Panama Praktijktip nummer 128

Maak eens een tekeningetje

V. Duman & A. Fase
Hs iPabo Amsterdam/Alkmaar

Inleiding

De finale van het achtste Bartjens rekendictee vond op 23 november 2012 plaats in Zwolle. De vooraankondiging van het 'Bartjens rekendictee' is voor ons aanleiding om met studenten aan de slag te gaan. Na goede ervaringen afgelopen jaar, waarin studenten meerdere 'events' per jaar organiseren binnen de opleiding is het een kleine stap hen te betrekken bij de voorbereiding en uitvoering van het rekendictee. Studenten zorgen voor de organisatie, surveillance en geschikte ruimtes. De studenten in het eerste jaar en de studenten in het tweede jaar moeten veertien opgaven maken. Door studenten te betrekken bij de organisatie zorgen zij ervoor dat zij met elkaar gaan wedijveren om wie uiteindelijk naar de finale in Zwolle zal gaan. Donderdag 1 november 2012 is het zover. Alle eerstejaars- en tweedejaarsstudenten, totaal 230, zitten in de startblokken om de veertien opgaven binnen 45 minuten te maken.

Wat er aan vooraf ging

Zowel de eerste- als de tweedejaarsstudenten hebben in het studiejaar 2012-2013 aanzienlijk meer contacturen dan afgelopen jaren (Keijzer, 2011). Waren het afgelopen studiejaar nog respectievelijk twaalf en tien bijeenkomsten van tachtig minuten, in het studiejaar 2012-2013 zijn dat er respectievelijk twaalf en zestien bijeenkomsten. Dit betekent een forse toename van de onderwijstijd.[1] Daarnaast hebben de eerstejaarsstudenten allemaal een zogenoemde 'zomercursus' van drie dagdelen gevolgd, waarin zij aan hun rekenvaardigheid werkten. In het reguliere rooster zijn er per groep ook nog vier extra bijeenkomsten ingepland om de studenten voor te bereiden op de instaptoets, de zogenoemde 'Wiscattoets' (Straetmans, 2005).
De forse toename van het aantal contacturen voor eerstejaarsstudenten in het eerste half jaar van de studie heeft inhoudelijk veel gevolgen gehad voor de inrichting van de bijeenkomsten. Er is meer tijd om te werken aan de didactiek en ook meer tijd om zicht te krijgen op de eigen reken-wiskundige ontwikkeling van studenten. De huidige tweedejaarsstudenten hebben afgelopen voorjaar meegedaan aan de pre-test van de Kennisbasis die landelijk wordt ingevoerd (Keijzer, 2011; 10 voor de leraar, 2012). Slechts een enkeling behaalde een voldoende. De overgrote meerderheid scoorde beneden het beoogde niveau. Deze uitslag vormde voor de iPabo een reden om nog intensiever aan de slag te gaan met de eigen rekenvaardigheid van studenten. Daarvoor ontwikkelden we een nieuw uitgebalanceerd programma, waarbij onderhoud van de eigenvaardigheid als aanpak bij de implementatie van de kennisbasis in de bijeenkomsten steeds meer aandacht krijgt. Overigens staat net als voor de introductie van het vernieuwde curriculum de professionele gecijferdheid van de student centraal en gebruiken we de extra bijeenkomsten om die nog beter aan te zetten.

Voorronde

Donderdag 1 november is de voorronde voor het Bartjens Rekendictee. Het is een eerste meting voor studenten om na te gaan waar ze precies staan als het gaat om hun reken-wiskundige ontwikkeling. En als de studenten met de opgaven aan de slag gaan, merken dat ze zich behoorlijk moeten inzetten om de veertien opgaven te maken. Er hangt formeel niets van de score af. Toch voelen verschillende studenten een bepaalde spanning. Ze werken drie kwartier geconcentreerd. Af en toe een diepe zucht of een kreet: 'Ik snap het niet!' Een paar studenten kiest ervoor de opgaven vroegtijdig onafgemaakt in te leveren bij het zien van zoveel lastige opgaven. We signaleren ook een groep studenten die eerder klaar is en slechts één of twee opgaven niet maakt en daarover rapporteren: 'Ik snap het niet'. Een meerderheid van de studenten is na 45 minuten nog niet klaar. Omdat het om een competitie gaat, besluiten we: tijd is tijd. Iedereen levert zijn werk in.

Onmiddellijk na afloop van al het rekenwerk gaan de studenten met elkaar in discussie. Nieuwsgierig naar de antwoorden bevragen zij elkaar. Enkelen komen naar ons toe en vertellen hoe ze te werk gingen en informeren of hun aanpak correct was. We kiezen er voor de studenten niet gelijk een antwoord te geven en reageren met aanwijzingen als: 'Heb je een tekening of schema gemaakt om het probleem te verhelderen?'
De studenten zijn nieuwsgierig over hoe zij er voor staan en informeren wanneer wij de uitslag beschikbaar

Duman, V. & A. Fase (2013). Maak eens een tekeningetje.
Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 32, 53-57.

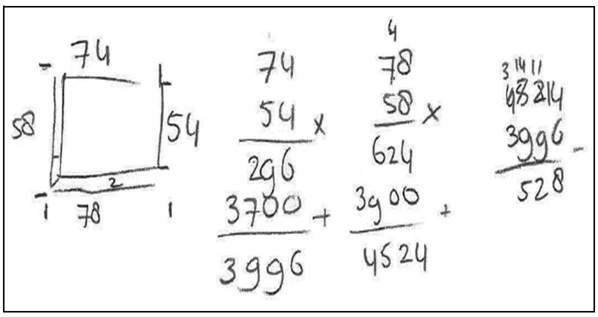
hebben. We krijgen meer vragen over de opgaven, zoals: ‘Die opgave van Nick en Simon, snapten jullie die?’, of: ‘Die puzzel van Ali B., dat kan toch niet?’ en ‘De opgave van Sven Kramer is makkelijk’. Teleurstelling van het niet begrijpen of kunnen aanpakken en ook nieuwsgierigheid of de opgaven goed zijn aangepakt, gaan hier samen. Aan ons om onmiddellijk na te kijken hoe de studenten gescoord hebben. We houden daarbij, naast de score, ook de tijd in de gaten. Daarmee bepalen we een ranglijst. De nummers één, twee en drie krijgen een prijs van de opleiding. De sterkste rekenaar mag door naar de landelijke finale.

Studentenwerk

Het nakijken van het werk maakt ook ons nieuwsgierig, namelijk naar hoe studenten de opgaven hebben aangepakt. Nieuwsgierig naar hoe studenten aan de slag zijn gegaan om uiteindelijk de uitkomst te vinden komen in onze ogen opvallende en bemoedigende dingen naar voren. We zien veel rekenwerk, waar dat niet altijd nodig is en werk van studenten die blijk geven van een strategie waarbij inzicht en een handig manier van aanpakken samen gaan. We signaleren dat de uiteindelijke winnaar Suzanne, onze afgevaardigde naar de landelijke finale, twee ‘onnodige’ foutjes maakt.
We willen verder met het studentenwerk aan de slag en selecteren uit alle oplossingen de mooiste en opmerkelijkste aanpakken om deze tijdens de eerstvolgende bijeenkomst te bespreken. Wellicht, zo bedenken we, geeft dat studenten meer inzicht in de eigen aanpak.
Een van de opgaven gaat over turner Epke Zonderland. Wanneer deze opgave met de studenten bespreken, merken we dat deze opgave leidde tot enkele misverstanden (fig.1).

Epke Zonderland

Ranomi wil een foto van Epke Zonderland boven haar bed. De foto is 74 cm bij 54 cm. Om de foto komt een lijst die overal 2 cm breed is. Wat is de oppervlakte van de lijst in vierkante centimeters?



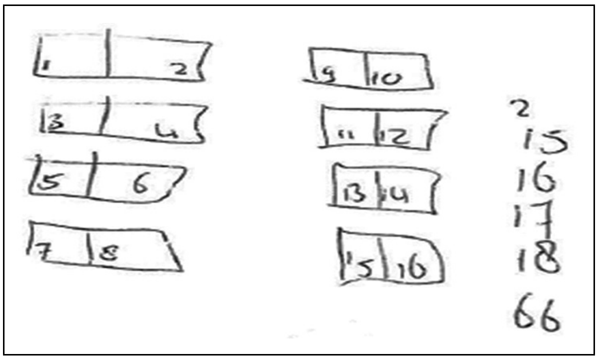
figuur 1

‘Onder lijst versta ik het geheel’, merkt een van de studenten op ‘Je kunt ook de afzonderlijke zijkanten aan elkaar vastmaken en dan twee keer twee centimeter eraf trekken’. ‘Ik heb een schetsje gemaakt, daar het probleem bij de hoekpunten ligt’, zegt een ander. Het tekeningetje laat goed zien hoe deze student gedacht heeft. De tekening in figuur 1 verduidelijkt het probleem dat in de context opgeroepen wordt. Het visualiseert wat uitgerekend moet worden; namelijk hoe 54 cm bij 74 cm met een rand van 2 cm wordt tot 58 cm bij 78 cm.

Een andere opgave gaat over de gratis ochtendkrant ‘De Spits’. Bij het doornemen van deze opgave, laten studenten overtuigend weten hoe zij met deze opgave worstelden: ‘Verschrikkelijk deze opgave. Ik kon me er geen voorstelling van maken. Als ik eenmaal begon, dan werd ik weer in de war gebracht.’ Een ander vult aan: ‘Had ik de Spits maar bij me, dan kon ik het zo optellen.’

De Spits

De Spits is een krant die dagelijks gratis wordt verspreid. De krant bestaat uit 8 losse dubbelgevouwen bladen, die in het midden aan elkaar zijn geniet. Elk blad bestaat dus uit vier pagina’s. Tel de vier paginanummers van het binnenste blad bij elkaar op. Wat is je uitkomst?



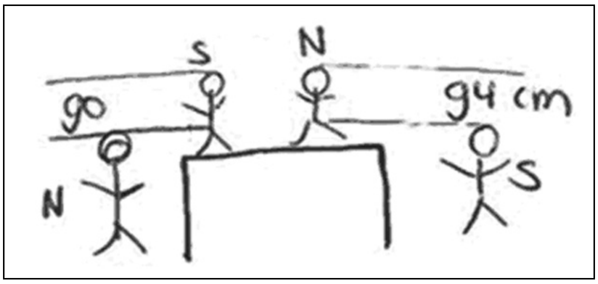
figuur 2

In de bespreking tonen we de schets die een van de studenten maakte (fig.2). Op de schets zijn de acht bladen getekend en voorzien van de getallen 1 tot en met 16. Bij het zien van de tekening van deze student melden enkele studenten spontaan: ‘Zo simpel, waarom ben ik daar niet opgekomen?’ Dat neemt niet weg dat de tekening niet duidelijk maakt waar de getallen 15, 16, 17 en 18 vandaan komen! Immers achter 15 zit 16 en in deze tekening lijkt het alsof ze naast elkaar zichtbaar zijn. Ook valt op dat de student hier cijferend aan het optellen is. We merken overigens dat veel studenten het opgavenblad met uitrekenpapier gebruiken als krant. Dat is echter wel wat behelpen, want opgavenblad en uitrekenpapier bestaan uit slechts zes pagina’s!

Het Volendamse zangduo Nick en Simon vormen het decor van nog een andere opgave. Deze opgave leidt tot veel vragen. ‘Dat kun je toch niet uitrekenen, je moet toch weten hoelang Nick en Simon zijn?’

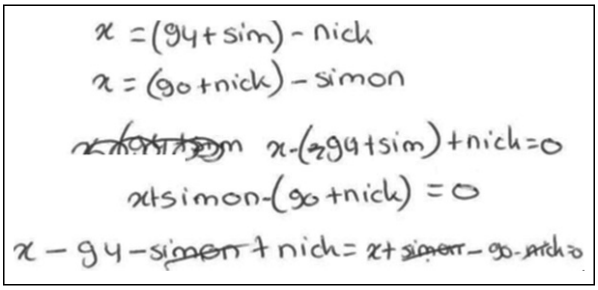
Nick en Simon

Als Nick op een podium staat en Simon staat naast dat podium, dan komt Nick 94 cm boven Simon uit. Als Simon op datzelfde podium staat en Nick staat naast het podium, dan komt Simon 90 cm boven Nick uit. Hoeveel centimeter is dat podium hoog?



figuur 3

Enkele studenten proberen de vraag te verhelderen door een tekeningetje te maken (fig.3).
Eén student heeft daarna geprobeerd zijn schets te vertalen naar twee vergelijkingen. Omdat hij met drie variabelen ging werken komt hij uiteindelijk in de knoop en geeft de moed op (fig.4).



figuur 4

Deze student zag niet dat de linkerkant van zijn vergelijkingen uit dezelfde variabele bestaat namelijk ‘*x*’. Hij laat overigens wel zien dat hij horizontaal kan mathematiseren. Hij vertaalt namelijk een contextopgave naar een schets vervolgens naar vergelijkingen, maar bij het oplossen van deze vergelijkingen komt hij net wiskundig inzicht of ervaring te kort. Als hij namelijk had bedacht dat de linkerkant van de vergelijkingen gelijk zijn en dat dat betekent dat je de rechterkant van de vergelijkingen gelijk kan stellen, zou hij tot de oplossing gekomen zijn, zoals hieronder uitgewerkt.

94 + Simon – Nick = 90 + Nick – Simon
94 – 90 = 2 * Nick – 2 * Simon
4 = 2 * Nick – 2 * Simon → 2 = Nick – Simon
(Dus, het lengteverschil tussen Nick en Simon is 2 centimeter)

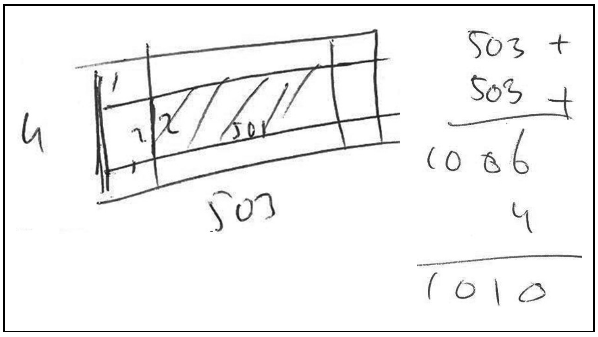
Als je dit in de tweede vergelijking invult, krijg je:

x = 90 + Nick – Simon, en vervolgens de hoogte van het podium, namelijk 90 + 2 = 92 cm.

In de laatste opgave die we hier bespreken speelt een legpuzzel een hoofdrol (fig.5).

Ali B

In de pauze van zijn optreden werkt Ali B aan een legpuzzel van 2012 stukjes. Die puzzel bestaat uit randstukjes en gewone stukjes. Uit hoeveel gewone stukjes bestaat de puzzel?



figuur 5

Slechts vijf studenten vonden bij deze opgave een correct antwoord. Wanneer we de opgave in de les bespreken, reageren studenten met: ‘Een puzzel is toch meer een vierkant in plaats van een rechthoek die lang en smal is (fig.5).’ Wellicht dat veel studenten door de voorstelling die zij hadden bij een puzzel in verwarring zijn gebracht en niet verder gingen. ‘Ik ben begonnen met 40 bij 50 stukjes. Dat zijn er 2000. Daarna 40 bij 51, dat zijn er 2040. Toen 39 bij 51, dat eindigt op een 9, dus dat kan ook niet. Vanwege de tijd, het duurde te lang om dit uit te zoeken, ben ik gestopt.’ Hier brengt de tekening de studenten op een verkeerd spoor. Dat komt wellicht omdat het hier feitelijk gaat om het ontbinden in priemfactoren. Studenten hanteren een schattende benadering om vandaar uit op zoek te gaan naar het juiste antwoord. Niemand komt erop dat de getallen moeten worden ontbonden.

Terugblik

Ons doel is dat studenten een wiskundige attitude ontwikkelen, zodat zij reken-wiskundeproblemen durven aan te pakken. Daarmee gaan zij, maar ook leerlingen op de basisschool, gemotiveerder aan de slag bij het oplossen van opgaven. Studenten zullen hierdoor ook inzien, zo verwachten wij, dat wiskunde overal aanwezig is en niet louter binnen de schoolsituatie. De opgaven in de voorronde zijn tot op zekere hoogte authentiek en daardoor daagt het studenten uit tot het aanpakken van het probleem. Freudenthal onderscheidt daarbij drie fasen: (Gravemeijer, 2005).

- De context vertalen naar het wiskundig probleem.
- Het oplossen van het probleem.
- Het mathematiseren (soms generaliseren) van de wiskundige bewerking.

Het vertalen van de context naar het probleem met wiskundige termen noemt hij horizontaal mathematiseren. Het oplossen van het probleem waarbij al dan niet gebruik wordt gemaakt van het generaliseren van wiskundige bewerkingen benoemt hij als verticaal mathematiseren. Beiden vormen de basis van het realistisch reken-wiskunde onderwijs.

De studenten die in de voorronde aan de slag zijn gegaan hebben herkenbare opgaven gekregen. Bij het verkennen van deze problemen maken zij - zo merkten we - niet altijd gebruik van een tekening om het probleem te verhelderen. Zij zijn soms zelfs niet in staat om het probleem uit de context te halen. Studenten komen dan niet toe aan het horizontaal mathematiseren. Anders gezegd, bij het horizontaal mathematiseren komen veel studenten in de problemen (Keijzer & De Vries , ingediend). Daar waar studenten wel gebruik maken van een tekening als ondersteuning van het oplossen van het probleem is de tekening in het algemeen ook functioneel om het probleem te generaliseren tot een algemeen geldende regel. Hier vindt wel incidenteel de stap naar het verticaal mathematiseren plaats.

Studenten willen binnen drie kwartier de opgaven zo goed mogelijk maken. Het scannen van de opgaven waarbij een selectie gemaakt wordt van eenvoudige en lastige problemen vindt plaats op basis van 'ik kan deze opgave wel snel en deze opgave niet snel' oplossen. Bij alle opgaven werd in de nabespreking duidelijk dat interactie er toe doet. Er werden verhelderende vragen gesteld, problemen werden bediscussieerd en mogelijke aanpakken verkend. Er vindt reflectie plaats op de eigen aanpakken (Eerde, Hajer, Koole & Prenger, 2002). De opgaven maken zo de eigen rekenontwikkeling zichtbaar en dragen bij aan het door ons beoogde realistische reken-wiskundeonderwijs in de stagepraktijk van de student.

In de werkgroep 'De kracht van visuele representaties' (Van Dam & Terlouw, 2012) op de opleidersdag in november 2011 krijgen twee groepjes leerlingen een context voorgelegd waarbij de ene groep een aanzet krijgt de het maken van een tekening uitlokt, terwijl de andere groep geen hulpmiddel krijgt en zelf mag kiezen of het een tekening maakt. Uit de telling van goede oplossingen van zwakke leerlingen blijkt dat er meer goede oplossingen zijn met tekening dan zonder tekening. Voor zwakke rekenaars is het effectief is als zij visuele representaties leren te maken om te helpen de som uit de context te halen. De studenten die aan de voorronde hebben meegedaan hebben nauwelijks tekeningetjes gemaakt. Is dit door gebrek aan tijd of kunnen zij dit niet? Daarbij blijkt het maken van een goede tekening die representatief is voor de opgave nogal wat problemen bij studenten oproept. En dat leidt onmiddellijk tot de volgende vraag: hoe kunnen wij studenten stimuleren meer gebruik te maken van tekeningen in het reken-wiskunde onderwijs, hen dus helpen bij het horizontaal mathematiseren.

Noot

1 De HBO-raad gaf bij de presentatie van de kennisbases aan dat de tijd die studenten besteden aan taal en rekenen omhoog moet naar gemiddeld vijf uur voor rekenen.

Literatuur

Dam, L. van & B. Terlouw (2012). Kennisbasis als fundament voor de opleiding - verslag Panama opleidersdag 11 november 2011 - *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, *31*(1), 23-27.

Eerde, D. van., M. Hajer, T. Koole & J. Prenger (2002). Betekenisconstructie in de wiskundeles. De samenhang tussen interactief wiskunde- en taalonderwijs. *Pedagogiek 22(2)*, 134-147.

Gravemeijer, K. (2005). Revisiting 'Mathematics education revisited'. *Freudenthal 100,* 106-113.

Keijzer, R. (2011). Toetsing kennisbasis. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, *30*(1) 16-25.

Keijzer, R. (2011). Tijd voor de kennisbasis reken-wiskunde. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 30*(3) 20-27.

Keijzer, R. & D. de Vries (ingediend). *Leren van de toetsing van de kennisbasis rekenen-wiskunde*.

10 voor de leraar (2012). *Toetsgids pabo Rekenen-wiskunde.* Opgehaald van: http://10voordeleraar.nl

Straetmans, G. (2005). Afrekenen op rekenen: over de rekenvaardigheid van pabo-studenten en de toetsing daarvan. *Tijdschrift voor hoger onderwijs*, *23*(3), 123-139.

Maak eens een tekeningetje

Gewichtige voetballers[1]

Jaap Stam, Klaas Jan Huntelaar, Dirk Kuyt en Robin van Persie moeten gewogen worden, maar eigenlijk willen ze voor elkaar niet weten hoe zwaar ze zijn.
Ze gaan daarom in groepjes van drie op de weegschaal staan.
Ze noteren de volgende weegresultaten:

245 kg, 253 kg, 252 kg en 261 kg.

Hoe zwaar is de zwaarste voetballer?

Probeer met een louter visuele representatie tot een oplossing te komen.

Noot

1 Deze opgave werd ontwikkeld door Marjolein Kool voor de voorronde van het Groot Bartjens rekendictee.