



Kenmerken van vakdidactische theorie

- implicaties voor de pabo -

W. Oonk
Flsme, Universiteit Utrecht

Het doel van dit artikel is om, in het kader van de lerarenopleiding basisonderwijs (pabo), helderheid te scheppen over de rol van theorie. Gepoogd wordt om karakteristieke kenmerken van theorie in kaart te brengen en een beeld te krijgen van essentiële aandachtspunten voor de functie van theorie in de opleiding. Daartoe wordt de vakdidactische theorie van het leren en onderwijzen van vermenigvuldigen geanalyseerd. Door bestaande theorieën tegen het licht te houden, kunnen ideeën gestalte krijgen voor de manier waarop gekeken kan worden naar de vraag hoe aanstaande leraren theorie gebruiken. De gedachte is dat van de gevonden kenmerken van theorie aandachtspunten voor theorie in de lerarenopleiding kunnen worden afgeleid, die op hun beurt belangrijke ingrediënten kunnen zijn voor te ontwikkelen opleidingscurricula en onderzoeksinstrumenten.

De studie is onderdeel van het onderzoek 'Theorie in Praktijk' (TIP) naar de wijze waarop aanstaande leraren met theorie omgaan.¹

1 Inleiding

Werkdefinitie van 'theorie'

De mens heeft van nature een onverzadigbare nieuwsgierigheid en een onstuitbare wil om te begrijpen. Voor dat doel heeft zij een aantal unieke gereedschappen beschikbaar, zoals het vermogen om te denken en gedachten te verwoorden. Daarmee kan de eigen werkelijkheid besproken of beschreven worden, met eenvoudige begrippen, maar ook met concepten die een meer complexe of abstracte betekenis hebben. Die activiteiten kunnen een begin zijn van theorievorming.

Zodra een verzameling beschrijvende concepten samenhang vertoont en de coherentie ook onderbouwd is, kan gesproken worden van theorie; zo'n systeem kan zowel uitspraken en redeneringen als verklaringen, veronderstellingen, vermoedens, voorspellingen en bewijzen bevatten. Ook de menselijke geest zelf kan object van theorievorming zijn. Zo zijn onderzoekers van onderwijs sinds jaar en dag op zoek naar theoretische constructen die een nieuw licht werpen op de ontwikkeling van kinderen. De ontwikkeling van getalbegrip bij leerlingen is daar een voorbeeld van.²

Mensenwerk

Theorie is mensenwerk en als zodanig gekleurd door opvattingen. Dat kan theorie een subjectief karakter geven, al denken veel mensen bij het woord theorie aan iets abstracts of hogers, iets dat min of meer tegenover de praktijk staat.³ Theorie ontwikkelen lijkt een activiteit die

bestemd is voor wetenschappers, theorie gebruiken of toepassen voor professionals in de praktijk. Bestaat theorie dan bij de gratie van de praktijk? Dat hangt er vanaf. In de zuivere wetenschap gaat het om 'pure' theorie en is het ontwikkelen van theorie doel op zich. In de toegepaste wetenschap staat theorie (ontwikkeling) in dienst van de praktijk en bestaat er als het goed is een wisselwerking tussen die twee. Overigens laat de oude geschiedenis al zien dat ook verbeelding van de praktijk kan leiden tot theorievorming.

De wortels van het begrip theorie

In de onderzoeksliteratuur is een grote variatie te vinden aan definities en opvattingen over de betekenis van het begrip theorie. De wortels van dat begrip vinden we bij Plato en Aristoteles. Voor hen is het doel van het bestaan gelegen in de 'theoria of contemplatie'. Volgens Plato is het ontstijgen van het lagere het hoogste doel. Niettemin vindt hij de terugkeer naar het lagere noodzakelijk (Bor e.a., 1995, pag.49). Aristoteles, de briljante leerling van Plato, hecht nog meer dan zijn leraar aan de relatie van kennis met de werkelijkheid; kennis is er ook om de alledaagse wereld te verrijken. Om het verschil tussen de denkwijzen van Plato en Aristoteles te illustreren wijzen wetenschappers tot op de dag van vandaag wel op Raphaels beroemde fresco 'De School van Athene', waar Plato's vinger naar omhoog wijst en die van Aristoteles naar de aarde. Sommigen zien dat onderscheid zelfs als dermate fundamenteel en verhelderend in vergelijking met het huidige, volgens hen verwarrende jargon van concepten over kennis, dat zij het aangrijpen als aanzet tot de eigen theoretische onderbouwing van opvattingen

over theorie en praktijk. Is er dan sedert de oude Grieken zo weinig vooruitgang geboekt? Korthagen is wat betreft de lerarenopleiding inderdaad die mening toegedaan. Hij vereenzelvigd het begrip theorie zelfs met twee concepten van kennis zoals die door Plato en Aristoteles zijn ontwikkeld, namelijk de epistème en de phronèsis (Korthagen, 2001). De epistème staat voor academische, conceptuele kennis, de phronèsis voor perceptuele kennis, practical wisdom die is gebaseerd op de waarneming van een situatie en de reflectie daarop. Ontwikkeling van de laatste soort acht hij voor studenten van de lerarenopleiding het belangrijkste. De vraag rijst hier wat de relatie is tussen kennis en theorie(vorming). Theorie en kennis zijn verschillende zaken. Theorie kan ontstaan door reflectie op een waarneming of door het problematiseren van een gedachte. Daarvoor is kennis nodig. Het geheel van veronderstellingen, redeneringen en conclusies - voor de oude Grieken het beschouwen (theooria) - levert theorie en nieuwe kennis op. Een veranderde kijk op de problematiek levert weer nieuwe gezichtspunten en vooronderstellingen en zo ontstaat een cyclus van zich vernieuwende theorieën. De ontwikkeling van de theorie van de zwaartekracht - met achtereenvolgens de opvattingen en vondsten van Aristoteles, Newton en Einstein - is een voorbeeld van een dergelijk verloop.

Formele en empirische theorie

De kern van de studie, die hierna wordt beschreven, gaat in grote lijnen over het volgende. Van de theorie van het leren en onderwijzen van vermenigvuldigen wordt de geschiedenis beschreven, dat wil zeggen het ontstaan van het domein en de inhoud. Er is gekozen voor deze theorie om een aantal redenen. In de eerste plaats omdat de theorie van het leren en onderwijzen van vermenigvuldigen een onderwijstheorie is, die zowel kenmerken van een formele, wiskundige theorie heeft als die van een empirische theorie, in dit geval de didactiek van het leren vermenigvuldigen. De beide soorten onderscheiden zich tot op zekere hoogte door objectieve en subjectieve karaktertrekken. Het kenmerk 'objectief' verwijst in zijn uiterste vorm naar wetenschappelijke theorieën die hun 'status' ontleen aan acceptatie binnen het paradigma van een wetenschappelijke gemeenschap. Een wetenschappelijke theorie wordt als (voorlopig) waar gehouden op grond van de gekozen methodologie binnen dat paradigma (Koningsveld, 1992). In de ontwikkeling van de didactiek voor het leren vermenigvuldigen worden vooral ook subjectieve, door individuele opvattingen gekleurde kenmerken zichtbaar.

Ten slotte is het zo dat de formele en empirische component van het leren onderwijzen van vermenigvuldigen - respectievelijk de achterliggende wiskunde en de didactiek - verschillen in de relatie die ze hebben met de (bijbehorende) praktijk. Die relatie wordt onder andere bepaald door de wijze waarop theorie wordt geproduceerd of gebruikt (Fenstermacher, 1986), bijvoorbeeld

'in- of on action' (Schön, 1983), of door de mate waarin de theorie de praktijk beïnvloedt of zelfs stuurt (Eraut, 1994).

Hierna wordt gepoogd om in een reflectieve analyse, kenmerken van de theorie te signaleren die karakteristiek zijn voor de theorie, zoals bijvoorbeeld de samenhang tussen de in de theorie voorkomende begrippen of de onderbouwing van uitspraken. Er wordt daarbij onderscheid gemaakt tussen intrinsieke kenmerken, die slaan op de interne structuur van de theorie en de overige, extrinsieke kenmerken, die zichtbaar worden in de context waarin de theorie ontwikkeld of gebruikt wordt. Bij het analyseren van de theorie wordt de hiervoor genoemde werkdefinitie van theorie gehanteerd als voorlopig denkkader.

We beginnen met een schets van het domein, met daarna een korte beschrijving van de essenties van de theorie, het ontstaan en de ontwikkeling ervan, om ten slotte op basis van een analyse te komen tot aandachtspunten voor de plaats en functie van theorie op de pabo.

2 Theorie van het leren en onderwijzen van vermenigvuldigen

De bakermat van de theorie

Het leren en onderwijzen van het vermenigvuldigen speelt zich af in de wereld van het onderwijs, op het niveau van het lesgeven aan leerlingen, op het niveau van de schoolboekenschrijvers die aan het lesgeven een bepaalde inhoud en vorm geven en op het niveau van de wetenschap, waar theoretici zich met de achtergronden van leren en vermenigvuldigen bezighouden.

De bakermat, het werkveld waar men op de genoemde niveaus (leraar/leerling, ontwikkelaar/autheur, wetenschapper/theoreticus) en vanuit verschillende invalshoeken (wiskunde en psychologie) met vermenigvuldigen bezig was, kan men dus zien als de context waarin de theorie geïnitieerd werd.

Het leren (memoriseren) van de tafels is van oudsher de kern van het leren vermenigvuldigen. In het primair onderwijs van voor 1970 - de periode vóór Wiskobas⁴ - kreeg het inoefenen van de tafels dan ook de meeste aandacht. Veel kinderen kenden al tafelproducten voordat ze eigenlijk de betekenis van de bewerking vermenigvuldigen door hadden. Vermenigvuldigen was voor de leraar en de schoolboekauteurs niet meer en niet minder dan herhaald optellen. Op de kweekschool (Jansen & Van Brink, 1951) hadden zij het vanuit een wiskundige (rekenkundige) invalshoek zo geleerd: 3×7 is hetzelfde als $7 + 7 + 7$. Dat wordt stap voor stap uitgerekend als $7 + 7 = 14$; $14 + 7 = 21$. Deze aanpak werd de grondslag voor het leren van de tafelproducten. Voortdurend

opzeggen dus, en steeds meer antwoorden al uit het hoofd kennen. Slimme leerlingen hadden al gauw in de gaten dat je 6×7 kon uitrekenen door 2×7 bij $4 \times 7 = 28$ op te tellen. Wie echter veel moest rekenen, verloor wel eens het overzicht en vergat waar hij in de rij gebleven was. Maar zonder dit slimme rekenwerk werd de rij tafels een rij betekenisloze objecten. Leerpsychologisch gezien was het leren van de tafels gebaseerd op de ideeën uit de associatiepsychologie.⁵

Ontwikkelaar en onderzoeker Ter Heege was in dit werkveld zelf als leerling en als leraar actief bezig. Hierover vertelt hij onder meer dat hij door het werken met kinderen geconfronteerd werd met zijn eigen opvatting. Die opvatting was gekleurd door ervaringen uit de eigen lagere schoolperiode en werd ook nog eens bevestigd in de opleiding voor onderwijzer en daarna verder verdiept door het werken in de praktijk met de mechanistische methode 'Naar zelfstandig rekenen'. De reflectie op het werken met kinderen, de eigen opvattingen en het eigen leren, mede gevoed door de discussies in het Wiskobas-team, gaven hem impulsen voor het ontwikkelen van een theorie waarin de mechanistische kenmerken ontbraken. Ter Heege (1978, 1985, 1986) gaf de aanzet voor een nieuwe theorie van het leren en onderwijzen van vermenigvuldigen.

De theorie

De ingrediënten

De theorie van het leren en onderwijzen van het vermenigvuldigen omvat de volgende bestanddelen:

- Begrippen, zoals vermenigvuldigen (met bijbehorende notatie \times), vermenigvuldigstrategie, informele strategie, herhaald optellen, structurerend vermenigvuldigen, formeel rekenen, memoriseren, automatiseren, eigenschappen, ankerpunten, reproductie, reconstructie, modellen, lijnstructuur, groepsstructuur, rechthoekstructuur, contexten, oefenen, toepassen.
- Aanwijzingen voor het onderwijzen die betrekking hebben op de fasering van het leerproces van leerlingen in niveaus van handelen en denken en aanwijzingen voor het verkorten daarvan, met voorbeelden van leerlingenactiviteiten op het gebied van de begripsvorming, het memoriseren, het oefenen en het toepassen.
- Richtlijnen voor het verstrengelen van leerstoflijnen en voor het vervlechten van leren en onderwijzen (Van den Heuvel-Panhuizen et al., 1998, pag.41).

In de toelichting op deze theorie beperken we ons tot het (kern)begrip vermenigvuldigen, andere ingrediënten worden verderop in deze beschrijving aan de orde gesteld bij het ontstaan en de ontwikkeling van de theorie.

Het begrip vermenigvuldigen, fenomenologisch en wiskundig beschouwd

De som $3 \times 4 =$ is een kale (formele) vermenigvuldigingssom, waarvan elke geoefende rekenaar het antwoord weet. De

vermenigvuldiging kan de wiskundige weergave zijn van verschillende situaties uit het dagelijks leven. De gebruikswaarde van vermenigvuldigen is onbetwist; we weten dat vermenigvuldigen van getallen al in de oudheid voorkwam.⁶ Het is een middel om situaties die een multiplicatieve structuur hebben te doorgronden, te analyseren en te communiceren.

Situaties (verschijningsvormen) van de vermenigvuldiging 3×4 of van $2 \times 3 \times 4$ zijn bijvoorbeeld:

- 3 stukken draad van 4 meter;
- 3 broeken en 4 shirts, hoeveel combinaties?
- 3 gouden sterren per dm op een kerstlint van 4 dm;
- we zijn met z'n drieën; ieder krijgt 4 vellen papier;
- een tegelplein van 3 bij 4 tegels;
- 3 routes van Hilversum naar Laren, 4 van Laren naar Huizen. Hoeveel routes van Hilversum naar Huizen via Laren?
- op de zakrekenmachine wordt 3 keer 4...;
- de afmeting van de vijver is 2 bij 3 bij 4 meter. Hoeveel liter water moet er in?

Hoe verscholen de operatie in sommige van die situaties zit, blijkt uit het feit dat in 1980 één op de drie kinderen er aan het einde van de basisschool nog geen vermenigvuldiging in ziet; dat zijn met name de situaties waarin combinaties voorkomen (Carpenter, 1981).

Ontwikkelaars van het Freudenthal Instituut onderscheiden anno 1998 in vermenigvuldigingssituaties drie soorten structuren: de lijnstructuur (3 stroken van 4 meter), de groepsstructuur (3 dozen met elk 4 ballen) en de rechthoekstructuur (3 rijen met elk 4 tegels). Het is een fenomenologische beschrijving van wiskundige structuren, dat wil zeggen een beschrijving van begrippen en structuren (hier het vermenigvuldigen) in relatie tot de fenomenen waarvoor 'zij geschapen en waartoe zij uitgebreid werden in het leerproces van de mensheid' (Freudenthal, 1984a, pag.9).

De fundamenteel wiskundige achtergrond van het vermenigvuldigen is minder vanzelfsprekend te duiden dan het voorgaande. Het optellen en vermenigvuldigen - en daarmee ook andere operaties met getallen - zijn wiskundig gebaseerd op theorieën over het getal. Euclides (ca. 300 v. Chr.) vertolkte als eerste een theorie die erop neerkomt dat een natuurlijk getal bestaat uit eenheden.

Euclides zegt daarover onder andere:

Eenheid is hetgeen waarnaar elk ding één wordt genoemd.
 Getal is een uit eenheden samengestelde verzameling.
 (Euklides VII, def.2. in Freudenthal, 1984a, pag.86; Struik, 1990)

Dat was tot aan het begin van de twintigste eeuw een heersende opvatting. Omstreeks 1900 werd die opvatting door de Italiaanse wiskundige Giuseppe Peano (1858-1932) geformaliseerd in zijn ontwerp van een axioma-stelsel voor de natuurlijke getallen. Het vijfde en laatste

axioma van dat stelsel, het zogenaamde axioma van de volledige inductie, bepaalt in feite de volledige, geordende en oneindige verzameling van de natuurlijke getallen (Loonstra, 1963, pag.18). De volledige inductie wordt gezien als één van de gereedschappen om het optellen en vermenigvuldigen te definiëren. De definitie van het vermenigvuldigen door volledige inductie kan worden gezien als voortgezet (herhaald) optellen (tafel-productie).

Een tweede definitie komt voort uit de aantal-benadering van het vermenigvuldigen. De Duitse wiskundige Georg Cantor (1845-1918), schepper van de leer der verzamelingen, legde daarvoor aan het eind van de negentiende eeuw de grondslag, door het getal te beschouwen als aantal van iets.

Wiskundig gezien is volgens die theorie het getal een eigenschap van een eindige verzameling, het zogenaamde kardinaalgetal. Het optellen kan dan gedefinieerd worden als het verenigen van disjuncte verzamelingen, dat zijn verzamelingen die geen enkel element gemeenschappelijk hebben. In niet-wiskundetaal betekent dat zoveel als het 'samenvoegen' van hoeveelheden. De vermenigvuldiging wordt volgens de aantal-benadering gedefinieerd als het kardinaalgetal $v = m \times n$ van de productverzameling (A, B) van getallenparen (a, b) met $a \in A$ en $b \in B$, waarbij de verzameling A een aantal van m elementen heeft (kardinaalgetal m) en de verzameling B het kardinaalgetal n heeft. Concretisering in een rooster (rechthoek)model, laat zien dat deze definitie van vermenigvuldiging - anders dan die volgens de volledige inductie - gemakkelijk haar eigenschappen bloot geeft, omdat de structuur van het vermenigvuldigen in het rooster zichtbaar wordt.

We nemen als voorbeeld de productverzameling (A, B) met $A = \{a1, a2, a3, a4\}$ en $B = \{b1, b2, b3\}$. Uit $m = 4$ en $n = 3$ maken we nu de matrix $(A \times B)$, die het aantal 4×3 in een roosterstructuur laat zien.

(a1, b1)	(a2, b1)	(a3, b1)	(a4, b1)
•	•	•	•
(a1, b2)	(a2, b2)	(a3, b2)	(a4, b2)
•	•	•	•
(a1, b3)	(a2, b3)	(a3, b3)	(a4, b3)
•	•	•	•

Door het rooster een kwartslag te draaien wordt bijvoorbeeld zichtbaar dat $3 \times 4 = 4 \times 3$ (algemeen geformuleerd: de commutatieve wet geldt, $m \times n = n \times m$).

Wat opvalt is dat het - zelfs voor de geschoolde wiskundige - enige moeite kost om de beide formele benaderingen van vermenigvuldigen te herkennen in de fenomenologie van wiskundige vermenigvuldigstructuren. Freudenthal heeft dat onderkend. In zijn 'Didactische fenomenologie van wiskundige structuren' (1984a), doet hij uitspraken over de relatie tussen beide wiskundige benaderingen en over de didactische betekenis ervan. Hij acht onder meer het verzamelingtheoretisch product, zoals weergegeven in het roostermodel, in didactische zin ontoereikend. Hij bedoelt daarmee te zeggen dat leerpro-

cessen van leerlingen geen weerspiegeling hoeven te zijn van die mathematische (her)structureringsprocessen.⁷ Het wiskundig fundament speelt wel op de achtergrond mee, maar een fenomenologie van wiskundige begrippen en structuren is meer geëigend om de onderwijsgevende de weg te wijzen naar het leerproces van de lerende. Wat betreft het fenomenologische karakter van het vermenigvuldigen spreekt Freudenthal in dat verband over de 'vanzelfsprekendheid' van de operatie vermenigvuldigen:

Geen operatie - ook niet het optellen en het aftrekken - dient zich met zulk een vanzelfsprekendheid aan.
(Freudenthal, 1984a, pag.120).

Hij heeft het dan over de wijze waarop jonge kinderen begrip van het vermenigvuldigen verwerven. Voor zij daadwerkelijk met de rekenkundige operatie te maken krijgen, gaan er jaren vooraf waarin de vermenigvuldigwoorden als 'dubbel' en 'keer' al een betekenisvolle basis leggen. Voorbeelden daarvan zijn: ik heb het dubbele, je hebt het nu drie keer gehoord, je mag drie keer vier kralen pakken ofwel vier kralen en vier kralen en vier kralen. We zullen zien dat de opvattingen van Freudenthal veel invloed hebben gehad op de theorievorming van het leren vermenigvuldigen in de Nederlandse onderwijs-situatie. Natuurlijk kon hij niet alles voorzien. In hetzelfde jaar vertelt hij elders (Freudenthal, 1984c) over het verwerven van basiskennis met behulp van oefeningen op de computer. Het bepalen van de (tussen)uitkomsten was mogelijk met de computer, zo ervoer hij, maar een foutenanalyse maken of het motiveren van een rekenprocedure kon niet; dat laatste zag hij ook als te hoog gegrepen. Hij kon niet bevroeden dat Klep drie jaar later (met Gilissen) een softwarepakket onder de titel 'Een wereld rond tafels' zou ontwikkelen waarmee de computer wel degelijk meer kon dan antwoorden geven. In zijn promotieonderzoek toonde Klep (1998) vervolgens aan, dat software ontwikkeld kan worden waarmee de computer het proces van inzichtelijk oefenen van leerlingen geheel kan volgen.

Het ontstaan en de ontwikkeling van de theorie

De periode tot 1970: de mechanistische theorie

Het is nog maar kort geleden dat zich veranderingen begonnen af te tekenen in de visie op het leren vermenigvuldigen. Tot de jaren zeventig werd *drill and practice* als vanzelfsprekend beschouwd voor het leren van de tafels. In feite bestond het leren vermenigvuldigen eeuwenlang uit weinig anders dan een aantal rekenregels die verworven moesten worden door 'voordoen, nadoen en inoefenen'. Uit de studie van Kool (1999) over Nederlandstalige rekenboeken uit de vijftiende en zestiende eeuw blijkt, dat het leren vermenigvuldigen in die tijd voornamelijk bestond uit het geven van een definitie van vermenigvuldigen en een tabel met tafelproducten. Het ging bij het leggen van de basis voor het vermenigvul-

digen om het verwerven van parate kennis die ingezet kon worden voor het cijferen. Ook voor het cijferen werd overigens geen inzicht in de procedures verlangd. Dat is goed te zien in het werk van Willem Bartjens; hij is een voorbeeld van een Nederlandse schoolmeester uit de zeventiende eeuw die met zijn schoolboek 'Cijfferinge' (omstreeks 1630) een beroemde rekenmeester werd. Zijn boeken waren een neerslag van het rekenen uit die tijd; ze zouden het eeuwenlang volhouden. Het gezegde 'volgens Bartjens' typeert de toenmalige rekenkunst; de schoolmeester moest uitleggen hoe het 'volgens Bartjens' moest, volgens 'de regels der rekenkunst'. Dat betekende instrumenteel uitleggen: de rekenprocedures werden verteld en vervolgens ingeoeffend door het maken van een indrukwekkende hoeveelheid opgaven. Inzicht geven vond men onnodig en zonde van de tijd. De leerlingen moesten zo snel en zo goed mogelijk leren rekenen voor het leven van alledag. Volwassenen dienden zich te bekwamen voor beroepen als klerk, onderwijzer of landmeter; daar ging het om vaardigheid en zekerheid, niet om achterliggende verklaringen. Bij inzicht in het rekenen waren zij niet gebaat, dat was kost voor geleerden. De associatiepsychologie en het *behaviorisme* hebben veel en langdurig invloed gehad op die 'praktijk'. Nauwelijks dertig jaar geleden werden er nog rekenmethoden gebruikt die op een mechanistische leest geschoeid waren. Een voorbeeld van een veelgebruikte mechanistische methode is 'Naar zelfstandig rekenen', die stamt uit de jaren vijftig. Zelfs in het huidige onderwijs zijn nog steeds elementen van die aanpak herkenbaar.

Onderstaande pagina uit 'Naar zelfstandig rekenen' illustreert de aanpak van die methode (fig.1).

2	$1 \times 2 = 2$
2+2	$2 \times 2 = 4$
2+2+2	$3 \times 2 = 6$
2+2+2+2	$4 \times 2 = 8$
2+2+2+2+2	$5 \times 2 = 10$
2+2+2+2+2+2	$6 \times 2 = 12$
2+2+2+2+2+2+2	$7 \times 2 = 14$
2+2+2+2+2+2+2+2	$8 \times 2 = 16$
2+2+2+2+2+2+2+2+2	$9 \times 2 = 18$
2+2+2+2+2+2+2+2+2+2	$10 \times 2 = 20$
Leer de tafel van 2 uit je hoofd.	

figuur 1

'Leer de tafel van 2 uit je hoofd', is de enige aanwijzing voor de leerlingen, ook de leraar vindt in de handleiding geen nadere informatie over mogelijke didactische handwijzen.

Samengevat kan de mechanistische theorie van het leren vermenigvuldigen gekarakteriseerd worden als een verzameling rekenkundige symbolen, definities, procedures en opvattingen, onder andere:

- de symbolen $+$, \times en $=$;
- de definitie dat de herhaalde optelling $b + b + b + \dots$ (dat a keer) geschreven kan worden als $a \times b$ met de stilzwijgende aanname dat beide dezelfde uitkomst hebben (bijvoorbeeld $2 + 2 + 2 = 3 \times 2$);
- de procedure van het leren van de tafels aan de hand van tabellen;
- de opvatting dat leren vermenigvuldigen plaats vindt door het inprenten van tafelproducten en het toepassen van vaste procedures.

Dat die theorie zo lang stand kon houden heeft waarschijnlijk te maken met het gezag van de even 'taai' achterliggende ideeën over leren (associatiepsychologie en behaviorisme), mogelijk in combinatie met de consensus over de aanpak onder leraren en pedagogen uit die tijd of het gebrek aan communicatie over de kritiek daarop.⁸

De ommekeer vanaf 1970: een nieuwe theorie

In feite verandert de theorie van het leren vermenigvuldigen pas wezenlijk in de jaren zeventig van de vorige eeuw. Onder invloed van met name Piaget, die het klinisch interview als methode ontwikkelde en beschreef, kwamen leer- en ontwikkelingsprocessen van kinderen in de aandacht. Voor het wiskundeonderwijs werden dergelijke methoden toegepast door diverse wetenschappers.⁹ Ter Heege - in Nederland pionier op het gebied van het leren vermenigvuldigen - paste die methode toe als hij met kinderen praat over hun tafelkennis (Ter Heege, 1978, 1986).¹⁰ Onder de titel 'Johan, een afhaker haakt aan', analyseerde Ter Heege zeven gesprekken met Johan, een twaalfjarige jongen uit groep 7. Hij ontdekte dat de als zwakke rekenaar bekend staande Johan, een grote flexibiliteit aan de dag legde bij het uitrekenen van basisvermenigvuldigingen; hij gebruikte eigen rekenstrategieën die niet van tevoren onderwezen waren. De opbrengst van de interviews vormde de aanleiding en het middel tot nieuwe theorievorming over het leren vermenigvuldigen. Het begint als een persoonlijke theorie op basis van eigen ervaring en analyses. De 'theorie' - verwoord in conclusies en een aanbeveling (Ter Heege, 1986, pag.56) - komt er op neer dat kinderen veel meer moeite hebben met het leren van de producten uit de tafels van vermenigvuldiging dan door de traditionele visie op het onderwijs wordt gesuggereerd. Ook de wijze waarop kinderen de producten leren wijkt in belangrijke mate af van hetgeen leraren en auteurs van rekenmethoden veronderstellen; kinderen gebruiken vaak eigen rekenstrategieën bij het vermenigvuldigen. De aanbeveling luidt:

Kinderen zouden de basisvermenigvuldigingen moeten leren door flexibel gebruik te maken van een aantal eigenschappen en rekenstrategieën, te weten de commutatieve eigenschap, het verdubbels- en halveringsprincipe, de strategie 'één keer meer' of 'één keer minder' en de strategie gebaseerd op de factor 10.

Ter Heege vindt ondersteuning voor deze en andere tot

hypothesen ontwikkelde vermoedens door analyse van vigerende rekenmethoden en een verkenningstocht door de literatuur van de geheugenpsychologie.¹¹ Dat geldt in het bijzonder voor het feit dat kinderen op eigen kracht denkstrategieën hanteren en dat ze zelf hun cognitief netwerk construeren ten aanzien van de basisvermenigvuldigingen.

Het is de reflectie op die 'praktijk' van het geheugenonderzoek die de volgende ontwikkelingsvraag bij hem oproept, namelijk:

... of er een aanpak kan worden ontwikkeld, die kinderen maximaal de gelegenheid biedt op eigen kracht een adequaat netwerk op te bouwen voor de basisproducten die zij als rekenfeiten moeten leren en moeten kunnen toepassen. (pag.133)

Als antwoord op die vraag ontwerpt Ter Heege een onderwijsleerpakket voor het vermenigvuldigen. Dat leerpakket probeert hij uit in de praktijk van het basisonderwijs. In wederom een reflectie op de praktijk, die we nu als de praktijk van de curriculumontwikkeling kunnen betitelen, beschrijft hij de theoretische overwegingen die aan de ontwikkeling van het programma ten grondslag liggen. In feite formuleert Ter Heege hier een voorlopige eindversie van de theorie van het leren vermenigvuldigen. Het nieuwe eraan ten opzichte van de vorige versie, is onder meer de systematische onderbouwing. De structuur daarvoor creëert hij door drie 'fundamentele elementen' (pag.71) centraal te stellen: de eigen constructie door kinderen, de eigen producties van kinderen en het zogenaamde horizontale en verticale mathematiseren (Treffers, 1978). Dat alles tegen de achtergrond van de anno 1986 heersende vakdidactische theorie voor het realistische reken-wiskundeonderwijs in Nederland (Treffers & Goffree, 1985).

Ter Heege zoekt duidelijk naar verbindinglijnen met die theorie en naar consensus met de uitgangspunten en principes van die theorie. Hij onderbouwt daartoe de eerder genoemde drie 'theoretische elementen' vanuit zijn eigen onderzoek. Zo blijkt bijvoorbeeld uit zijn onderzoek wat betreft de rol van de 'eigen constructies' voor het leerproces van leerlingen, dat kinderen in hun worsteling om het vermenigvuldigen te leren, naar eigen oplossingen zoeken en eigen wegen vinden. De oplossingen die het kind zelf 'uitvindt' blijken beter en diepgaander begrepen te worden dan oplossingen die worden 'overgenomen' van leraren.

In de 'Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool, deel 2', hoofdstuk 3 (Treffers & De Moor, 1990), kunnen we zien hoe de door Ter Heege ontwikkelde theorie voor het leren vermenigvuldigen wordt geadopteerd en uitgewerkt. De 'Proeve...' is ter legitimatie voorgelegd aan een groot aantal deskundigen. Die legitimatie wordt nog eens versterkt door voorafgaande publicaties in vaktijdschriften en door discussies onder vakgenoten tijdens conferenties. Nog eens acht jaar later verschijnt de TAL-brochure¹²

(Van den Heuvel-Panhuizen, et al., 1998), waarin tussen-doelen beschreven staan voor het reken-wiskundeonderwijs in de onderbouw van de basisschool. De tussen-doelen voor het vermenigvuldigen en de verantwoording daarvan (pag.59-63), ademen de geest van de hiervoor besproken theorie van het leren vermenigvuldigen. Ze presenteren in feite 'de theorie in activiteiten', ook al vanwege de genuanceerde onderbouwing van de doelen en de illuminatie ervan met kernvoorbeelden.

We kunnen de meest recente theorie (in de 'Proeve...' en 'TAL') als volgt karakteriseren:

- Het leerproces van de leerlingen wordt, net als in de voorgaande theorieën, beschouwd als een reconstructieproces¹³ en gefaseerd aangeduid. Die fasering wordt hier echter meer genuanceerd en uitgebreid beargumenteerd.
- Waar modellen in de theorie van Ter Heege nog een summiere plaats krijgen toebedeeld, is de rol van modellen in de 'Proeve...' veel sterker en wordt de betekenis ervan in de TAL-brochure nog verder vergroot.
- Er is bijzondere aandacht voor niveaus. Anders dan in de voorgaande theorieën voor het leren vermenigvuldigen, worden niveauverhogingen in leerprocessen van leerlingen beschreven, die het mogelijk maken verschillen tussen kinderen te herkennen en benutten.
- In het algemeen is de verantwoording van aanpakken en keuzen scherper dan in de hiervoor beschreven theorie.

Overigens zijn er hier nog duidelijke signalen te bespeuren van de theorieën die voorafgingen.¹⁴ Hierna gaan we verder in op een aantal specifieke kenmerken van de hiervoor geschetste realistische theorie van na 1970.

Intrinsieke kenmerken van de theorie

Samenhang

De samenhang van de theorie wordt in belangrijke mate bepaald door de aard van het begrip vermenigvuldigen, dat zowel een realistisch als een formeel karakter heeft. Enerzijds heeft het begrip vermenigvuldigen betekenis door de relatie met de fenomenen (situaties, strategieën) die ermee worden beschreven en de andere ingrediënten van de theorie die hun functie er aan ontleen, anderzijds houdt dat begrip - als wiskundige operatie - de geslotenheid van de actuele getallenverzameling in stand. Het laatste leidt er onder meer toe dat kennisnetwerken van tafels interne samenhang hebben.¹⁵

Onderbouwing van uitspraken

Aanvankelijk wordt de vakdidactische theorie onderbouwd door reflecties op de praktijk (observaties) die gekleurd zijn door eigen ervaringen en opvattingen van de ontwikkelaars. Gaandeweg wordt die onderbouwing meer 'objectief' en gebeurt het ontwikkelen meer syste-

matisch, onder andere omdat gebruik gemaakt wordt van de opbrengsten van andere ontwikkelingsonderzoekers en van bestaande theorieën. De systematiek schuilt in de cyclus van redeneerprocessen met betrekking tot het uitdenken van curriculumonderdelen, het analyseren van en het reflecteren op de opbrengsten van de *try-outs* en het naar aanleiding daarvan ontwikkelen van nieuwe theorie. De kwaliteit van de onderbouwing wordt in belangrijke mate bepaald door de overtuigingskracht van de redeneringen.

Consensus en waarheidswaarde

Een typerend kenmerk van de theorievorming bij deze theorie is het zoeken naar consensus door de ontwerpers. Het is behalve vallen en opstaan, ook een zaak van 'loven en bieden'. De consensus kan van tweeërlei aard zijn; ze kan betrekking hebben op het streven naar overeenstemming met uitgangspunten van andere theorieën, maar ook op de wens om overeenstemming te krijgen in de discourse met collega-wetenschappers of met professionals in het relevante werkveld.

Theorievorming is hier een subtiel samengaan van individuele en gezamenlijke inspanning. Dit soort pogingen tot integratie van de nieuw ontwikkelde theorie met bestaande ideeën en theorieën, maakt die theorie niet alleen sterker, het vergemakkelijkt ook de doorgaande ontwikkeling van de theorie. De drempel van de toegang tot het bestaande paradigma¹⁶ wordt verlaagd en daarmee de mogelijkheid tot uitbreiding van de theorie en het verbreden van de consensus daarover. Die bredere consensus betekent dat de theorie aan kracht en (waarheids)waarde wint.

Relatie tot de praktijk

Het cyclische proces dat hiervoor werd aangeduid, toont een sterke, wederkerige relatie tussen theorie en praktijk. We spreken dan over de vakdidactische theorie van het vermenigvuldigen en over de praktijk van de curriculumontwikkeling. Theorie en praktijk 'bevragen elkaar' als het ware. De praktijk kan met voorbeelden en tegenvoorbeelden de theorie bevestigen, verhelderen of falsificeren, dilemma's tonen, nieuwe ingangen voor de theorie oproepen. De theorie geeft inzicht in de praktijk door die te beschrijven, verklaren of voorspellen, levert oplossingen voor praktijkproblemen, roept twijfels op over een aanpak, helpt verantwoording af te leggen over keuzen en meer. Het begrip vermenigvuldigen ontleent zijn betekenis aan diverse praktijken. Dat zijn de 'allegaagse praktijk',¹⁷ die aanvankelijk - tot de vijftiende eeuw - een beperkt aantal beroepsbeoefenaars als kooplieden en geestelijken betrof, de praktijk van de wiskundigen voor wie het begrip vermenigvuldigen een fundamenteel wiskundige lading heeft en de praktijk van de didactici, van degenen die direct bij het leren en onderwijzen van vermenigvuldigen betrokken zijn. De afstand van de theorie tot de laatstgenoemde praktijk is klein of anders gezegd: de theorie is daar 'praktijknabij'.

Extrinsieke kenmerken

Gevoeligheid voor invloeden en de openheid van de theorie

De theorie staat onder invloed van diverse factoren. Er zijn om te beginnen invloeden van andere theorieën. Deze vakdidactische theorie bevat flarden van theorieën uit de wiskunde en uit leertheorieën. Het bijzondere zit in de manier waarop elementen uit de vaktheorie, uit de didactische fenomenologie en uit leertheorieën worden geïntegreerd.

In de tweede plaats is er de invloed van de ontwerper-ontwikkelaar met zijn kennis, inzicht, waarden, normen en opvattingen. Eerder spraken we bijvoorbeeld over de confrontatie met eigen opvattingen die ontwerper-onderzoeker Ter Heege ten deel viel. Zijn opstelling zowel als lerende, leraar, onderzoeker en als ontwerper, kleuren de theorie. Ten slotte is er de gebruiker die de theorie (vorming) beïnvloedt; leraren en hun leerlingen geven belangrijke impulsen voor veranderingen en bepalen uiteindelijk wat er van de theorie terechtkomt. De drie genoemde factoren weerspiegelen het open karakter en de dynamiek van de theorie evenals de complexiteit¹⁸ van het onderwijs waarvoor die theorie bedoeld is.

Fenomenologie als leidraad voor het ontwikkelen

Ter Heege en de ontwikkelaars na hem vinden aansluiting bij de opvattingen van Freudenthal dat wiskundeonderwijs kan worden ontleend aan verschijnselen in de werkelijkheid. In dit geval gaat het om de werkelijkheid van contexten en situaties die de mogelijkheid van mathematiseren, hier het vermenigvuldigen, in zich dragen, alsmede de mogelijkheid voor leerlingen om zich die operatie te realiseren.

De dynamiek van de theorie

De realistische theorie in Nederland begon als reactie op de mechanistische theorie en op de 'New Math'-beweging in de jaren zestig van de vorige eeuw. Voor de verschillende prototypen van de realistische theorie is er sprake van aanpassen, nuanceren en uitbreiden van de voorgaande versie. De ontwerper gebruikt en ontwikkelt theorie als hij bezig is met het ontwerpen en uitproberen van zijn onderwijsleerpakket. Hij ontwikkelt theorie als reflectie op zijn praktijk en maakt daarbij gebruik van de nieuwste ontwikkelingen in de vakdidactische theorie.¹⁹ In de terminologie van Schön (1983) kunnen we hier spreken van een wisselwerking tussen *theory on action* en *theory in action*. Er is sprake van een cyclisch proces. Het proces van curriculumontwikkeling, zoals we dat in het werk van Ter Heege zien, maar ook bij de ontwikkelaars daarna, is te benoemen als een 'theoriegeleide bricolage'. Het is een term die Gravemeijer (1994, pag. 110) gebruikt om zo'n proces te karakteriseren, namelijk als het creatieve werk van een soort 'bricoleur' (klusjesman) die brainstormt, uitvindt, uitprobeert en aanpast. Een dergelijk proces wordt geleid door theorie, maar er wordt

ook theorie ontwikkeld. In alle facetten van het proces bepalen opvattingen van de ontwerpers - ook hun opvattingen over het begrip theorie zelf²⁰ - mede de dynamiek van de theorie(vorming).

De ontwikkelingsgeschiedenis van de theorie toont dat het ontwikkelen van de theorie een kwestie is van vallen en opstaan en dat er sprake is van een blijvende ontwikkeling; de theorie is nooit af. Ter Heege (2005) levert daarvan nog eens een bewijs als hij schrijft over de ontwikkelingen in het onderwijs in vermenigvuldigen ter gelegenheid van de honderdste geboortedag van professor Freudenthal. Hij beschrijft hoe Freudenthals visie op memoriseerprocessen voor het leren van rekenwiskunde zich ontwikkelde. Het gaat over opvattingen die nog steeds herkenbaar zijn, op verschillende niveaus en in verschillende onderwijssettings, opvattingen die van blijvende invloed zijn op de theorievorming in dit gebied.

Samenvatting van de kenmerken

De ontwikkelingsgeschiedenis van de theorie van het leren en onderwijzen van vermenigvuldigen, zoals hiervoor beschreven, laat een ingrijpende evolutie zien. De inhoud van die theorie varieert van een verzameling eenvoudige begrippen, regels en opvattingen, beheerst door de associatiepsychologie en het behaviorisme, tot een verfijnd, vakdidactisch stelsel van begrippen, aanwijzingen en richtlijnen. In alle gevallen heeft de theorie een nauwe relatie met de 'de praktijk van het onderwijs'. De relatie met die praktijk krijgt eerst na de jaren zeventig van de vorige eeuw een hecht en specifiek karakter. Het gedachtegoed van Freudenthal, met name zijn didactische fenomenologie van wiskundige structuren, dwingt de betrokken experts (ontwikkelaars, onderzoekers, begeleiders, leraren) tot een blikwisseling. Het denken in termen van toenemende complicering van het leerstofaanbod voor leerlingen, verandert in het nadenken over progressie in leerprocessen van leerlingen. De theorievorming daarover door experts gebeurt voor een groot deel als reflectie op praktijkervaringen tijdens het ontwikkelingsonderzoek. De theorie kan in dat opzicht beschouwd worden als te beginnen met een reflectie op de praktijk die daarna uitgroeit tot een theoretische onderbouwing en legitimering van die praktijk. De wederkerige relatie tussen theorie en praktijk wordt in belangrijke mate bepaald door een theoriegeleid, cyclisch proces van brainstormen, ontwerpen, uitproberen, analyseren en (theoretisch) reflecteren, dat de ontwerpers als een verheven soort 'bricoleurs' in gang houden en waarbij ze zichzelf als lerende opstellen.

De beschrijving in de TAL-brochure krijgt nog meer dan bij Ter Heege en in de 'Proeve...', het karakter van een praktijktheorie; dat karakter wordt onder meer bepaald door de in activiteiten weergegeven, op de praktijk gerichte doelstellingen en de direct daaraan toegevoegde theoretische verantwoording (we noemden dat 'theorie in activiteiten').

Het is een karakteristiek die aansluit bij de omschrijving die Boersma en Looy (1997) geven van praktijktheorie.²¹ De evolutie van de theorie voor het leren vermenigvuldigen wordt ook nog vanuit een andere invalshoek beïnvloed door de relatie met de praktijk. In de theorie-praktijkrelatie speelt namelijk de discussie en het streven naar consensus van de betrokkenen een belangrijke rol. In de loop van het proces van theorievorming is er onder experts in toenemende mate sprake van consensus over de ontwikkelde theorie. Vanaf de jaren zeventig ontstaat er een hecht netwerk van deskundigen en een wisselwerking met het praktijkveld, waardoor theoretische uitspraken allengs diepgaander en in steeds bredere kring begrepen en aanvaard worden. Dat proces, dat als een 'democratische leerplanontwikkeling' van groot belang is voor innovaties, leidt tot een steeds meer uitgebalancheerde en geaccepteerde theorie.

3 Aandachtspunten voor theorie in de opleiding

Van de hiervoor genoemde intrinsieke en extrinsieke kenmerken van theorie kunnen we aandachtspunten afleiden voor theoriegebruik in de opleiding (zie ook het totaaloverzicht op de volgende pagina). Het intrinsieke kenmerk 'onderbouwen van uitspraken door redeneren en argumenteren' is een eerste voorbeeld daarvan. In opleidingen waar interactie hoog in het vaandel staat is het (leren) redeneren door studenten en hun pupillen in de stageschool een kernactiviteit. Op een hoger niveau beschouwd is de essentie van het aandachtspunt vooral het leren onderbouwen door de student van (voorgenomen) handelingen en het zien van wetmatigheden in het handelen en denken van leerlingen en het daarop leren inspelen. In een artikel onder de titel: 'Knowing, Doing and Teaching Multiplication', wijst Lampert al in 1986 op dit aandachtspunt:

In the lessons (grade 4) my role was to bring students' ideas about how to solve or analyze problems into the public forum of the classroom, to referee arguments about whether those ideas were reasonable and to sanction students intuitive use of mathematical principles as legitimate. (Lampert, 1986, pag.339).

Haar artikel maakt bovendien duidelijk dat de leraar een uitgebreid repertoire van vak- en vakdidactische kennis nodig heeft om het onderwijs op die manier te kunnen verzorgen. Haar collega's brachten de noodzaak daarvan recentelijk weer onder de aandacht (Ball, et al. 2005) door te wijzen op het specifieke karakter van de wiskundige kennis die nodig is voor het onderwijzen.

Een ander intrinsiek kenmerk van theorie dat we vonden is 'de consensus en waarheidswaarde van theorie'. Of iets

‘waar’ is of niet wordt bij het (leren) vermenigvuldigen bepaald door het antwoord en in geval van de didactiek van het vermenigvuldigen op basis van argumentatie in de kring van experts. Afgeleid aandachtspunt voor de opleiding is in dit geval de rol van overtuigingskracht en consensus, bijvoorbeeld in de discours, als studenten onder leiding van de opleider discussiëren over een didactisch principe (fig.2).

didactiek leveren ons diverse aandachtspunten voor theoriegebruik in de opleiding. Ze maken duidelijk dat vooral een inspirerende (leer)omgeving kan leiden tot het ontstaan van ‘De Vonk’, een ontdekking of een *aha-erlebnis*. Succeservaringen kunnen op hun beurt weer zorgen voor een kettingreactie van gerichte activiteiten, waarbij de kans toeneemt dat studenten als vanzelfsprekend theorie gaan gebruiken en verder ontwikkelen.

Kenmerken van theorie	Aandachtspunten voor theorie in de lerarenopleiding
Intrinsieke kenmerken 1 Onderbouwen: redeneren, argumenteren; wetmatigheden. 2 De natuurlijkheid van theorie. 3 De realiteitswaarde. 4 De relatie met andere theorieën. 5 De schoonheid van theorie 6 Mate van geformaliseerdheid. 7 Subjectiviteit. 8 De ‘waarheid’ van theorie. 9 De aanwezigheid van theorie-geladen voorbeelden. 10 Het toepassingsbereik van theorie.	ad 1 Onderbouwen van (voorgenomen) handelingen, wetmatigheden in het gedrag van leerlingen. ad 2 Het karakter van de theorie die wordt ingezet (practical wisdom, het ‘gezond-verstand-kaliber’, perceptueel, conceptueel, prescriptief formeel). ad 3 De realiteit als bron voor theorievorming (in de zin van didactische fenomenologie). ad 4a De context van theorievorming (kennisconstructie). 4b Persoonlijk theoretisch netwerk. ad 5 Mooie redeneringen en constructen. ad 6 Niveaus van denken en handelen (concreet-abstract, materieel, modelgebruik). ad 7 Subjectieve concepten en theorieën. Persoonlijke voorkeuren en opvattingen. ad 8 Overtuigingskracht en consensus, bijvoorbeeld in de discours. ad 9 ‘Narratives’ als middel voor het (laten) verwerven van praktijk-kennis. ad 10 (Algemene) geldigheid van theorie, generaliseren van kennis en van het handelen van leerlingen en leraar.
Extrinsieke kenmerken 1 De ontstaansgeschiedenis van theorie. 2 Theory-in-action; theory-on-action. 3 De discours in ‘de school’ van wetenschappers. 4 Adoptie van theorie. 5 Theorie naar waarde schatten. 6 Rechvaardiging van theorie. 7 Theorievorming op basis van onderzoek.	Extrinsieke kenmerken ad 1a ‘De Vonk’, intuïtie en creativiteit. 1b Inspanning en succeservaringen. 1c De geschiedenis van een theorie als object van studie. ad 2 Theorie als oriënteringsbasis voor reflectie op de praktijk (beschrijven, interpreteren, verklaren, voorspellen, inspelen). ad 3 De discours (‘loven en bieden’) als motor van theorievormingsprocessen. ad 4a Het waarderen (appreciëren) van theorie. 4b Het bewust worden van eigen opvattingen. 4c De neiging theorie toe te passen (gevoeligheid ontwikkelen voor theoriegebruik). 4d Theorie tot ‘eigendom’ maken. 4e Zekerheid door theoriegebruik. ad 5a De bruikbaarheid van de theorie. 5b De verklarende en voorspellende waarde van theorie. ad 6 Rechvaardiging van theorie door resultaten in de praktijk. ad 7 Theorie verwerven door (onder)zoeken.

figuur 2: overzicht kenmerken en aandachtspunten

Een extrinsiek kenmerk dat bij de theorie van het leren onderwijzen van vermenigvuldigen naar voren kwam is de ontstaansgeschiedenis van de theorie.

De ontwikkelingsgeschiedenis van het vermenigvuldigen toont nog eens aan dat theorie een bedenkfel is van mensen, bedoeld om situaties (fenomenen) te doorzien en (handig) te beschrijven. Kernideeën voor een vernieuwende, realistische didactiek van het vermenigvuldigen ontstonden onder meer door toevallige *succeservaringen* van een ontwerper, zij het dat deze een weldoordachte ‘ontwerpomgeving’ creëerde.²² De verhalen over de ontstaansgeschiedenis van het vermenigvuldigen en haar

Ten slotte is er de geschiedenis van het (leren)vermenigvuldigen zelf die de aandacht verdient als object van studie in de opleiding. Niet in de laatste plaats geeft juist kennis van de geschiedenis studenten inzicht in de fundamenten van de theorie en daarmee wat zichzelf en hun leerlingen moeten kunnen en kennen om ‘competent’ te kunnen worden op dit gebied. De geschiedenis toont niet alleen de kennis, vaardigheden en inzichten die de mens zich gaandeweg verwierf, zij laat ook zien hoe belangrijk motivatie en (werk)houding zijn voor het proces van (leren)verwerven van theorie. Als laatste geven we nog een (extrinsiek) aandachtspunt dat is afgeleid van het

kenmerk *theory-in-action*, *theory-on-action*' twee in de literatuur vaak geciteerde uitdrukkingen die Schön (1983) bedacht om (theoretische) reflectie tijdens en buiten praktijkactiviteiten te onderscheiden. Theorie heeft een functie in vrijwel alle fasen van het onderwijsleerproces. We zagen hoe de ontwerper theorie gebruikt en ontwikkelt als hij bezig is met het ontwerpen, uitproberen en evalueren van zijn onderwijsleerpakket.

Voor de opleiding kunnen we (theoretische) reflectie - vóór, tijdens en ná praktijkactiviteiten - beschouwen als een belangrijk afgeleide aandachtspunt van het bovenstaande kenmerk van theorie. Een goede (aanstaande) leraar herkent men onder meer aan het vermogen om 'vooruit te denken via terugblikken'. In de opleiding heeft theorie vooral een functie als oriënteringsbasis voor reflectie op de praktijk. Met behulp van theoretische kennis kan de praktijk begrepen, verklaard, voorspeld of zelfs verbeterd worden; omgekeerd kan de praktijk een nieuw licht laten schijnen over de theorie.

Voor een totaaloverzicht van de overige kenmerken van theorie en daarvan afgeleide aandachtspunten voor de opleiding verwijzen we naar het hiervoor weergegeven overzicht van kenmerken en aandachtspunten.²³

4 Conclusie

Theorievorming

Theorieën danken hun ontstaan vaak aan de creatieve vondst van een individu. Theorievorming kan op gang komen daar waar behoefte is aan het verklaren of voorspellen van verschijnselen, aan het uitwerken van ideeën of aan het weerleggen van andermans vondsten. Die vondsten zijn dikwijls 'bijproducten' van zoekprocessen met een ander doel. Uitspraken die gedaan worden hebben het karakter van logische redeneringen, die min of meer gekleurd kunnen zijn door intuïtie of opvattingen. In 'absolute waarheden' geloven maar weinigen; het is een gegeven dat prominent naar voren komt in de theorie van het leren en onderwijzen vermenigvuldigen. Er is in die theorie duidelijk sprake van wat we eerder een evolutie genoemd hebben: de groei van een verzameling eenvoudige regels en opvattingen tot een verfijnd stelsel van begrippen, aanwijzingen en richtlijnen.

De relatie tussen theorie en praktijk

We karakteriseerden de theorie van het leren en onderwijzen van vermenigvuldigen als een praktijktheorie, vanwege de op de praktijk gerichte doelstellingen en de wijze waarop de ontwikkelaars hun theorie funderen en verantwoording afleggen voor hun uitspraken. In feite komt dat neer op het onderhouden van een wederkerige relatie tussen theorie en (onderwijs)praktijk. Uit de

geschiedenis van de theorie van het leren vermenigvuldigen blijkt er sprake te zijn van een voortdurende ontwikkeling, de theorie is nooit af. Veld- en gedachte-experimenten leveren nieuwe begrippen, principes en richtlijnen, waardoor weer een volgende versie wordt ontwikkeld en uitgeprobeerd, in een proces dat gelijkenis vertoont met de empirische cyclus zoals beschreven door Koningsveld (1992, pag.27). Bij een zuiver formele wiskundige theorie ligt dat anders. Het is een gesloten stelsel van begrippen, relaties, axioma's en stellingen. De bevestiging van hypothesen en 'de waarheid' van uitspraken worden ontleend aan wiskundige bewijzen. Bij het leren vermenigvuldigen krijgt de theorie overtuigingskracht aan de hand van theoretische reflectie over de uitkomsten van experimenten; door de ontwikkelaars - in ieder geval die van na 1970 - wordt gepoogd die overtuigingskracht nog te versterken door het aanhoudend streven naar consensus tussen de eigen praktijkervaring, de ervaring van de professionals in het veld en de bestaande theorieën, met de cruciale legitimatie door de effecten van de theorie op leerprocessen van leerlingen. Elke theorie komt tot op zekere hoogte voort uit een praktijk en houdt een wederkerige (reflexieve) relatie in stand met die praktijk. De theorie maakt de uitoefening van de praktijk gemakkelijker en efficiënter, terwijl de praktijk op haar beurt, als toepassing in de werkelijkheid, het denken over de theorie verheldert.

'Productie en gebruik' van theorie (Fenstermacher, 1986) zijn niet bij elke theorie zo sterk verweven als bij de theorie(vorming) van het leren en onderwijzen van vermenigvuldigen, waar de beroepspraktijk van het onderwijzen de bron vormt voor de theorievorming en - omgekeerd - de theorie richting geeft aan de praktijk. We zien daarbij een parallel tussen de ontwikkeling van curricula voor het basisonderwijs en die voor de lerarenopleiding basisonderwijs (Goffree, 1979).

Een belangrijke factor die verschillen in de relatie van de theorie met de praktijk bepaalt, is de wijze waarop theorie wordt gebruikt. Theorie kan bijvoorbeeld worden gebruikt om de praktijk te toetsen (en omgekeerd) of om op de praktijk in te spelen; in dat laatste geval is er sprake van *theory in action* of *theory on action* (Schön, 1983). Als de practicus een *transaction with the situation* (Schön, 1983) sluit, is er sprake van werken en onderzoeken in de praktijk als een *reflective practitioner* waarbij weten en doen niet gescheiden zijn. Schön onderscheidt die werkwijze van een technisch-rationale aanpak waarbij activiteiten plaats vinden op basis van meer externe overwegingen die zijn afgeleid van wetenschappelijk onderzoek.

Andere factoren die de relatie tussen theorie en praktijk bepalen zijn de mate waarin de theorie de praktijk beïnvloedt of zelfs stuurt (Eraut, 1994) en de mate waarin professionele kenmerken als kennis, inzichten, vaardigheden, houding en opvattingen van de practicus (Hofer & Pintrich, 1997; Lampert, 2001; Thiessen, 2000; Verloop

et al., 2001) integratie van praktijk en theorie bevorderen of belemmeren.

Legitimering van de theorie

Behalve door de relatie tot de praktijk, wordt het karakter van een theorie bepaald door de wijze waarop uitspraken worden onderbouwd. Die onderbouwing bepaalt in wezen de 'gestrengheid' van de theorie. Een (formele) wiskundige theorie is in die zin een strenge theorie dat alle uitspraken kunnen worden geverifieerd (bewezen) aan de hand van de gegeven begrippen, relaties en axioma's. Uitspraken in een zuiver empirische theorie - bijvoorbeeld de Gestalttheorie - worden vaak onderbouwd en getoetst door veldexperimenten. De waarheidswaarde is echter van een ander kaliber dan die van een formele theorie, waar uitspraken bijvoorbeeld gelabeld kunnen worden met een van de twee waarden: waar of onwaar. De uitspraken in een empirische theorie hebben een waarheidswaarde die hooguit in een mate van waarschijnlijkheid kan worden uitgedrukt (kleiner dan 1), ook al omdat generalisatie van beweringen, eigenschappen of wetten slechts betrekking kan hebben op een eindig aantal objecten.

De theorie van het leren en onderwijzen van vermenigvuldigen is in die zin nog minder streng. Uitspraken worden eerst en vooral gerechtvaardigd door *common sense*, het op kleine schaal experimenteren en het verkrijgen van consensus binnen een paradigma. Binnen een praktijktheorie als die van het leren vermenigvuldigen heeft 'verklaren en voorspellen' dan ook vaak de functie van theoretisch verantwoord over op de praktijk gerichte doelstellingen en activiteiten. Voor de 'gebruikers' van die theorie levert dat veel op; leraren die over een dergelijke theorie beschikken kunnen meer 'zien' in eenzelfde lessituatie en daar dan ook gedifferentieerder over denken en praten (Tom & Valli, 1990; Fenstermacher & Richardson, 1993).

Revisie van de werkdefinitie

In de aanhef van dit artikel formuleerden we de definitie van theorie als een verzameling beschrijvende concepten die samenhang vertoont en waarbij die coherentie ook onderbouwd is. Zo'n systeem kan zowel uitspraken en redeneringen als verklaringen, veronderstellingen, vermoedens, voorspellingen en bewijzen bevatten.

Deze werkdefinitie bevat weliswaar twee van drie hiervoor besproken intrinsieke kenmerken (samenhang en onderbouwing), maar mist - zeker als definitie van vakdidactische theorie - belangrijke elementen, zoals de relatie tot de praktijk en kenmerken die we benoemden als extrinsieke kenmerken. Bovendien wordt het begrip samenhang in die definitie gekoppeld aan eenzijdige onderbouwing, wat een schrale invulling is van het begrip onderbouwing dat hiervoor is uiteengezet. In het geval van de theorie van het leren vermenigvuldigen ont-

staat samenhang door de achterliggende concepten van de operatie vermenigvuldigen en door consensus met betrekking tot de opvatting over leren (vermenigvuldigen).

Naar onze opvatting, die gekleurd is door onze affiniteit met de lerarenopleiding, komt theorie voort uit reflectie op de werkelijkheid. Dat kan worden vertaald als reflectie op de praktijk, waarbij de werkelijkheid kan worden beschouwd als een 'verzameling praktijken'. Zo'n reflectie kan zich in vele soorten en niveaus uitkristalliseren, van een persoonlijke praktijktheorie die doorspekt is met individuele opvattingen tot een wetenschappelijke theorie die zich laat uitdrukken in theoretische begrippen en wetten.

Samenvattend kunnen we de gereviseerde definitie van (vakdidactische) theorie - die overigens nooit 'definitief' zal worden - omschrijven als een verzameling beschrijvende concepten die samenhang vertoont en waarbij die coherentie onderbouwd wordt door reflectie op 'de praktijk'. Het karakter van de theorie wordt bepaald door de mate waarin intrinsieke en extrinsieke kenmerken zich manifesteren.

De praktijk als uitgangspunt, theorie als oriënteringsbasis voor reflectie op die praktijk

Eigen ervaring (als leraar, opleider en onderzoeker) leert, dat er vooral in de vakdidactische theorie van het vermenigvuldigen een parallel bestaat tussen de activiteiten van ontwikkelaars en van gebruikers. Vermoedelijk zijn de praktijkenabijheid, het fenomenologische karakter van de theorie en de specifieke benadering van de ontwerper (ontwikkelaar) daar debet aan. Mogelijk is de genoemde parallel maatgevend voor de gebruikswaarde van een onderwijstheorie. Het is een karakteristiek van activiteiten die tot op zekere hoogte verwant is met die van opleiders in dit vakgebied. In onze opvatting over opleidingsonderwijs is de praktijk uitgangspunt voor de professionele ontwikkeling van studenten en vormt de theorie van het realistisch reken-wiskundeonderwijs de oriënteringsbasis voor reflectie op die praktijk. Studenten creëren hun eigen (praktijk)kennis, die gewoonlijk een narratief karakter heeft (Goffree & Dolk, 1995). De gedachte is dat studenten door reflectie over 'theoriegeladen' praktijksituaties, theorie in praktijkkennis integreren en zo 'met theorie verrijkte praktijkkennis' (Oonk et al., 2004) verwerven.

5 Perspectief

Voor het onderzoek naar de wijze waarop studenten met theorie omgaan is het noodzakelijk de kenmerken van theorie en de betekenis daarvan voor de opleiding te doorgronden. Daartoe hebben we bij de theorie van het

leren en onderwijzen van vermenigvuldigen de gevonden kenmerken beschouwd in het perspectief van theorie in de opleiding. We zijn hier (nog) niet ingegaan op de vraag hoe (aanstaande) leraren kunnen omgaan met theorie of theoretische kennis. Als prelude op die verkenning passen uitspraken van Freudenthal, die behalve ontwerper van grondslagen voor de zuivere wiskunde ook een ontwikkelaar van didactiek was. Als geen ander was hij het voorbeeld van iemand bij wie theorievormingsprocessen werden gevoed door de praktijk. Met verhalen uit de praktijk probeerde hij essentiële elementen uit de theorie onder de aandacht te brengen. Hij vond dat je theorieën niet kunt doorzien aan de hypothesen en stellingen, maar aan concrete voorbeelden.²⁴ De keuze van de voorbeelden achtte hij van eminent belang, zoals blijkt uit zijn bewering:

Het kost veel minder moeite de lerende met een douche van talloze voorbeelden te overspoelen, dan naar het ene - paradigmatische - voorbeeld te zoeken dat het hem doet. (Freudenthal, 1984, pag.102).

Degene die zich theorie eigen wil maken kan in zoverre hieruit lering trekken, dat de praktijk zelf, of kenmerkende verhalen en andere representaties van de praktijk, een rijke bron en een nuttig uitgangspunt vormen. Vertaald naar de opleiding van leraren kan dat uitgangspunt worden uitgewerkt tot een aanpak waarbij studenten een repertoire ontwikkelen van 'met theorie verrijkte praktijkkennis'.

Noten

- 1 Dit artikel is een verkorte versie van een uitgebreide studie over dit onderwerp; zie noot 23. Met dank aan de anonieme collega's die waardevolle aanwijzingen gaven voor verbetering van de eerste versie van dit artikel.
- 2 In zijn publicatie 'Didactical Phenomenology of Mathematical Structures' legt Freudenthal (1983) een theoretische basis voor het 'realistisch onderwijzen' van wiskunde. In hoofdstuk 4 schetst hij, na een fenomenologische beschouwing van de getallentheorieën in de loop van de geschiedenis, de bouwstenen voor een didactische fenomenologie van getallen en bewerkingen met getallen. Kenmerkend is zijn opvatting dat men voor het onderwijzen daarvan niet zozeer van het begrip getal uitgaande concretisering moet trachten te vinden, maar naar verschijnselen moet zoeken die noodzaken het mentaal object getal te constitueren. Getal is een denkding, waarop leerlingen volgens Freudenthal greep krijgen door een aanbod van 'meervoudige inbedding' (*multiple embodiment*) in verschillende situaties. Het was in de jaren zeventig een opvatting die indruiste tegen de heersende opvatting van (geïsoleerde) begripsvorming.
- 3 Ingeburgerde uitdrukkingen als 'in theorie is dat waar', 'mijn theorie is dat...' of 'ik heb vandaag theorie' laten iets zien van het onderscheid tussen meer subjectieve of objectieve opvattingen over theorie.
- 4 Wiskobas staat voor Wiskunde op de basisschool. Het wiskobasteam had indertijd (1971-1981) als deel van het IOWO-team (Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs, voorloper van het Freudenthal Instituut) de taak om het reken-wiskundeonderwijs voor de basisschool te ontwikkelen en te implementeren.

- 5 De aanhangers van de associatiepsychologie hadden ideeën die mechanistisch en atomistisch van opzet waren. Kennis ontstond volgens hen door één of meer zintuiglijke ervaringen. Door het herhalen van mentale ervaringen in de tijd, wordt de zintuiglijke informatie met elkaar verbonden, zo was de gedachte. De Brit John Locke wordt met zijn geschrift 'Association of ideas' (1690) beschouwd als grondlegger van het associationisme.
- 6 De Babyloniërs (ca. 3000 v.Chr.) hebben kleitafels nage-laten, waarop onder meer de tafels van vermenigvuldiging van 1×1 tot en met 59×59 uit hun positionele, sexagesimale (zestigstallig) stelsel voorkwamen. De geschriften van de Egyptenaren (papyrus Rhind, ca. 2000 v.Chr.) tonen ons vermenigvuldigtabelen waaruit blijkt dat zij deels uit het hoofd rekenden, met name door handig verdubbelen of halveren; dat gebeurde niet alleen met hele getallen, maar ook met breuken en kommagetallen. Waarschijnlijk gaf de natuurlijke ontwikkeling van het vermenigvuldigen, inclusief de daarmee gepaard gaande (wiskunde)taalontwikkeling - zeg het 'praktijkkarakter' van vermenigvuldigen - geen aanleiding om de ontwikkeling van een wiskundig fundament van het getallensysteem ter hand te nemen. Dat fundament werd namelijk pas zo'n tweeduizend jaar later gelegd door Euclides (ca. 300 v.Chr.).
- 7 Freudenthal schrijft (1984, pag.122): Vermenigvuldiging is in eerste instantie herhaalde optelling en deze herhaalde optelling kan bijzonder doelmatig door paarverzameling in het rechthoekmodel - het verzamelingtheoretisch product - worden gestructureerd, onder meer om aantallen als producten te berekenen. Dit model is echter ontoereikend. Ontoereikend niet in mathematische zin (...). Wel ontoereikend in didactische zin, omdat een mathematisch voor de hand liggende herstructurering zich geenszins in leerprocessen - spontaan of gestimuleerd - behoeft voor te doen en, als zij zich wel voordoet, niet voldoende bewust behoeft te worden om waar nodig expliciteerbaar en beschikbaar te zijn.
- 8 Dat die kritiek er was blijkt onder andere uit publicaties van de bekende Nederlandse pedagoog Ligthart (1859-1916) en van de onderzoekers Brownell en Chazal (1935). Ligthart vond dat de onderwijsaanpak uit die tijd - niet alleen van het rekenen - was verworden tot een doods nadoen, na-rede-nen en memoriseren. 'Leeren door ervaring, leeren door te doen, leeren door meeleven', was Ligtharts' credo (De Jong, 1996, pag.282-284). Hij stond voor leren in een fysieke en mentale interactie tussen kind, omgeving en leerkracht, waardoor het kind zich de nieuwe leerstof actief kan toe-eigenen. Hier is de invloed van Amerikaanse pedagoog en filosoof Dewey (1859-1950) merkbaar. De Jong schrijft dat Ligthart in 1908 via het boek 'Méthodes Americaines d'éducation générale et technique' van de Belgische auteur Omer Buyse, het werk van Dewey leerde kennen en zijn eigen ideeën daarin soms tot in kleine details herkende. Alleen met één van de grondstellingen van Dewey was hij het oneens: de recapitulatietheorie, volgens welke leerlingen gebeurtenissen uit de geschiedenis zouden moeten herbeleven om geïnteresseerd te raken voor de huidige cultuur. Ligthart geloofde daar niet in. Juist om didactische redenen was het beter zo concreet en zo dicht mogelijk in de omgeving van het kind te beginnen in plaats van het tweeduizend jaar terug. Brownell en Chazal deden onderzoek naar verschillende manieren van optellen en aftrekken. Zij constateerden dat 'drill-activiteiten' weinig effect hebben zonder voorafgaand begrip van wat geleerd moet worden.
- 9 Lankford, 1974; Erlwanger, 1975 en Codd, 1981.
- 10 Hij onderschrijft de mening van Lesh en Landau (1983) dat het klinisch interview een completer beeld geeft van de ontwikkeling bij kinderen van wiskundige noties en processen en is het niet eens met sommige onderzoekers die beweren

- dat kinderen over het algemeen niet bereid zijn hun gedachten te vertellen (Ter Heege, 1986, pag.31).
- 11 Hij refereert onder meer aan het werk van Ebbinghaus - met zijn invloedrijke publicatie 'Über das Gedächtnis' van 1885, waarin veel aandacht voor de associatiewetten, Bartlett (1932), die reconstructie en reproductie van kennis onderscheidt, en Van Parreren (1964), over onder andere functionele en wendbare kennis). Verder haalt hij de onderzoekers Brownell & Chazal aan, die concluderen dat 'drill-activiteiten' weinig effect sorteren als daar geen begrip aan voorafgaat, Thorntons (1978) over het op eigen kracht hanteren van denkstrategieën door kinderen en Baroody (1985) met betrekking tot het dynamisch cognitief netwerk.
 - 12 TAL staat voor Tussendoelen Annex Leerlijnen. De kernbrochure is de opbrengst van het TAL-project, dat is geïnitieerd door het Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen en dat is uitgevoerd door een taakgroep bestaande uit dertien experts van het Freudenthal Instituut in samenwerking met de Stichting Leerplanontwikkeling en de samenwerkende educatieve diensten (CED).
 - 13 De tweedeling reproductie en reconstructie komt volgens Ter Heege (pag.110) van de psycholoog Bartlett. Treffers & De Moor (1990, pag.72 en 87) verwijzen daarvoor naar Baroody (1985, pag.83-98). Baroody gebruikt die begrippen als hij het heeft over dynamische (kennis)netwerken.
 - 14 In de TAL-brochure (Van den Heuvel-Panhuizen, 1998, pag.63) is een voorbeeld opgenomen dat zo'n signaal afgeeft. Het is een voorbeeld dat laat zien hoe de tafel van acht gereconstrueerd en vervolgens gereproduceerd kan worden in een proces van verkorten en memoriseren. Een analoog voorbeeld toont de 'Proeve...' (Treffers & De Moor, 1990, pag.76) en dat is weer ontleend aan de theorie van Ter Heege (1985). Hieronder het bedoelde voorbeeld uit de TAL-brochure (pag.63).
 'Tafel van acht'
 1×8 een weetje
 2×8 een weetje ('de dubbele $8 + 8$ uit groep 3'); of via verwisselen (8×2)
 3×8 via $2 \times 8 + 8$ ('eenmaal meer'); of via verwisselen (8×3)
 4×8 de dubbele van 2×8 , of $5 \times 8 - 8$ ('eenmaal minder'); of via verwisselen
 5×8 de helft van $10 \times 8 = 80$; of via verwisselen
 6×8 via 5×8 ('eenmaal meer'); of verwisselen; of verdubbelen ($3 \times 8 + 3 \times 8$)
 7×8 via $5 \times 8 + 2 \times 8$, of $6 \times 8 + 8$ ('eenmaal meer')
 8×8 gevarieerd, snel een weetje
 9×8 $10 \times 8 - 8$ ('eenmaal minder'); of via verwisselen
 10×8 een weetje
 12×8 een onderzoeksprobleem...
 In veel van bovenstaande gevallen is een toegang via andere tafels mogelijk met de verwisselings-eigenschap: 3×8 via 8×3 als die al bekend is; 4×8 via 8×4 , en zo verder.
 Een signaal met betrekking tot invloeden van voorgaande geheugen- en leertheorieën vinden we in de 'Proeve...', waar gerefereerd wordt aan Van Parreren en aan (via) Ter Heeges werk. In de TAL-brochure vinden we wat die theorieën betreft geen verwijzingen, maar slechts een algemene opmerking over de noodzaak om de vakcomponent, de cognitieve, de sociale en de affectief-emotionele ontwikkeling te integreren (pag.75).
 - 15 Zo kunnen 8×6 , 4×6 en 2×6 gekend worden door de onderlinge relatie 'het dubbele van' met $2 \times 6 = 12$ als ankerpunt.
 - 16 Hier wordt het begrip paradigma geïnterpreteerd volgens de opvattingen van Kuhn daarover, namelijk het paradigma van een wetenschappelijke gemeenschap (Kuhn, 1970, onder andere pag.210). Dat ter onderscheiding van de betekenis die Freudenthal eraan geeft: het paradigma als representatief voorbeeld van een verschijnsel, een begrip of een theorie (Freudenthal, 1980; Goffree en Dolk, 1995, pag.114).
 - 17 Onder praktijk verstaan we een situatie, (leer)omgeving of domein met materialen, gereedschappen en actoren waarin professioneel wordt gehandeld, dat wil zeggen adequaat wordt gehandeld op basis van (praktijk)kennis.
 - 18 Over de complexiteit van het leren en onderwijzen van wiskunde wordt veel gesproken en geschreven. Lampert (2001) maakt het begrip 'complexiteit' tastbaar en bespreekbaar.
 - 19 Ter Heege spreekt in diverse bewoordingen over het verband leggen tussen de praktijk en de theorie (onder andere in 1986, pag.5, 170). Op pagina 5 zegt hij: 'Er is een didactische kloof (tussen theorie en praktijk) die overbrugd zal worden met de ontwikkeling van een leerpakket voor de elementaire vermenigvuldigingen'.
 - 20 De betekenis die ter Heege geeft aan het begrip theorie komt onder andere boven water op de momenten dat hij het woord theorie gebruikt in zijn publicatie. Dat gebeurt met name in hoofdstuk 4, waar hij verslag doet van zijn literatuuronderzoek op het gebied van de geheugenpsychologie. Het begrip theorie lijkt daar voor hem een wetenschappelijke connotatie te hebben.
 - 21 Boersma en Looy omschrijven een praktijktheorie als de kennis die het handelen in specifieke praktijken beschrijft en hieraan richting geeft (Boersma en Looy, 1997, pag.16). (Merk op dat deze onderzoekers theorie benoemen als kennis.)
 - 22 Bijvoorbeeld de omgeving die Ter Heege creëerde: een uitdagende, open gesprekssituatie over vermenigvuldigen met leerling Johan.
 - 23 Verder wordt er in een uitgebreide studie over dit onderwerp (Oonk, 2002) nog meer in detail ingegaan op de totstandkoming van de kenmerken en bijbehorende aandachtspunten.
 - 24 Gehoord van A. Treffers op het achtste symposium van de Historische Kring Reken- en Wiskundeonderwijs, 25 mei 2002 te Utrecht.

Literatuur

- Ball, D. L., H.C. Hil & H. Bass (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, Fall, 14-17.
- Boersma, K.Th & F. Looy (1997). *Een praktijktheorie voor leerplanontwikkeling*. Enschede: SLO.
- Bor, J., E. Petersma & J. Kingma (red.) (1995). *De verbeelding van het denken*. Amsterdam/Antwerpen: Uitgeverij Contact.
- Brownell, W.A. & C.B. Chazal (1935). The effect of premature drill in thirdgrade arithmetic. *Journal of Educational Research*, 29, 17-32.
- Carpenter, T.P. et al. (1981). *Results from the Second Mathematics Assessment*, Reston: NCTM, 100.
- Eraut, M. (1994). *Developing professional knowledge and competence*. London: Falmer Press.
- Fenstermacher, G.D. (1986). Philosophy of Research on Teaching: Three Aspects. In: M.C. Wittrock (ed.). *Handbook of research on teaching*. New York: Macmillan, 37-49.
- Fenstermacher, G.D. & V. Richardson (1993). The elicitation and reconstruction of practical arguments in teaching. *Journal of Curriculum Studies*, 25(2), 101-114.

- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal, H. (1984a). *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren, deel 1*. Utrecht: vakgroep OW&OC, Rijks Universiteit Utrecht).
- Freudenthal, H. (1984b). *Appels en Peren. Wiskunde en Psychologie*. Apeldoorn: Walraven bv.
- Freudenthal, H. (1984c). Memoriseren. *Willem Bartjens*, 3(2), 124-126.
- Ginsburg, H. (1977). *Children's Arithmetic. The learning process*. New York, London: D. Van Nostrand Company.
- Goffree, F. (1979). *Leren onderwijzen met Wiskobas*. Utrecht: Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (proefschrift).
- Goffree, F. & M. Dolk (red.) (1995). *Proeve van een nationaal programma voor rekenen-wiskunde & didactiek op de pabo*. Utrecht/Enschede: Freudenthal Instituut/SLO.
- Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht, Freudenthal Instituut (proefschrift).
- Heege, H. ter (1978). Testing the maturity (rijpheid) for learning the algorithm of multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, 9, 75-83.
- Heege, H. ter (1985). The acquisition of basic multiplication skills. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 375-389.
- Heege, H. ter (1986). *Een goed product. Onderzoek en ontwikkeling ten behoeve van een leergang vermenigvuldigen*. Utrecht: Universiteit Utrecht, vakgroep onderwijskunde.
- Heege, H. ter (2005). Over memoriseren. Ontwikkelingen in het onderwijs in vermenigvuldigen. In: H. ter Heege, T. Goris, R. Keijzer & L. Wesker (red.). Freudenthal 100. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk en Nieuwe Wiskrant*. Utrecht, Freudenthal Instituut.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den, K. Buys & A. Treffers (red.) (1998). *Tussendoelen Annex Leerlijnen (TAL)*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
- Hofer, B.K. & P.R. Pintrich (1997). The Development of Epistemological Theories: Beliefs About Knowledge and Knowing and Their Relation to Learning. *Review of Educational Research*, 67(1), 88-140.
- Jansen, P. & G.W. van Brink (1951). *Beknopte Theorie van de Rekenkunde*. Groningen: Noordhoff.
- Jong, C. de (1996). *Jan Ligthart (1859-1916). Een schoolmeester-pedagoog uit de Schilderswijk*. Groningen: Wolters-Noordhoff bv (proefschrift).
- Klep, J. (1998). *Arithmeticus. Simulatie van Wiskundige bekwaamheid. Computerprogramma's voor het generatief en adaptief plannen van inzichtelijk oefenen in het reken-wiskundeonderwijs*. Tilburg: Uitgeverij Zwijzen (proefschrift).
- Koningsveld, H. (1992). *Inleiding wetenschapsfilosofie*. Wageningen: Universiteit Wageningen.
- Kool, M. (1999). *Die conste vanden getale (dissertatie)*. Hilversum: Uitgeverij Verloren B.V (proefschrift).
- Korthagen, F.A.J. (2001). *Linking Theory and Practice: The Pedagogy of Realistic Teacher Education*.
- Kuhn, T.S. (1970). *The structure of scientific revolutions (2nd ed.)*. Chicago: University of Chicago Press.
- Lampert, M. (1986). Knowing, doing, and teaching multiplication. *Cognition and instruction*, 3, 305-342.
- Lampert, M. (2001). *Teaching Problems and the Problems of Teaching*. New Haven & London: Yale University Press.
- Lesh, R & M. Landau (eds.) (1983). *Acquisition of mathematics concepts and processes*. London: Academic Press, 128-175.
- Loonstra, F. (1963). *Inleiding tot de algebra*. Groningen: Wolters-Noorhoff.
- Oonk, W. (2002). *Wat is theorie? Exploratie van een fenomeen*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
- Oonk, W., F. Goffree & N. Verloop (2004). For the Enrichment of Practical Knowledge. Good practice and useful theory for future primary teachers. In: J. Brophy (ed.). *Using video in teacher education. Advances in Research on teaching*, 10, New York: Elsevier Science, 131-168.
- Schön, D. (1983). *The Reflective Practitioner*. New York: Basic Books.
- Struik, D.J. (1990). *Geschiedenis van de wiskunde*. Utrecht: Het Spectrum.
- Thiessen, D. (2000). A skillful start to a teaching career: a matter of developing impactful behaviors, reflective practices, or professional knowledge? *International Journal of Educational Research*, 33, 515-537.
- Tom, A.R. & L. Valli (1990). Professional knowledge for teachers. In: W.R. Houston (ed.). *Handbook of research on teacher education*, New York: MacMillan, 372-302.
- Treffers, A. (1978). *Wiskobas doelgericht*. Utrecht: Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs.
- Treffers, A. & F. Goffree (1985). Rational Analysis of Realistic Mathematics Education: The Wiskobas Program. In: L. Streefland (ed.). *Proceedings of the 9th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Utrecht: OW&OC, 97-121.
- Treffers, A. & E. de Moor (1990). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basis-school, deel 2*. Tilburg: Zwijzen.
- Verloop, N., J. van Driel & P. Meijer (2001). Teacher knowledge and the knowledge base of teaching. *International Journal of Educational Research*, 35(5), 441-461.

The aim of this article is to illuminate the role of theory in primary teacher education (pabo). An attempt is made to map core characteristics of theory and get a picture of essential points of interest for the function of theory in teacher training. To achieve this, the pedagogical content theory of learning and teaching multiply is analysed. Examining existing theories can make ideas about the ways prospective teachers use theory become manifest. The underlying thought is that focus points for theory in teacher education can be derived from the characteristics that have been found. As a consequence, these points of interest can be important for developing teacher education curricula and research tools. This study is part of the research project 'Theory into Practice' (TIP) that aims to research the way that student teachers use theory.