave niet moeten onderschatten. Bovendien is het belangrijk dat ze de context van de opgaven vanuit het perspectief van de leerling bekijken, waarbij het onmisbaar is om deze nog tijdens het ontwerpproces aan leerlingen voor te leggen.

Verder leidt de discussie tot een aantal aanbevelingen ten opzichte van een aanpassing van de opgaven en het applet: de werkelijkheid en het model zouden explicieter uit elkaar gehaald moeten worden en het idee van ‘rondkijken’ zou duidelijker naar voren moeten komen. Een van de problemen die zich in dit onderzoek voordeed had te maken met het feit dat de ontwerpers de kaart als een model van de werkelijkheid zien, terwijl leerlingen die als de werkelijkheid (een luchtfoto) ervaren. Je zou die twee dus meer uit elkaar moeten halen, door de stap van de werkelijkheid naar het model explicieter te maken. Dit kan, bijvoorbeeld door te werken met wat meer reëlere beelden van het eiland, als het gaat om het onderzoeken met de verrekijker enerzijds en door te werken met een schets daarvan anderzijds, wanneer leerlingen met punten en lijnen moeten werken. Verder kan het idee dat je ‘rondkijkt’ verduidelijkt worden door de formulering van de opgaven aan te passen. Daarnaast kan dit gesteund worden door een aangepaste verrekijker, waarmee de gebruiker de kijkrichting kan bepalen en ‘rond kan kijken’.

Verschillen in sociaal-wiskundige normen

De verschillen in opvattingen van ontwerper en leerlingen over de wiskunde, en hoe je daaraan werkt, kunnen ook een rol spelen bij de wijze waarop leerlingen anders reageren dan de ontwerpers hadden verwacht. De mate waarin de context serieus moet worden genomen bij een contextopgave is een voorbeeld dat hiermee te maken heeft. De ontwerpers hadden in dit onderzoek bijvoorbeeld niet van tevoren bedacht dat leerlingen de schaal van de kaart erbij zouden betrekken. Of dat ze rekening zouden houden met het feit dat het een groot schip was. Er was overigens maar één leerling die deze aspecten bij haar redeneringen betrok.

In hoeverre rekening gehouden moet worden met de context van een opgave is iets dat leerlingen langzaam maar zeker moeten ontwikkelen in de reken-wiskundeles. Dit proces van normen ontwikkelen wordt door ervaringen, in een interactief, cumulatief leerproces geconstrueerd. Om dit proces goed te kunnen sturen is feedback op het werk van de leerlingen nodig. De vraag is of dit door de computer kan worden gedaan of dat het een taak is die door de leerkracht moet worden vervuld. Dit hangt waarschijnlijk mede af van de moeilijkheidsgraad van de opgave, maar gezien de beperkingen van de computerleeromgeving en de veelheid aan reacties van leerlingen enerzijds en de complexiteit van dit leerproces ander-

zijds, denken we dat hier een taak voor de leerkracht ligt die niet gemist mag worden.

Verder is het natuurlijk nodig dat leerlingen weten dat dezelfde sociaal-wiskundige normen van de reken-wiskundeles ook gelden wanneer je een rekenopgave op de computer oplost. Dit is belangrijk, omdat bij het werken met de computer ook andere sociale normen gelden, die de sociaal-wiskundige kunnen overheersen. We kunnen de computer als een gereedschap zien en daarvoor gelden specifieke normen (meer hierover in de volgende paragraaf).

We geven hier een voorbeeld van. Het feit dat de computer vaak directe feedback geeft op de handelingen van de leerlingen, moedigt ze aan om met *trial and error* te werken en puur te klikken tot ze het antwoord hebben gevonden. Het beargumenteren van het goede antwoord lijkt dan voor leerlingen overbodig, omdat de computer laat zien dat het zo is.

Verschillen in omgaan met de verrekijker

Een laatste theoretische verklaring voor de verschillen tussen een *actor's* en een *observer's* perspectief betreft het idee dat het gebruik van gereedschappen een subjectieve component bevat. Onderzoek naar het gebruik van gereedschappen in het reken-wiskundeonderwijs wijst uit dat leerlingen het gereedschap, al werkend, betekenis geven (Hiebert et al, 1997). Dit proces wordt beïnvloed door de normen voor het gebruik van gereedschap die in een bepaalde klassenpraktijk gelden (Doerr & Zangor, 2000). Dit verklaart waarom leerlingen op verschillende momenten diverse betekenis aan een gereedschap kunnen ontleen, dat kan afwijken van de verwachtingen van de ontwerper.

In dit onderzoek konden leerlingen bij sommige opgaven de 'verrekijker' gebruiken. De ontwerper probeerde van tevoren de functie daarvan te sturen door deze in de meer generaliserende opgaven niet meer beschikbaar te stellen. Op deze manier wilde hij dat ze de verrekijker vooral als onderzoeksgereedschap - en eventueel als controleapparaat - zouden gaan gebruiken. Leerlingen zouden al experimenterend beredeneren waarom je vanaf een zeker kijkpunt iets op een bepaalde manier kon zien. Wanneer ze vastliepen, zouden ze achteraf de verrekijker kunnen gebruiken.

Dit is tot op zekere hoogte gelukt. We zagen dat wanneer leerlingen dit deden, ze de verrekijker in eerst instantie als controleapparaat gebruikten, wat weer een positief effect had op het leerproces. Helaas gingen ze de verrekijker soms ook gebruiken om het antwoord te vinden. Dit had een negatief effect op het leerproces, omdat het de aard van de opgaven veranderde. Leerlingen gingen niet meer generaliseren en gebruikten de afbeeldingen die de verrekijker gaf als bewijs dat het klopte, zonder daarbij wiskundige argumenten te gebruiken.

In termen van het onderzoek van Doerr en Zangor (2000) werkte het gereedschap nu dus ook als transformatieapparaat. Een directe vraag die hier voor de ontwerpers uit volgt, is in hoeverre het mogelijk is het gebruik van een gereedschap via de computerapplicatie zelf te sturen. Uit dit onderzoek blijkt dat dit tot op zekere hoogte mogelijk is. We zagen namelijk dat het niet altijd beschikbaar hebben van de verrekijker goed werkte, maar dat het niet voldoende was. Gezien het gegeven dat gereedschapsgebruik ook door specifieke normen beïnvloed wordt, is het te verwachten dat hierin geïnvesteerd moet worden. Leerlingen moeten zich bewust zijn dat wanneer ze de computer in de reken-wiskundeles gebruiken, de algemene normen voor computergebruik die ze bij andere opdrachten gebruiken, niet gelden. Het gaat bij rekenopgaven met de computer er niet om snel een antwoord te vinden. De computer moet door leerlingen gezien worden als een instrument waarmee je op onderzoek kunt gaan en waarmee je argumenten kunt vinden voor je antwoorden.

Noot

- 1 Met dank aan B. Heijman voor het corrigeren en kritisch doorlezen van de eerste versies van dit artikel.
- 2 Het spel is te vinden op het 'Rekenweb': www.rekenweb.nl.

Literatuur

- Ball, D. L. (1993). Halves, pieces, and twos: Constructing representational contexts in teaching fractions. In: T. P. Carpenter (ed.). *Rational numbers*. New York: Erlbaum, 157-195.
- Bereiter, C. (1985). Towards a solution of the learning paradox. *Review of Educational Research*, 55, 201-226.
- Cobb, P. (1987). Information-processing Psychology and Mathematics education - A Constructivist Perspective. *Journal of Mathematical Behavior*, 6, 3-40.
- Cobb, P., E. Yackel & T. Wood (1992). A Constructivist Alternative to the Representational View of Mind in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(1), 2-33.
- Cobb, P. & J.W. Whitenack (1996). A method for conducting longitudinal analyses of classroom videorecordings and transcripts. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 213-228.
- Cobb, P. & E. Yackel (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.
- Cobb, P. & J. Bowers (1999). Cognitive and Situated Learning Perspectives in Theory and Practice. *Educational Researcher*, 28(2), 4-15.
- Doerr, H.M. & R. Zangor (2000). Creating Meaning for and with the Graphing Calculator. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 143-163.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.
- Galen, F.H.J. van (2000). De rol van problemsolving-computertaken in reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 18(4), 29-35.

- Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: CD-beta press.
- Gravemeijer, K.P.E. (2002). Preamble: From Models to Modeling. In: K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers & L. Verschaffel (eds.). *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 7-22.
- Gravemeijer, K. (2004). *Creating opportunities for students to reinvent mathematics*. Paper gepresenteerd tijdens de ICME 10, Kopenhagen, Denmark, 4-11.
- Hiebert, J., T.P. Carpenter, E. Fennema, K. Fuson, D. Wearne, H. Murray, A. Olivier & P. Human (1997). *Making Sense: Teaching and Learning Mathematics with Understanding.*, Portsmouth: Heinemann NH.
- Hiele, P.M. van (1973). *Begrip en Inzicht*. Purmerend: Muusses.
- Lave, J. & E. Wenger (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. New York: Cambridge University Press.
- Mercer, N. (1992). Culture, context and the construction of knowledge in the classroom. In: P. Light & G. Butterworth (eds.). *Context and Cognition. Ways of learning and knowing*. New York, Londen: Harvester Wheatsheaf, 28-45.
- Steffe, L. P. (1983). The teaching experiment in a constructivist research program. In: M. Zweng, T. Green, J. Kilpatrick, H. Pollack, & M. Suydam (eds.). *Proceedings of the fourth International Congress on Mathematical Education*. Boston, MA: Birkhauser, 469-471.
- Steffe, L. P. & P.W. Thompson (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In: R. Lesh & A. E. Kelly (eds.). *Research design in mathematics and science education*. Hillsdale: NJ: Erlbaum, 267-307.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114-145.
- Verschaffel, L., B. Greer & E. De Corte (2000). *Making sense of word problems*. Lisse: Swets & Zeitlinger.

In order to design mathematical tasks that foster the intended mental activities, developers try to anticipate what students might do. Students, however, may look at tasks in a very different way than developers or teachers. This has to do with what is called the actor's point of view and the observer's point of view.

In this article we try to understand this difference between points of view more precisely, in order to help explain the differences between what a developer expects and what students in fact do. We do this using a study on the design of questions for an applet on geometry.