



Ontwikkeling van beroepspecifieke wiskundekennis op de pabo

- leerlingenwerk voor een wiskundige opleidingsactiviteit -

M. Kool

Instituut Theo Thijssen, Hs. Utrecht

Een basisschoolleraar moet zich kunnen verplaatsen in het wiskundig denken van zijn leerlingen. Daarvoor heeft hij onder andere beroepspecifieke wiskundekennis nodig. Dat is een diepe, geavanceerde, veelzijdige, flexibele kennis van de rekenwiskundestof van de basisschool. Hoe kunnen pabo-studenten tijdens hun opleiding deze beroepspecifieke wiskundekennis ontwikkelen? Een onderzoek, waarin studenten reflecteren op leerlingenwerk aan de hand van het zogenoemde AVE-reflektieformat biedt aanknopingspunten. Met name de grote motivatie en betrokkenheid van studenten en positieve reacties van de deelnemende docenten legitimeren een vervolgonderzoek naar deze aanpak.

1 De beroepspecifieke wiskundekennis van de basisschoolleraar

Wie de kwaliteit van het onderwijs wil verbeteren, kan het beste investeren in de kwaliteit van de leraar. Deze conclusie volgt uit onderzoek van Hattie (2009). Hij beschrijft zes factoren die van invloed zijn op de prestaties van leerlingen: het kind, de thuisomgeving, de school, het curriculum, de leraar en de onderwijsmethoden. Hiervan blijkt de leraar de meest invloedrijke te zijn. Maar liefst 30 procent van de leerlingresultaten is aan de leraar toe te schrijven (Hattie, 2009; McBer, 2000). Ook de onderzoekscommissie van de Koninklijke Academie van Wetenschappen concludeert dat de kwaliteit van de leraar direct en groot effect heeft op de prestaties van de leerlingen (KNAW, 2009). Een goede leraar beschikt onder andere over voldoende kennis, en die kennis moet verder gaan dan alleen de vakinhoud (Shulman, 1986; 1987). Dat geldt uiteraard ook voor rekenen-wiskunde. Een goede reken-wiskundeleraar bezit naast vakinhoudelijke wiskundekennis ook voldoende vakdidactische kennis (Expertgroep Doorlopende Leerlijnen, 2008; KNAW, 2009). In de 'Kennisbasis Reken-Wiskunde voor de lerarenopleiding basisonderwijs' zijn beide kennisgebieden beschreven (Van Zanten, Barth, Faarts, Van Gool & Keijzer, 2009). Desondanks bestaan er nog veel vragen over de aard en omvang van de kennis van de reken-wiskundeleraar. Met name in Amerika is *mathematical teacherknowledge* onderwerp van tal van onderzoeken (Ball, Thames & Phelps, 2008; Ball, Hill & Bass, 2005; Hill, Ball & Schilling, 2008; Hill & Ball, 2009). Hill en Ball tonen aan dat leerlingen van leraren met meer wiskundekennis over het algemeen betere rekenresultaten boeken, maar dat voor basisschoolleraars geldt dat steeds meer kennis van hogere

wiskunde niet per definitie tot steeds betere leeropbrengsten voor rekenen leidt (Hill & Ball, 2009). Daar is meer voor nodig. Uiteraard de voornoemde vakdidactische kennis, maar daarnaast ook een andersoortige wiskundige kennis. Ball, Thames en Phelps (2008) onderscheiden drie soorten wiskundige kennis waarover een leraar basisonderwijs zou moeten beschikken: *Common Content Knowledge*, *Horizon Content Knowledge* en *Specialized Content Knowledge*. Deze driedeling is overgenomen door de samenstellers van de landelijke Kennisbasistoets rekenen-wiskunde voor de lerarenopleiding basisonderwijs. De drie wiskundige kennisgebieden zijn in de toetsgids als volgt aangeduid:

- 1 Kennis van rekenen-wiskunde.
- 2 Reken-wiskundige kennis die specifiek is voor leraren basisonderwijs.
- 3 Maatschappelijke relevantie en verstrengeling. (Toetsgids, 2012)

Het eerste kennisgebied - Kennis van rekenen-wiskunde - betreft puur vakinhoudelijke wiskundekennis. Een basisschoolleraar moet verticaal kunnen mathematiseren en zijn wiskundige kennis moet verder gaan dan de stof van de basisschool. Bij het derde kennisgebied - Maatschappelijke relevantie en verstrengeling - gaat het om horizontale mathematisering. Een basisschoolleraar moet een gecijferde burger zijn. Dat betekent dat hij situaties uit het dagelijks leven moet kunnen interpreteren, verklaren en bevragen. Kennis van referentiematen en berekend schatten spelen hierbij een rol. Het tweede kennisgebied - Reken-wiskundige kennis die specifiek is voor leraren basisonderwijs - betreft de wiskundige beroepskennis die een leraar moet bezitten voor het uitvoeren van onderwijstaken. Dit kennisgebied roept onder opleiders nog veel vragen op, omdat het lastig is om deze

beroepsspecifieke wiskundekennis precies te definiëren en af te bakenen van de andere kennisgebieden. Het gaat om kennis van de reken-wiskundestof van de basisschool, maar leraren moeten deze stof flexibeler, veelzijdiger, diepgaander en geavanceerder beheersen dan hun leerlingen. Volgens Ball, Hill en Bass (2005) moeten leraren kunnen beschikken over ‘a deep understanding of the mathematics they teach’ (pag.16). De Chinese Ma (1999) meent dat basisschoolleraren voor het verzorgen van rekenonderwijs moeten beschikken over *Profound Understanding of Fundamental Mathematics*. Jakobsen, Thames, Ribeiro & Delaney (2012) spreken van *Elementary math from an advanced standpoint*. In het eindrapport van de National Mathematics Advisory Panel (2008) staat:

Teachers must know in detail and from a more advanced perspective the mathematical content they are responsible for teaching. (pag.21)

Beroepsspecifieke reken-wiskundige kennis stelt leraren in staat om een rekenvraagstuk op verschillende manieren en handelingsniveaus op te lossen, oplossingsmanieren van leerlingen te analyseren, beoordelen, verklaren en evalueren, wiskundige ideeën van leerlingen te representeren en te verwoorden, zich te verplaatsen in het denken van leerlingen, enzovoort. Hoewel dit in de buurt van vakdidactische kennis komt gaat het bij deze beroepsspecifieke kennis toch echt om wiskundige kennis (Kool & Keijzer, 2012).

Het is niet altijd eenvoudig om vakdidactische kennis te scheiden van beroepsspecifieke wiskundekennis, maar beide kennisgebieden zijn wel te onderscheiden. Het volgende voorbeeld maakt dat duidelijk. Een leerling maakt de volgende foutieve berekening:

$$\begin{array}{r} 225 \\ 118 - \\ \hline 113 \end{array}$$

De leerling had bij het aftrekken van de eenheden eigenlijk moeten ‘lenen’ bij de tientallen, maar hij heeft in plaats daarvan de eenheden onderling verwisseld en 5 van 8 afgetrokken. Deze fout wordt bij cijferend aftrekken veel gemaakt. Een leraar met voldoende vakdidactische kennis herkent deze veelvoorkomende misconceptie. Maar een leraar die deze vakdidactische kennis niet bezit kan toch op basis van de getallen uit de berekening wiskundig herleiden wat het kind hier fout heeft gedaan. Hij zet dan zijn beroepsspecifieke wiskundige kennis in om te ontdekken dat de leerling hier niet geleend heeft, maar vermoedelijk 5 van 8 heeft afgetrokken. Bij veelvoorkomende misconcepties kunnen beide kennisgebieden tot een analyse van het leerlingenwerk leiden, maar zodra een leerling niet-standaardmanieren hanteert en ongebruikelijke fouten maakt is het kennisgebied van beroepsspecifieke wiskundekennis onmisbaar om te achterhalen hoe de leerling heeft gedacht.

2 Ontwikkeling van beroepsspecifieke wiskundekennis

In de lerarenopleiding wordt veel tijd besteed aan de ontwikkeling van wiskundekennis van de toekomstige leraren. Het betreft dan vooral de kennisgebieden 1 en 3. De ontwikkeling van beroepsspecifieke wiskundekennis speelde tot voor kort over het algemeen geen of slechts een geringe rol. Maar omdat dit onderwerp wel getoetst wordt in de landelijke Kennisbasistoets zijn veel pabodocenten rekenen-wiskunde nu naarstig op zoek naar manieren om de ontwikkeling van deze beroepsspecifieke wiskundekennis meer aandacht te geven binnen de opleiding. Voorlopig is voor hen nog niet duidelijk hoe ze dat het beste kunnen aanpakken. Dat vormde de aanleiding voor een onderzoek naar de ontwikkeling van beroepsspecifieke wiskundekennis op de pabo.

In dat onderzoek werd bij voorbaat rekening gehouden met het feit dat het aanleren van wiskundekennis en –vaardigheden doorgaans op weinig enthousiasme van pabo-studenten kan rekenen. Dat heeft verschillende oorzaken. Veel pabo-studenten hebben moeite met het leren van wiskunde, voelen zich vaak onzeker over hun wiskundige kennis en vaardigheden en zijn over het algemeen niet erg geïnteresseerd in het verwerven van nog meer (diepgaande) wiskundige kennis, omdat ze niet zien wat voor nut dit kan hebben voor hun toekomstige beroep. Rond deze vaak geringe motivatie van pabo-studenten om wiskunde te leren formuleerde Thanheiser een leerparadox. Als een student een wiskundig onderwerp herkent beweert hij: ‘Dit kan ik al, hier hoef ik dus niets meer over te leren’. Als hij het niet herkent redeneert hij: ‘Dit kan ik niet, dus dat betekent dat het op de basisschool ook niet aan de orde komt’ (Thanheiser, 2012). Volgens Thanheiser zijn toekomstige basisschoolleerkrachten zich vaak niet bewust van het feit dat ze een andere kennis van wiskunde nodig hebben dan hun leerlingen. Ze zien niet in dat oppervlakkige wiskundekennis tekortschiet bij het uitvoeren van onderwijstaken. Wie studenten wil motiveren tot het ontwikkelen van hun wiskundige kennis zal hen moeten laten inzien dat ze die kennis nodig hebben voor hun toekomstige beroep. Daar is in het hier beschreven onderzoek rekening mee gehouden. Rekenwerk van basisschoolleerlingen is als uitgangspunt genomen en daar is een taak aan verbonden die passend is bij het werk van een leerkracht. De studenten moeten namelijk diepgaand reflecteren op het leerlingenwerk aan de hand van het zogenoemde AVE-format, bestaande uit de drie fasen: Analyseren, Verklaaren en Evalueren. Op deze wijze kunnen ze ervaren dat voor het goed doorgronden van leerlingenwerk specifieke wiskundige kennis noodzakelijk is.

Om tegemoet te komen aan het gevoel van onzekerheid dat veel pabo-studenten bezitten als het gaat om het ver-

werven van wiskundekennis is gekozen voor een interactieve werkvorm waarin studenten kunnen leren van elkaar en bevestiging kunnen vinden bij elkaar. De vraag die ten grondslag ligt aan dit onderzoek luidt:

In hoeverre kunnen pabo-studenten door reflectie op leerlingenwerk met behulp van het AVE-format in een interactieve werkvorm, hun beroepspecifieke wiskundekennis ontwikkelen?

Er bestaat (nog) geen korte Nederlandse vakterm voor het kennisgebied van beroepspecifieke wiskundekennis van de leraar. In internationale literatuur wordt de afkorting SCK gehanteerd, die staat voor *Specialized Content Knowledge*. In dit onderzoeksverslag is omwille van de leesbaarheid de afkorting SCK overgenomen.

3 De onderzoeksmethode

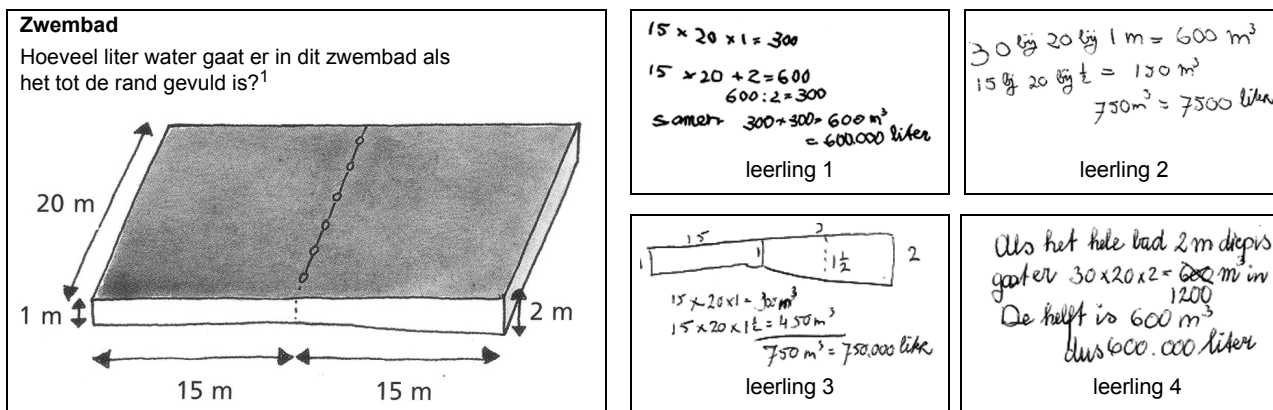
Participanten

In het studiejaar 2011-2012 hebben vijftien pabodocenten rekenen-wiskunde met een of meer van hun studentengroepen deelgenomen aan een onderzoek betreffende de ontwikkeling van SCK volgens de zogenoemde AVE-reflectie-aanpak. De docenten waren afkomstig uit het hele land en hun opleidingservaring varieerde van nog geen jaar tot tientallen jaren. Ze hadden zich voor het

mogelijk was binnen het curriculum en de beschikbare tijd. Sommige docenten hebben eenmalig een vraagstuk uitgetoetst in één groep, anderen hebben alle zes de beschikbare vraagstukken gebruikt in één groep of in meer groepen, soms zelfs in verschillende leerjaren. Dit was zeer divers.

Materialen

Uitgangspunt voor het onderzoek was leerlingenwerk van de basisschool. Dit werd als volgt verzameld. Voorafgaand aan het onderzoek werden vraagstukken uit rekenboeken voor de bovenbouw van de basisschool voorgelegd aan leerlingen in groep 8. De leerlingen maakten de vraagstukken individueel op papier. Uit dit leerlingenwerk werden per vraagstuk vier geschikte, verschillende aanpakken van leerlingen geselecteerd. Omdat pabo-studenten tijdens het onderzoek deze aanpakken zouden moeten analyseren, verklaren en evalueren, werd gezocht naar wiskundig interessante, onderling verschillende aanpakken op verschillende handelingsniveaus. Soms werd een extra aanpak door de onderzoeker bedacht en toegevoegd als deze niet in het leerlingenwerk voorkwam, terwijl deze toch leerzaam zou kunnen zijn voor de studenten. Het was niet zichtbaar welke aanpakken werkelijk van leerlingen afkomstig waren, en welke door de onderzoeker waren toegevoegd, al werd vooraf wel meegedeeld dat niet alle materialen authentiek waren. De aanpakken die gebruikt werden in het onderzoeksmateriaal waren leesbaar en navolgbaar.



figuur 1: rekenvraagstuk uit een basisschoolmethode ('Wis en Reken', 'Wisboek 1', groep 8, pag. 137) met vier oplossingsmanieren van leerlingen

onderzoek aangemeld nadat op de Panama-conferentie tijdens een werkgroep over het onderzoeksplan, hiertoe een oproep was gedaan. Enkele van de aangemelde deelnemers hebben vervolgens hun collega's overgehaald om ook deel te nemen. De deelnemende docenten waren over het algemeen zeer gemotiveerd om hun opleidingsonderwijs te verbeteren en mee te doen aan het onderzoek. De docenten hebben het onderzoeksmateriaal in verschillende jaren van de opleiding gebruikt, zowel bij voltijd- als bij deeltijdstudenten, afhankelijk van wat passend en

In figuur 1 staat een voorbeeld van een rekenvraagstuk met vier oplossingsmanieren van leerlingen dat gebruikt is in het onderzoek. In totaal bestond het onderzoeksmateriaal uit zes van dergelijke vraagstukken. De studenten kregen de opdracht om op de oplossingsmanieren van de leerlingen te reflecteren aan de hand van het AVE-reflectieformat bestaande uit de drie fasen: Analyseren, Verklaaren en Evalueren. In figuur 2 is het AVE-reflectieformat afgebeeld. In het format is elke fase voorzien van een gedetailleerde omschrijving.

Systematisch reflecteren met behulp van het AVE-reflectieformat. Behandel voor elke oplossingsmanier van elke leerling afzonderlijk zoveel mogelijk de volgende onderdelen (het is niet altijd mogelijk om alle onderdelen (diepgaand) aan de orde te stellen):	
1	<p>Analyseren</p> <p>Begrijpen, weergeven, beoordelen, verbeteren</p> <p>Doorgrond de oplossingsmanier van de leerling (hoe heeft hij gerekend?). Geef dit zo helder mogelijk weer en verbeter, indien mogelijk, de weergave van de leerling. Dat wil zeggen:</p> <ul style="list-style-type: none"> – gebruik correcte notatie; – voeg eventueel een tekening, schema of tabel toe; – voeg ontbrekende stappen toe, of laat overtollige stappen weg; – verbeter rekenfouten; – voltooi de oplossingsmanier (als hij niet helemaal af is); – benoem standaardstrategieën of –oplossingsmanieren met vaktermen; – beoordeel eventueel ook het realiteitsgehalte van het antwoord. <p>Kortom: Laat zien dat je de oplossingsmanier van de leerling volledig begrijpt en correct kunt weergeven. Als de leerling een oplossingsmanier heeft gekozen die niet bij het vraagstuk past, geef je dat aan. Bij stap 2 'Verklaren' leg je uit waarom de leerling die aanpak niet had mogen kiezen.</p>
2	<p>Verklaren</p> <p>Verklaren, bewijzen, toelichten</p> <p>Bij een goede oplossingsmanier: Waarom mag het op deze manier? Waarom moet het op deze manier? Waarom is deze aanpak correct? Eventueel: Is deze aanpak algemeen geldend of mag hij alleen onder bepaalde omstandigheden gebruikt worden?</p> <p>Bij een foute oplossingsmanier: Waarom mag het zo niet (bij dit vraagstuk)? Waarom is dit een verkeerde aanpak (bij dit vraagstuk)? Eventueel: onder welke omstandigheden is deze aanpak wel toegestaan?</p>
3	<p>Evalueren</p> <p>Is de aanpak:</p> <ul style="list-style-type: none"> – Handig of omslachtig? – Inzichtelijk of niet direct te doorgronden? – Veilig of risicovol (d.w.z. grote kans op fouten)? <p>Licht je mening toe, vergelijk eventueel met andere oplossingsmanieren (van andere leerlingen). Geef bij een risicovolle aanpak adviezen om het risico te verkleinen. Evalueer alleen een aanpak die in principe correct gekozen is bij dit vraagstuk. (Beoordelen van goed/fout is al in stap 1 aan de orde geweest.)</p>

figuur 2: Het AVE-reflectieformat dat gebruikt wordt om te reflecteren op leerlingenwerk

Bij de keuze van het vraagstuk en de oplossingsmanieren van de leerlingen gold als belangrijkste criterium dat reflecteren met het AVE-format in principe zou moeten kunnen leiden tot het ontwikkelen van SCK. De zwembadopgave voldoet onder andere aan deze eis, omdat er voor dit vraagstuk geen voor de hand liggende standaardoplossingsmanier is, maar verschillende oplossingsmanieren mogelijk zijn. De oplossingsmanieren van de leerlingen zijn onderling verschillend, niet allemaal correct, meer of minder geavanceerd en vereisen dat de studenten zich moeten verplaatsen in denkwijzen die waarschijnlijk geheel of gedeeltelijk zullen afwijken van hun eigen oplossingsmanieren. Als dat lukt, moeten ze zich vervolgens afvragen of deze oplossingsmanieren correct zijn. Dat blijkt voor leerling 2 bijna en voor leerling 3 helemaal het geval te zijn. De waarom-vraag daagt uit tot nog meer wiskundige doordinking. Waarom is het toegestaan dat leerling 3 ervan uitgaat dat de rechterhelft van het zwembad een gemiddelde diepte heeft van 1,5 meter? Voor deze verklaring kun je de dwarsdoorsnede van de rechterzijde van het bad meetkundig transformeren tot een rechthoek.

Ook leerling 4 probeert impliciet het zwembad naar een rechthoek te transformeren, maar hij maakt hier een denkfout. Studenten moeten de denkfout ontmaskeren. Ook komt het voor, dat studenten geïnspireerd door de alternatieve oplossingsmanieren zelf nog meer nieuwe aanpakken construeren. Het materiaal moet wiskundige activiteiten kunnen uitlokken die mogelijk bijdragen aan de ontwikkeling van SCK.

Werkwijze

De docenten kregen de studentmaterialen bestaande uit het leerlingenwerk en het AVE-format ruim van tevoren via de e-mail toegestuurd. Een korte docentinstructie was toegevoegd waarin werd uitgelegd dat het leerdoel van deze opleidingsactiviteit vooral en in de eerste plaats wiskundig is, namelijk de ontwikkeling van SCK. Een omschrijving van SCK was toegevoegd. Dit was gedaan, omdat veel pabo-docenten nog weinig ervaring met en kennis van SCK hebben. Reflecteren op leerlingenwerk wordt vaak ingezet om didactische kennis te ontwikkelen en dat was in dit onderzoek niet de bedoeling. Ook werd de werkvorm uiteen gezet. Studenten moesten eerst in

tweetalen op het leerlingenwerk reflecteren waarna een plenaire interactie onder leiding van de docent volgde. De totale activiteit zou ongeveer een half uur in beslag nemen. Alle deelnemende docenten zijn na afloop (telefonisch) geïnterviewd om te onderzoeken of ze reflecteren op dit leerlingenwerk met het AVE-format een effectieve manier vonden om SCK te ontwikkelen. Bij vier docenten heeft naast het interview ook een observatie plaatsgevonden.

4 Ervaringen

Motivatie en betrokkenheid

De interviews en observaties leverden een aantal interessante praktijkervaringen op. Alle vijftien deelnemende docenten gaven te kennen dat vrijwel al hun studenten bij het reflecteren op het leerlingenwerk goed tot uitzonderlijk goed gemotiveerd waren. Sommige docenten noemden dit opvallend en verbazingwekkend. De motivatie en betrokkenheid van de studenten bleven groot gedurende de hele activiteit, die soms zelfs drie kwartier of langer duurde. Dat was veel langer dan de voorspelde dertig minuten. De motivatie bleef ook nadat de activiteit in dezelfde les of in opeenvolgende lessen met dezelfde studenten een paar keer was herhaald met andere vraagstukken. Eén docent deed alle zes de vraagstukken in opeenvolgende bijeenkomsten in één groep en merkte dat de belangstelling van zijn studenten niet afnam. In tegendeel, veel studenten vroegen om meer voorbeelden. Deze docent meldt:

Ik ben nog nooit zo lang, zo diepgaand samen met de studenten met slechts één opgave bezig geweest. De studenten haakten niet af. Verbazingwekkend!

Eén docent was onder de indruk van de enorme spanningsboog van zijn studenten. Een andere docent deed de activiteiten aan het eind van het studiejaar. Op dat moment zijn studenten meestal niet goed meer te motiveren voor rekenen-wiskunde, maar met deze opdrachten lukte het wel om ze actief en betrokken te houden. Een docent merkte tot haar verbazing dat de studenten na de les door wilden gaan met het reflecteren op leerlingenwerk omdat er volgens hen nog meer uit viel te halen.

De grote motivatie en betrokkenheid zijn extra opvallend omdat het leerlingenwerk bij veel studenten negatieve gevoelens oproept. Maar liefst twaalf docenten bespeurden onzekerheid, frustratie, schrik en schaamte bij enkele van hun studenten:

Dit is werk van de basisschool en zelfs dat kan ik niet eens! Dit moet ik eigenlijk kunnen, maar ik kan het niet en ik weet niet of ik dit ooit ga leren. Als ik naar het leerlingenwerk kijk voel ik me zo dom! Sjonge wat is dit kind slim! Moeten ze dit echt kunnen op de basisschool?

Terwijl pabo-studenten over het algemeen nogal snel geneigd zijn het bijltje erbij neer te gooien als ze een in hun ogen, moeilijk reken-wiskundig probleem moeten oplossen, gebeurde dat in dit experiment vrijwel niet. De betrokken docenten hadden hiervoor een aantal verklaringen, te weten:

1 De vraagstukken en het leerlingenmateriaal zijn authentiek. Veel deelnemende studenten vonden de vraagstukken en het leerlingenwerk niet makkelijk te doorgronden, maar omdat dit afkomstig was uit bestaande rekenboeken en (grotendeels) van echte leerlingen waren ze onmiddellijk overtuigd van het inzicht dat ze dit moesten leren en bereid zich erin vast te bijten.

Als ik dit later in de klas tegenkom moet ik er ook mee om kunnen gaan. Dus dan kan ik het beter nu maar vast leren.

2 De reflectieopdracht stimuleert studenten tot meer wiskundige diepgang. In gewone reken-wiskundelessen op de pabo zijn studenten vaak uitsluitend gefocust op het goede antwoord. Zodra ze dat gehoord hebben neemt hun belangstelling af en hebben ze nauwelijks interesse voor een verklaring van de aanpak of voor alternatieve oplossingsmanieren. Bij het reflecteren op leerlingenwerk daarentegen is het voor de studenten van het begin af aan duidelijk dat het niet om het antwoord gaat, maar dat analyseren, verklaren en evalueren van de oplossingsmanieren het doel van de activiteit is. Verschillende studenten beweren dat je leerlingen tekort doet als je alleen naar hun antwoord kijkt en niet naar hun oplossingsmanier. Het analyseren, verklaren en evalueren roept spontaan veel betrokkenheid, discussie en overleg op.

3 Het leerlingenwerk biedt steun bij het oplossen van het vraagstuk en zet aan tot wiskundig denken. Studenten gaven te kennen dat vraagstukken die ze eigenlijk niet op konden lossen, nu wel binnen hun bereik kwamen omdat ze door het leerlingenwerk op ideeën werden gebracht. De verschillende oplossingsmanieren van leerlingen zorgden ervoor dat ze langer op een vraagstuk bleven puzzelen. Verschillende docenten merkten dat het leerlingenwerk wiskundig denken bij hun studenten uitlokte. Een docent zei:

Normaal gesproken als studenten vastlopen met een vraagstuk probeer je ze een hint te geven. Het is echter jammer dat je in zo'n geval vaak al te veel weggeeft. Studenten nemen de hint klakkeloos over en denken er niet over na. Hij komt van de docent dus dan zal het wel goed zijn.

Bij dit materiaal komt de hint in de vorm van een oplossingsmanier van een leerling. Het is niet zeker dat die aanpak correct is. Zelfs als een student daar in eerste instantie zonder veel nadenken in meegaat, stuit hij toch na enige tijd op een dilemma als blijkt dat een andere leerling een andere oplossingsmanier heeft gebruikt en op een ander antwoord uitkomt. Welke van de twee leerlingen heeft het dan goed gedaan? Dat ontlokt uiteindelijk toch nog het denkwerk dat je als docent zo graag teweeg wilt brengen.

- 4 Studenten mogen samenwerken en leren van en met elkaar. Het samenwerken met medestudenten werkte zeer stimulerend. Aanvankelijk werd er in de onderzoekopzet vanuit gegaan dat studenten eerst individueel op het leerlingenwerk zouden reflecteren. Nadat dit bij drie docenten absoluut niet van de grond bleek te komen, is de aanpak bijgesteld. Studenten mochten meteen bij aanvang samen met één of twee medestudenten reflecteren op het leerlingenwerk. Het effect van deze verandering was enorm. De studenten bleven langdurig en zeer gemotiveerd aan de opdracht werken. De bereidheid om elkaar te helpen, ideeën uit te wisselen en elkaars aanpakken te bevestigen was groot. Zowel tijdens de reflectie in kleine groepjes als tijdens de plenaire bespreking was de betrokkenheid en input van de studenten groot. Zij stimuleerden elkaar: ‘Kom op joh, dit snap je wel!’ en bleven kritisch meedenken. Klakkeloos overnemen van elkaars werk was nauwelijks aan de orde.
- 5 De vraagstukken en de oplossingsmanieren van leerlingen waren op het juiste moeilijkheidsniveau. De docenten vonden de opgaven en het leerlingenwerk over het algemeen goed op niveau. ‘Niet makkelijk, maar dat moet ook niet. Als je doel is dat studenten wiskundige kennis ontwikkelen, moet er wiskundig ook wat te halen zijn.’ Twee docenten gaven aan dat een van de zes opgaven te moeilijk was. Er waren te weinig studenten in de groep die deze opgave aan konden en dat leverde tijdens de interactie te weinig input op. De docent moest de opgave gaan uitleggen en daarmee werd de doelstelling van de activiteit niet bereikt. Deze moeilijke opgave is niet door alle docenten uitgeprobeerd. Wel kan men uit deze ervaring afleiden dat een opgave, die te moeilijk is voor het merendeel van de studenten, niet geschikt is voor reflectie met het AVE-reflectieformat. Als er in de klas een klein aantal studenten is dat moeite heeft met het materiaal is dat geen probleem. Doordat medestudenten hen kunnen steunen, blijft iedereen betrokken en wordt er in actieve interactie wel diepgang bereikt. Maar als bij te moeilijke vraagstukken de kennis uitsluitend door de docent ingebracht wordt, nemen motivatie en betrokkenheid af.

Het materiaal en de bijbehorende reflectieactiviteiten blijken ongeschikt te zijn voor zeer zwakke en onzekere rekenaars. Studenten die zelf de basisschoolstof nog niet goed onder de knie hebben, blijken niet in staat te zijn om alternatieve oplossingsmanieren te doorgronden, te beoordelen, te verklaren en te vergelijken. Voor de ontwikkeling van SCK is basale reken-wiskundige kennis vereist. Sommige docenten stelden het behalen van de eerstejaars Wiscattoets als voorwaarde, maar anderen merkten op dat het meedoen aan het onderzoek hun studenten juist had geholpen bij hun voorbereiding op de Wiscattoets. Voor diepgaand reflecteren op leerlingenwerk is ook enig wiskundig zelfvertrouwen onmisbaar.

Studenten die krampachtig vasthouden aan één oplossingsmanier, omdat ze bang zijn anders in de war te raken, zijn niet in staat om te reflecteren op verschillende oplossingsmanieren. Als ze het al aandurven om naar een andere oplossingsmanier te kijken, beschouwen ze hun eigen aanpak vaak als maatgevend. Het lukt hen niet om *open-minded* naar een andere aanpak te kijken.

De vakdocent zorgt voor wiskundige diepgang

Studenten kunnen met elkaar ver komen in het reflecteren op leerlingenwerk, maar daarnaast is de rol van de vakdocent tijdens de gehele reflectieactiviteit van groot belang. Slechts één docent gaf aan dat de rol van de vakdocent bij deze aanpak gering is, mits er in de groep voldoende kennis aanwezig is. Zij meende dat studenten in dat geval met elkaar heel ver kunnen komen. Alle andere docenten hebben ervaren dat de rol van de docent tijdens de voorbereidingsronde in twee- of drietallen, en vooral tijdens de plenaire interactie van zeer groot belang is. Eén docent gaf te kennen dat reflecteren zonder vakdocent een heilloze exercitie is, omdat alleen de docent er voor kan zorgen dat er voldoende wiskundige diepgang wordt bereikt.

Men noemde als taken voor de vakdocent tijdens het reflecteren op leerlingenwerk de volgende zaken:

- zorgen voor diepgang en niveauverhoging;
- bevestigen en stimuleren van (onzekere) studenten;
- zorgen voor nauwkeurige en volledige notaties en verwoording;
- aandringen op het maken van tekeningen;
- zorgen dat de fasen ‘Verklaren’ en ‘Evalueren’ voldoende diepgaand aan de orde komen. (Veel studenten komen uit zichzelf niet veel verder dan het interpreteren en beoordelen van oplossingsmanieren. Het parafaseren, verklaren en evalueren lukt niet goed genoeg zonder vakdocent);
- ingrijpen, verbeteren of vragen stellen als er fouten gemaakt worden;
- knopen doorhakken als de discussie dreigt te verzanden;
- zorgen voor leerrendement. Samenvatten, ordenen en benadrukken van de wiskundekennis die met elkaar geconstrueerd is;
- tijdens de voorbereidingsronde al inventariseren welke ideeën onder de studenten leven, zodat de docent daar tijdens de plenaire uitwisseling beter op in kan spelen.

Om deze taken te kunnen vervullen is het van belang dat de docent de les goed voorbereidt:

Je moet je vooraf goed verdiepen in de verschillende oplossingsmanieren in het leerlingenwerk en bedenken welke wiskundige kennis de studenten hiermee kunnen leren. Je moet bedenken welke wiskundedoelen je eventueel met dit materiaal kunt bereiken, welke accenten je wilt leggen.

Eén docent gaf te kennen dat ze een van de keren haar lesvoorbereiding minder zorgvuldig had gedaan. De gezamenlijke reflectie op het leerlingenwerk leverde toen veel minder op dan tijdens de lessen die ze wel grondig had voorbereid. Veel docenten gaven te kennen dat het reageren op input van de studenten tijdens deze lessen minder makkelijk is dan tijdens de gewone reken-wiskundelessen. De input van studenten is minder voorspelbaar. Ze stellen ook meer vragen en die zijn vaak wiskundiger van aard. Het vraagt kennis en discipline van de docent om studenten werkelijk wiskundige diepgang te laten bereiken, met name als het gaat om verklaren en evalueren van oplossingsmanieren:

Bij gewone gecijferdheidslessen schud ik het meestal ter plekke wel uit mijn mouw. Maar bij dit soort lessen gaat dat niet.

Alleen als je goed weet waar je mee bezig bent kun je de wiskundige verdiepingsvraag stellen. Het is niet moeilijk om bij dit soort lessen de interactie op gang te brengen. Het is wel moeilijk om er voor te zorgen dat er daadwerkelijk iets geleerd wordt. De rol van de vakdocent is weliswaar zeer belangrijk, maar hij of zij moet tegelijkertijd genoeg ruimte bieden voor input van studenten. Verschillende docenten gaven een student de leiding over (een deel van) de interactieve nabespreking. De student besprak het leerlingenwerk, schreef en tekende op het bord en stelde vragen aan medestudenten. De bereidheid van studenten om aan de interactie deel te nemen bleek dan extra groot. De docent moet het proces nauwlettend volgen en voortdurend afgewogen op welk moment hij wel of niet ingrijpt. Sommige dingen kunnen studenten ook met elkaar corrigeren, maar als dat niet gebeurt moet de docent wel in actie komen. Ook voor het bereiken van het wiskundige lesdoel - de ontwikkeling van SCK - kan het nodig zijn om regelmatig een verdiepingsvraag te stellen. Andere docenten hielden zelf de leiding over de interactieve bespreking, maar stelden daarbij veel vragen en stimuleerden de studenten aldus om met elkaar wiskundige kennis te construeren.

Tijdens een van de observaties bleek een docent weinig interactie op gang te brengen. Ze nam zelf volledig het voortouw in de nabespreking en presenteerde haar interpretatie van het leerlingenwerk. Al snel werd de betrokkenheid minder en haakten studenten af, terwijl ze tijdens de reflectie in kleine groepen wel gemotiveerd hadden samengewerkt. Dit voorbeeld maakt duidelijk dat de docent de juiste balans moet vinden tussen sturen en ruimte geven, afwachten en ingrijpen, bevestigen en uitdagen. Eén docent verwoordde het als volgt:

Het is een moeilijk spel. Je wilt studenten zelf ontdekkingen laten doen, betrokken houden en gezamenlijk kennis uit laten wisselen, dat is waardevol en leerzaam, maar als docent ben je tegelijkertijd voortdurend nodig om sturing te geven, te stimuleren, accenten te leggen, diepgang te bereiken en puntjes op de i te zetten.

Als vakdocent heb je veel SCK nodig om dit in goede banen te leiden en werkelijk leeropbrengst te bereiken.

Verbetering van het AVE-reflectieformat

Studenten kregen in dit onderzoek de opdracht om in drie fasen te reflecteren op het leerlingenwerk met behulp van het AVE-reflectieformat. Bij de eerste reflectiefase, die van het Analyseren, ging het om het begrijpen, beoordelen, weergeven en verbeteren van oplossingsmanieren van leerlingen. Bij Verklaaren moesten ze de oplossingsmanier van de leerling toelichten en onderbouwen: waarom is de gekozen oplossingsmanier correct voor het oplossen van het vraagstuk in kwestie? Of waarom is hij dat niet? In de derde fase, die van het Evalueren, moesten de studenten aangeven of de oplossingsmanier - indien deze correct is - handig, inzichtelijk en/of veilig is en hun mening hierover onderbouwen.

De eerste fase van het AVE-reflectieformat kwam volgens de deelnemende docenten het beste uit de verf. Er was een grote bereidheid onder studenten om het leerlingenwerk dat ze ontvingen uitvoerig en diepgaand te analyseren. Minder groot was de bereidheid om de oplossingsmanieren van leerlingen vervolgens gedetailleerd te presenteren en te parafraseren. Schetsen en presentaties waren vaak slordig en oppervlakkig. De fasen Verklaaren en Evalueren kwamen vaak minder uitvoerig en diepgaand aan de orde. Volgens de docenten lag dat deels aan de aard van deze fasen - verklaren en evalueren van oplossingsmanieren is moeilijker dan analyseren - en deels aan het AVE-reflectieformat dat in zijn huidige vorm de studenten hiertoe niet genoeg uitdaagde. Voor het AVE-reflectieformat werden de volgende verbeteringsgesties gegeven:

- Vereenvoudig het format. Het huidige reflectieformat is te gedetailleerd, te uitvoerig. Het is beter om studenten te vragen drie belangrijke, duidelijke stappen te zetten - Analyseren, Verklaaren en Evalueren - dan deze uit te splitsen in allerlei kleine tussenstapjes. Studenten gingen het te gedetailleerde format als afvinklijstje gebruiken en verloren de grote lijn uit het oog.
- Voeg de fasen Analyseren en Verklaaren samen. In het huidige format zijn ze uit elkaar getrokken. Studenten moesten eerst uitleggen hoe de leerling gerekend heeft en beoordelen of dit een goede aanpak is. Vervolgens moesten ze vaststellen wáárom de gehanteerde strategie wel of niet correct is. In de praktijk blijkt echter dat tijdens het reflecteren op leerlingenwerk het Analyseren en Verklaaren van oplossingsmanieren voortdurend in elkaar overlopen. Ze vormen een geheel. Hoe is er gerekend? Mag het zo? Waarom mag het zo? Deelnemende docenten gaven aan dat de twee fasen Analyseren en Verklaaren binnen het AVE-reflectieformat beter in één gezamenlijke fase aan bod zouden kunnen komen. Enkele docenten plaatsten daar wel een kanttekening bij. Op deze manier wordt het risico

groter dat het verklaren van oplossingsmanieren niet of minder nadrukkelijk aan bod zou komen.

- Het Verklaren en Evalueren moet eerst geleerd worden. Studenten vinden het moeilijk om oplossingsmanieren te verklaren en te evalueren. Ze hebben in de opleiding tot nu toe nog weinig ervaring opgedaan met het verklaren, toelichten en onderbouwen van oplossingsmanieren. De vraag: 'Waarom mag het op deze manier?', wordt in opleidingen over het algemeen nog tamelijk weinig gesteld. Wat betreft de fase van het Evalueren bleek dat de studenten niet goed weten wat ze onder handige, veilige en inzichtelijke oplossingsmanieren moeten verstaan. Sommigen zagen geen verschil tussen het evalueren en het beoordelen van oplossingsmanieren.

Deelnemende docenten gaven als advies dat voor de fase van Verklaren aparte oefening gewenst is: 'Laat studenten vaker oefenen met het verklaren, beredeneren en toelichten van een oplossingsmanier'. De fase van het Evalueren komt wellicht beter uit de verf als de studenten dit pas gaan doen als alle oplossingsmanieren uit het leerlingewerk geanalyseerd en verklaard zijn. De oplossingsmanieren kunnen bij het Evalueren dan onderling vergeleken worden. Wellicht kunnen studenten op basis van de criteria helderheid, veiligheid en handigheid een ordening in de gepresenteerde oplossingsmanieren maken.

Enkele docenten gaven als suggestie om studenten, voorafgaand aan het reflecteren op het AVE-reflectieformat, eerst zelf het rekenvraagstuk in kwestie te laten oplossen zonder daarbij de beschikking over het leerlingewerk te hebben. Hierover waren de meningen verdeeld. Sommige docenten vroegen zich af of hun studenten vervolgens nog onbevangen naar het leerlingewerk zouden kunnen kijken. Blijft hun eigen aanpak dan niet te veel hun blik sturen? Sommige studenten raken gefrustreerd als ze zelf het vraagstuk niet kunnen oplossen. Direct het leerlingewerk erbij verstrekken geeft hen meteen al wat houvast. Sommige docenten gaven aan dat studenten spontaan eigen oplossingsmanieren toevoegden aan het leerlingewerk, al dan niet geïnspireerd door de oplossingsmanieren van de leerlingen.

De leeropbrengst voor studenten is veelzijdig

De docenten die aan het onderzoek deelnamen, werd na afloop gevraagd welke opbrengst de reflectieactiviteit oplevert met betrekking tot puur wiskundige kennis, vakdidactische kennis en SCK.

Puur wiskundige opbrengst

Over het algemeen waren de deelnemende docenten van mening dat hun studenten door het reflecteren op het leerlingewerk wiskundige kennis ontwikkelden. Sommige docenten waren daar echter niet zo zeker van. Ze zagen wel dat er veel waardevolle wiskundige aspecten, pro-

blemen en oplossingsmanieren tijdens de interactie aan de orde kwamen, maar zij vroegen zich af of er op die punten daadwerkelijk iets geleerd werd. Wiskunde leren gebeurt niet vanzelf. Zowel docenten als studenten moeten zich bewust zijn dat het in deze activiteit gaat om het leren van wiskunde. Ze moeten weten dat dat het doel is. Als je er als docent niet nadrukkelijk op gefocust bent, komt de wiskunde tijdens het reflecteren op leerlingewerk te onbewust, vaak eenmalig, ongestructureerd en te terloops aan bod. Eén docent zei:

Ik zag mijn studenten stiekem wiskunde leren.

Maar een andere docent vroeg zich af of onbewust wiskunde leren mogelijk is. Zij zei:

Wiskunde moet je bewust en gestructureerd leren. Je moet als docent doelen stellen, accenten leggen en zorgen dat er geleerd wordt. Je studenten moeten weten wat er te leren valt.

Weer een ander zei:

Er zijn zeker kansen om je studenten met deze activiteit wiskunde te leren, maar die moet je wel bewust en doelgericht weten te benutten.

Om doelgericht aan wiskundige kennis te werken, kan het volgens een aantal docenten zinvol zijn om de plenaire bespreking van het leerlingewerk af te sluiten met een reflectie waarin de wiskundige opbrengst van de reflectieactiviteit voor de studenten gezamenlijk wordt vastgesteld. Een docent die dit al spontaan had uitgetoetst en de activiteit afsloot met een reflectie op de wiskundige opbrengst, merkte op dat studenten het erg moeilijk vinden om vast te stellen wat ze wiskundig geleerd hebben. De rol van de docent is erg belangrijk bij het op een rijtje zetten van de wiskundige opbrengst. Vervolgens moet deze wiskundige kennis ook nog beklijven. Oefening en herhaling in een vervolgles is van belang. De bereidheid om actief aan deze vervolgles deel te nemen, zal vermoedelijk groot zijn omdat de studenten na de ervaring met het leerlingewerk weten waarom ze deze kennis moeten bezitten. De docent kan regelmatig verwijzen naar het leerlingewerk uit de eerdere les. Het doel van de vervolgles is dat de kennis, die bij het reflecteren op leerlingewerk geconstrueerd is, geconsolideerd wordt.

Een enkele docent stelde een omgekeerde volgorde voor. Geef studenten eerst in een gewone gecijferdheidsles voldoende wiskundige kennis zodat ze in een vervolgles die kennis kunnen inzetten bij het reflecteren op leerlingewerk. Het reflecteren op leerlingewerk is dan een toepassing en verwerking van het geleerde. Studenten zien wat ze met hun kennis kunnen doen. Het reflecteren op leerlingewerk zal met de specifieke voorkennis mogelijk soepeler verlopen. Het leerlingewerk zal dan niet of veel minder fungeren als rijke bron om gezamenlijk nieuwe kennis te construeren. Het is de vraag in hoeverre studenten gemotiveerd zullen zijn voor een dergelijke

pre-teaching. Ze hebben op dat moment immers het leerlingewerk waarvoor de te leren kennis nodig is nog niet gezien.

Alle docenten waren overtuigd van het feit dat het reflecteren op leerlingewerk een rol kan spelen in de ontwikkeling van wiskundige kennis als het een doordachte plaats krijgt in een lijn van activiteiten bestaande uit *pre-teaching* en/of oefening van wiskundige doelen. Docenten en studenten moeten zich beiden bewust zijn van en gericht zijn op het feit dat de ontwikkeling van wiskundige kennis het doel is van de reflectie op leerlingewerk, omdat er anders geen wiskunde geleerd wordt. Bovendien is de kans groot dat de aandacht al snel verschuift naar vakdidactische aspecten.

Vakdidactische opbrengst

Verschillende docenten waren van mening dat het reflecteren op dit soort leerlingewerk ook een belangrijke rol kan spelen bij de ontwikkeling van vakdidactische kennis. Alle docenten gaven aan dat hun studenten door het reflecteren op leerlingewerk overtuigd raakten van het feit dat je leerlingen tekort doet als je alleen naar hun antwoorden kijkt. Het is van groot belang dat je als leraar probeert je te verdiepen in de denkwijze en oplossingsmanieren van je leerlingen.

Dit inzicht kan men als een belangrijke didactische opbrengst beschouwen, die bijdraagt aan de attitude van de student. Of er nog meer vakdidactische opbrengst te bereiken valt met dit leerlingewerk is niet voor alle docenten zeker. In het opleidingsonderwijs is het weliswaar gebruikelijk om leerlingewerk in te zetten bij de ontwikkeling van vakdidactische kennis, maar dan gaat het daarbij meestal om leerlingewerk dat qua wiskundig niveau in één oogopslag te overzien is. Dat is bij het gebruikte onderzoeksmateriaal niet aan de orde, want dat vraagt juist om wiskundig diepgaand reflecteren. Er zijn docenten die het materiaal om die reden niet geschikt vinden om vakdidactische kennis te ontwikkelen. De wiskundige moeilijkheden die studenten erbij ondervinden, leiden af van mogelijke vakdidactische doelen. Een deel van de docenten ziet dit bezwaar niet en is van mening dat de ontwikkeling van wiskundige en vakdidactische kennis geïntegreerd moet plaatsvinden. Zij achten dit leerlingemateriaal daarvoor juist wel heel geschikt. Nadat het werk wiskundig geanalyseerd is, zou je studenten bijvoorbeeld kunnen vragen op welke wijze en in welke volgorde ze deze oplossingsmanieren van leerlingen zouden behandelen in de klas. Een andere docent gaf haar studenten de opdracht om bij elke oplossingsmanier van leerlingen iets te schrijven voor het kind: een tip, een compliment, een tekening ter verheldering, wat uitleg, of iets dergelijks. Hierbij speelt de vakdidactiek een rol. De ervaring leert dat studenten graag de aandacht van de nabespreking naar vakdidactische zaken leiden, weg van de wiskundige inhoud. Ze voelen zich vaak zekerder op vakdidactisch dan op wiskundig terrein. Het risico bestaat dat aandacht voor de vakdidactiek de aan-

dacht afleidt van het wiskundige doel. Om die reden zijn enkele docenten van mening dat bij het reflecteren op het gegeven leerlingewerk de vakdidactiek niet, of pas nadat er wiskundig genoeg geleerd is, een leerdoel mag zijn.

Verschillende docenten gaven aan dat studenten vakdidactische vaardigheden kunnen oefenen en leren tijdens de klassikale interactie. Zij vonden dat het reflecteren op leerlingewerk een grote vakdidactische opbrengst heeft zodra studenten de nabespreking leiden, beurten geven, op het bord schrijven, uitleggen, presenteren, aanpakken verwoorden, vragen beantwoorden, enzovoort, want dan oefenen ze immers vaardigheden die ze later in hun beroep ook nodig hebben. Voorwaarde om hier daadwerkelijk iets van te leren is dat deze activiteiten na afloop ook geëvalueerd worden.

Opbrengst van SCK

Veel docenten gaven te kennen, dat ze het waardevol vinden dat studenten zich bij het reflecteren op leerlingewerk oefenen in het oplossen van vraagstukken op meerdere manieren en handelingsniveaus, het tekenen en representeren van oplossingsmanieren, het verklaren, beredeneren en beargumenteren van wiskundige aanpakken, het zich verplaatsen in het denken van leerlingen, enzovoort. Zij zagen dit als vakdidactische leerwinst. Doorvragen leerde dat zij zich niet bewust waren dat bij het uitvoeren van deze taken vooral ook wiskundige kennis, SCK, gebruikt en geoefend wordt, de beroepspecifieke wiskundige kennis die leraren nodig hebben om flexibel en diepgaand met de basisschoolstof om te gaan. Ondanks de omschrijving van SCK in de onderzoeksinstructie hadden de deelnemende docenten over het algemeen geen beeld van dit kennisgebied paraat. Toch gaven ze impliciet, in het beschrijven van leeropbrengsten, te kennen dat hun studenten SCK ontwikkelden tijdens de reflectieactiviteiten.

De leeropbrengst samengevat

Het reflecteren op leerlingewerk levert op:

- Wiskundige kennis: mits de activiteit opgenomen wordt in een gestructureerde leerlijn van onderwijsactiviteiten waardoor de leeropbrengst geconsolideerd wordt en mits docenten en studenten zich bewust zijn van het wiskundige doel van de activiteit. Het is van belang dat de docent de wiskunde die geleerd kan worden nadrukkelijk onder de aandacht brengt. Bijvoorbeeld tijdens een afsluitende reflectie op de activiteit.
- Vakdidactische kennis: hierover waren de meningen verdeeld. Er zijn docenten die menen dat studenten vakdidactische kennis kunnen verwerven aan de hand van het beschikbare leerlingemateriaal, anderen betwijfelen dit, omdat het leerlingewerk lastig te doorgronden is waardoor het wiskundewerk studenten kan afleiden van de vakdidactische doelen. Sommige

docenten vrezen juist dat door de aandacht op de vakdidactiek te leggen wiskundige opbrengsten achterwege zullen blijven.

- SCK: studenten leren hun oplossingsmanieren onder andere verwoorden, verdedigen, toelichten, vergelijken, representeren. Ze verplaatsen zich in het denken van leerlingen en van medestudenten. Hiervoor is beroepspecifieke wiskundige kennis nodig. Veel docenten herkennen dit niet als wiskundige kennis maar zien wel dat er op dit gebied geleerd wordt, zeker als na afloop gereflecteerd wordt op deze vaardigheden. Daarmee geven ze impliciet aan dat studenten door deze activiteit hun SCK ontwikkelen.

5 Aanbevelingen

Hoewel vervolgonderzoek noodzakelijk is om aan te tonen dat studenten door reflectie met het AVE-reflectieformat daadwerkelijk kennis ontwikkelen, zijn de ervaringen uit dit verkennende onderzoek zeer hoopgevend. De positieve reacties van de betrokken docenten en de opvallende motivatie en betrokkenheid van de studenten zijn belangrijk genoeg om nu al aanbevelingen voor het opleidingsonderwijs te formuleren.

Laat pabo-studenten met een zekere basale rekenvaardigheid en wat wiskundig zelfvertrouwen diepgaand reflecteren op oplossingsmanieren van leerlingen bij een gegeven opgave uit een rekenmethode. Zorg dat de rekenopgave en de oplossingsmanieren van leerlingen wiskundig uitdagend zijn, maar niet té moeilijk voor de studenten. Gebruik voor de reflectie op het leerlingenwerk de drie fasen van het AVE-reflectieformat - Analyseren, Verklaaren en Evalueren, maar voeg niet te veel details aan deze drie fasen toe. Zorg dat het analyseren en verklaren van oplossingsmanieren vloeiend in elkaar overgaan, maar voorkom dat het verklaren te weinig aan bod komt.

Zodra alle oplossingsmanieren geanalyseerd en verklaard zijn, kunnen ze tot slot in een evaluatie onderling vergeleken worden op handigheid, inzichtelijkheid en veiligheid. Zorg dat voor de studenten duidelijk is wat onder deze aspecten van evalueren verstaan wordt. Laat de studenten eerst in een klein groepje aan het leerlingenmateriaal werken en wissel vervolgens ervaringen uit in een klassikale interactie, waarbij de rol van de vakdocent belangrijk is om eisen te stellen aan notatie, presentatie en verwoording van oplossingsmanieren en om voldoende diepgang te bereiken met name in het verklaren en evalueren. Voeg tot slot een reflectie toe waarin de wiskundige leeropbrengst van de activiteit wordt vastgesteld. Zorg voor een leerlijn van vervolgactiviteiten waarin de wiskundige opbrengst verder geconsolideerd wordt. Zorg dat de fasen Verklaaren en Evalueren voldoende geoefend zijn, omdat deze lastiger en onbekender

zijn dan het Analyseren van leerlingenwerk. Geef de studenten voldoende ruimte om een grote rol te spelen in de klassikale interactie, zodat ze betrokken blijven, maar blijf alert op het bereiken van voldoende wiskundige diepgang en het niet te snel afdwalen naar vakdidactische aspecten. Zorg dat de docenten een duidelijk, gedetailleerd en betekenisvol beeld hebben van wat AVE inhoudt en welke doelen studenten op dit kennisgebied kunnen bereiken.

Op deze manier zullen de studenten gemotiveerd en betrokken met het leerlingenwerk aan de slag gaan. Aldus ontwikkelen ze, volgens de betrokken docenten, puur wiskundige kennis, eventueel vakdidactische kennis en SCK. De aard en omvang van deze leeropbrengsten zal in een vervolgonderzoek aangetoond moeten worden.²

Noten

- 1 Veel docenten en studenten reageerden kritisch op de tekening van het zwembad waarvan de afmetingen verhoudingsgewijs niet kloppen en die weinig ondersteuning biedt bij het oplossen van het vraagstuk. Deze tekening is afkomstig uit de rekenmethode. Verschillende docenten en studenten voegden een schematische dwarsdoorsnede toe om het probleem nader te verhelderen.
- 2 De docenten die betrokken waren bij dit onderzoek zijn door hun deelname zonder uitzondering overtuigd geraakt van de meerwaarde van het reflecteren op leerlingenwerk. Zij verzochten de onderzoeker om zo spoedig mogelijk meer leerlingenwerk te verzamelen zodat zij dit op hun opleiding zouden kunnen inzetten.

Literatuur

- Ball, D.L., M.H. Thames & G. Phelps (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59, 389 – 407.
- Ball, D.L., H.C. Hill & H. Bass (2005). Knowing Mathematics for Teaching. *American Educator*. Fall 2005, 14-46.
- Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen (Commissie Meijerink) (2008). *Over de drempels met rekenen*. Enschede: auteur.
- Hattie, J.A. (2009). *Visible Learning. A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. London: Routledge.
- Hill, H.C. & D.L. Ball (2009). The curious and crucial case of mathematical knowledge for teaching. *Kappan*. October, 68-71.
- Hill, H.C., D.L. Ball & S.G. Schilling (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.
- Jakobsen, A., M.H. Thames, C.M. Ribeiro & S. Delaney (2012). Using Practice to Define and Distinguish Horizon Content Knowledge. *Paper presented in TSG23, ICME12*. Seoul.
- KNAW (2009). *Rekenonderwijs op de basisschool, analyse en sleutels tot verbetering*. Amsterdam: auteur.
- Kool, M. & R. Keijzer (2012). Wiskundekennis van de basisschoolleraar, een internationaal perspectief. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 31(4), 13-18.

- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- McBer, H. (2000). *Research into teacher effectiveness: A model of teacher effectiveness*. (Research Report #216). Nottingham: Department of Education and Employment. Geraadpleegd op 3 januari 2013 op http://www.teacher-net.gov.uk/_doc/1487/haymcbcr.doc.
- National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundations for success: The final report of the National Mathematics Advisory Panel*. Washington: U.S. Department of Education.
- Shulman, L.S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Thanheiser, E. (2012) Preservice Elementary Teachers Understanding of Multidigit Whole Numbers: Conceptions and Development of Conceptions. *Paper presented in TSG 23, ICME12, Seoul*.
- Toetsgids. (2012). Toetsgids pabo 'Rekenen-wiskunde'. 10 voor de leraar. <http://10voordeleraar.nl/documents/Toetsgidsen/Rekenen-wiskunde.pdf>.
- Zanten, M. van, F. Barth, J. Faarts, A. van Gool & R. Keijzer (2009). *Kennisbasis Rekenen-Wiskunde voor de lerarenopleiding basisonderwijs*. Utrecht: ELWIEr/Panama.

A primary teacher needs Specialized Content Knowledge (SCK) to teach mathematics. SCK is a deep, understanding of elementary mathematics. It is the mathematical knowledge that is unique to the teacher, and it enables teachers to have an in-depth understanding of their students mathematical problem approaches. How can primary student teachers develop their SCK during their study at the teacher education institute? In a study on developing the SCK of student teachers fifteen teacher educators experimented with the so-called AVE-method. That means that they gave their student teachers mathematical problems with problem approaches of primary students. The teacher students had to analyse (A), explain (V) and evaluate (E) the problem approaches of the children. After they worked on this task, the teacher educator organised a plenary discourse on the children's work in order to develop mathematical knowledge, especially SCK. The teacher educators involved in this experiment were positive about the AVE-method because it stimulated their students to thoroughly examine the work of the children. In doing this they discuss many mathematical aspects, but to develop of their specialized mathematical knowledge the teacher educator needs to work hard, he needs to ask profound questions, summarize and emphasize results, and for long-term effects the output of the session needs a follow-up in next activities. The teacher educator plays an important part in the success of the AVE-method, but the high motivation of the student teachers, resulting from the authentic work of children work, gives a fruitful breeding ground to work on SCK in this way.