

Hoofdrekenen met papier

- hoe zit dat met leerlingen die cijferen? -

F. Scheltens,¹ M. Hickendorff,¹ Th.J.H.M. Eggen¹ & L.A. Hiddink¹
Cito Arnhem, Universiteit Leiden, Universiteit Twente

In dit artikel wordt gekeken naar de verschillen in strategiegebruik bij opgaven die bedoeld zijn om hoofdrekenvaardigheid te meten. Deze opgaven maken deel uit van het Periodiek Peilingsonderzoek van het Onderwijsniveau (PPON). Met de komst van de Centrale Eindtoets en de daarbij behorende Toetswijzercommissie is een uitspraak gedaan over hoe hoofdrekenen in die toets gemeten moet worden. Dit zal in tegenstelling tot de huidige situatie met papier zijn. Als gevolg hiervan zal de afnameconditie van hoofdrekenen in de komende peilingsonderzoeken ook gaan veranderen. Een mogelijke consequentie hiervan is de ongewenste mogelijkheid dat leerlingen bij hoofdrekenopgaven standaardalgoritmen gaan gebruiken. In dit onderzoek is gekeken naar het strategiegebruik op negentien opgaven die deel uit maken van de opgavenverzameling van PPON. Elke opgave is gemaakt door meer dan driehonderd leerlingen uit groep 8. Vervolgens is op basis van de uitwerking van de leerlingen in hun opgavenboekjes de strategie gecodeerd. De resultaten laten zien dat de verschillende strategieën - uit het hoofd, informeel schriftelijk en gestandaardiseerd schriftelijk - niet even vaak gebruikt worden bij de verschillende opgaven. De 'uit het hoofd rekenaanpak' wordt het meest gebruikt door de leerlingen, maar ook de gestandaardiseerde schriftelijke aanpak wordt op alle negentien opgaven toegepast. Tevens vonden we verschillen in percentage correct per strategie. Het gebruik van het standaardalgoritme is gemiddeld genomen het meest accuraat, echter er zijn verschillen tussen de accuratesse van de verschillende strategieën tussen opgaven.

1 Inleiding

Het Nederlandse reken-wiskundeonderwijs is sterk veranderd sinds de vroege jaren negentig van de twintigste eeuw (Heinze, Marschick & Lipowsky, 2009; Baroody & Dowker, 2003; Van den Heuvel-Panhuizen, 2001). Onder invloed van het realistisch rekenonderwijs veranderde de oriëntatie van cijfermatige naar getalsmatige strategieën. Daarmee nam de aandacht voor algoritmen - het cijferen - af en wordt er momenteel in het basisonderwijs steeds meer aandacht aan hoofdrekenen en schattend rekenen besteed. In figuur 1 staat globaal weergegeven in welke volgorde rekenstrategieën in de hoogste vier groepen van het basisonderwijs worden aangeboden.

Het toetsen van hoofdrekenvaardigheid in peilingsonderzoek

De veranderingen in het reken-wiskundeonderwijs hebben invloed op de manier waarop hoofdrekenen wordt getoetst, ook in peilingsonderzoek. Bij het opzetten van een peilingsonderzoek is een van de centrale methodologische vragen: wat willen we meten, en hoe meten we dat?

De 'Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau' (PPON) maakt, anders dan andere peilingsonderzoeken, zoals PISA (OECD, 2004) en TIMSS (Meelissen & Drent, 2011; Mullis, Martin & Foy, 2008) een onderscheid tussen het oplossen van rekenopgaven met en zonder het gebruik van kladpapier.

	groep 5	groep 6	groep 7	groep 8
optellen en aftrekken	– automatiseren – handig rekenen	– handig rekenen – kolomsgewijze aanpak – cijferen	– handig rekenen – cijferen (ook kommagetallen)	– hoofdrekenen – cijferen
vermenigvuldigen	– automatiseren – handig rekenen	– handig rekenen – kolomsgewijze aanpak	– handig rekenen – cijferen (ook kommagetallen)	– handig rekenen – cijferen (ook kommagetallen)
delen	– automatiseren	– handig rekenen	– handig rekenen – kolomsgewijze aanpak	– handig rekenen – kolomsgewijze aanpak (ook kommagetallen)

figuur 1: tijdspad voor onderwijs in rekenstrategieën in het basisonderwijs

Voordat het realistisch rekenonderwijs zijn intrede deed, gebruikten leerlingen als ze kladpapier mochten gebruiken vaak een (cijfer)algoritme om een opgave op te lossen. Als ze geen kladpapier beschikbaar hadden, stapten ze automatisch over op hoofdrekenen. Tegenwoordig zijn leerlingen meer geneigd om uit het hoofd te rekenen of handig rekenen toe te passen, ook als ze kladpapier mogen gebruiken (Van den Heuvel-Panhuizen, Robitzsch, Treffers & Köller, 2009; Hickendorff, Van Putten, Verhelst & Heiser, 2010).

Met de komst van het realistisch rekenonderwijs is niet alleen het leerlinggedrag zoals hierboven beschreven veranderd, maar ook de definitie van hoofdrekenen: vroeger was het 'rekenen in je hoofd', tegenwoordig is het 'rekenen met je hoofd'. Leerlingen hoeven niet per definitie uit het hoofd te rekenen, maar mogen ook kladpapier gebruiken voor het opschrijven van tussennotaties en/of hulpberekeningen (Verschaffel, Greer & De Corte, 2007).

Wat betekent deze verandering voor het meten van hoofdrekenvaardigheid? Als de nieuwe definitie van hoofdrekenen ook bij PPON wordt ingevoerd, betekent dit dat leerlingen ook bij het oplossen van deze opgaven, die ze voorheen zonder kladpapier moesten oplossen, nu kladpapier mogen gebruiken om tussennotaties en hulpberekeningen te maken.

Tot nu toe is de hoofdrekenvaardigheid bij PPON gemeten zonder kladpapier. Wanneer leerlingen kladpapier zouden mogen gebruiken is het namelijk niet meer mogelijk om door middel van dit onderzoek langetermijntrends op het gebied van hoofdrekenen te signaleren. Dat zou problematisch zijn, omdat het doen van betrouwbare langetermijnmetingen een van de belangrijkste doelen is van peilingsonderzoek (Hickendorff, Heiser, Van Putten & Verhelst, 2009). Het veranderen van de afnamecondities (met of zonder kladpapier) heeft grote gevolgen en om dit verantwoord te kunnen doen moeten eerst overbruggingsstudies worden uitgevoerd (Mazzeo & Von Davier, 2008). Een andere, meer praktische reden om in PPON hoofdrekenvaardigheid niet te meten met kladpapier is om te vermijden dat leerlingen het kladpapier gebruiken om een gestandaardiseerde schriftelijke strategie in te zetten, bijvoorbeeld een algoritme.

Met de komst van de Centrale Eindtoets en de daarbij behorende Toetswijzercommissie is een uitspraak gedaan over hoe hoofdrekenen in die toets getoetst moet worden: met papier. Wanneer dat de praktijk wordt, zal in het curriculum minder aandacht komen voor hoofdrekenen zonder het gebruik van papier. Aangezien in de meeste grootschalige peilingsonderzoeken de opbrengsten van het curriculum worden gemeten (Hickendorff en anderen, 2009), zal het onvermijdelijk zijn dat de afnamecondities voor hoofdrekenen in komende peilingsonderzoeken gaan veranderen. En dat betekent dat er een grote kans bestaat dat leerlingen bij peilingsonderzoek in het vervolg kladpapier mogen gebruiken om hulpbereke-

ningen en tussennotaties te maken bij het oplossen van opgaven die bedoeld zijn om hoofdrekenvaardigheid te meten.

Opgaven voor 'in je hoofd' en 'met je hoofd'

Om hoofdrekenvaardigheid goed te kunnen meten, zijn dus rekenopgaven nodig die onderscheid maken in de strategie die ze uitlokken: een hoofdrekenstrategie (rekenen *in* je hoofd, zonder gebruik van kladpapier) of een informele schriftelijke strategie (rekenen met je hoofd, met gebruik van kladpapier). De opgaven mogen echter geen gestandaardiseerde schriftelijke strategie uitlokken. Als leerlingen zo'n strategie toepassen voor het oplossen van opgaven die bedoeld zijn om hoofdrekenvaardigheid te meten, dan ondermijnt dat een valide meting. Voor het construeren van geschikte opgaven is dus empirische informatie nodig over de oplossingsstrategieën die leerlingen gebruiken.

Een eerste stap hiertoe is gezet in 2011 bij het peilingsonderzoek rekenen-wiskunde in groep 8. In dit onderzoek zijn hoofdrekenopgaven afgenomen waarbij leerlingen kladpapier mochten gebruiken, naast dezelfde opgaven in de standaard afnameconditie waarbij leerlingen geen kladpapier mochten gebruiken. Om leereffecten te vermijden kregen de leerlingen elke opgave maar in één afnameconditie aangeboden. De grootte van de steekproef en het design van het peilingsonderzoek maken het mogelijk de moeilijkheid van de opgaven in beide afnamecondities te vergelijken.

Het doel van het onderzoek waarvan we hier verslag doen is ten eerste: het vergelijken van de leerlingprestaties in de twee afnamecondities, met en zonder gebruik van kladpapier, en ten tweede: het analyseren van oplossingsstrategieën die leerlingen gebruiken om dit soort opgaven op te lossen en zicht krijgen op de validiteit van het meten van hoofdrekenen met gebruik van kladpapier.

2 Methode

Na het vaststellen van de moeilijkheid van de opgaven zijn voor negentien opgaven de oplossingsstrategieën geanalyseerd. Dat waren vanzelfsprekend allemaal opgaven waarbij kladpapier mocht worden gebruikt. De opgaven zijn geselecteerd op basis van de aanname dat ze hoofdrekenvaardigheid meten en vertegenwoordigen alle bewerkingen: optellen (drie opgaven), aftrekken (vijf opgaven), vermenigvuldigen (vier opgaven), delen (vijf opgaven) en samengestelde bewerkingen (twee opgaven). De opgaven zijn divers van aard: er zijn bijvoorbeeld opgaven met een context (veertien) en zonder context gebruikt (vijf), en opgaven met (zeven) en zonder decimalen (twaalf). De opgaven zijn weergegeven in bijlage A. Deze hoofdrekenopgaven zijn afgenomen als een

onderdeel van een incompleet verbonden design binnen PPON. Er waren vijftien verschillende subsets waarin deze opgaven voorkwamen. Dat betekent dat leerlingen elk een van de subsets met een deel van deze negentien opgaven maakten, samen met nog heel veel andere rekenopgaven. Deze subsets werden random toegewezen aan de leerlingen. Gemiddeld werd elke opgave door 323 leerlingen gemaakt ($SD = 16.5$). In totaal analyseerden we 6144 strategieën van 1152 leerlingen.

Indeling van strategieën in categorieën

Op basis van de aantekeningen die leerlingen maakten in het toetsboekje is hun oplossingsstrategie gecodeerd. Het coderingsschema staat in bijlage B. De categorieën uit dit schema hebben we samengevoegd tot drie hoofdcategorieën. Deze indeling is gemaakt omdat het voor het beantwoorden van onze onderzoeksvraag noodzakelijk was om te weten te komen of een leerling een hoofdrekenstrategie gebruikte of een (cijfer)algoritme.

Opgave 21
In groep 8 zitten 29 kinderen.
Elise legt voor elk kind 6 schriften klaar.
Hoeveel schriften legt juf Elise in totaal klaar?

174 schriften

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times 6 \\ \hline 174 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \times 9 = 54 \\ 10 \times 9 = 90 \\ \hline 126 \end{array}$$

Opgave 21
In groep 8 zitten 29 kinderen.
Elise legt voor elk kind 6 schriften klaar.
Hoeveel schriften legt juf Elise in totaal klaar?

174 schriften

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times 6 \\ \hline 174 \end{array}$$

figuur 2: voorbeelden van de gestandaardiseerde aanpak, cijferend en kolomsgewijs

Opgave 21
De oma van Martin spaart elke maand 7 euro voor hem.
Er staat nu al € 364,- op de spaarrekening van Martin.
Hoeveel maanden spaart de oma van Martin al?

52 maanden

$$\begin{array}{r} 7 \ 14 \ 21 \ 28 \ 35 \\ 42 \ 49 \ 56 \ 63 \ 70 \end{array}$$

figuur 3: voorbeeld van informele schriftelijke strategie

De drie hoofdcategorieën zijn gebaseerd op de classificatie van Selter (2001). Het gaat om:

- 1 de (uit het) hoofdrekenstrategie (zonder aantekeningen);

- 2 de informele schriftelijke strategie (met behulp van tussennotaties en hulpberekeningen);
- 3 de gestandaardiseerde schriftelijke strategie (cijferalgoritmen en kolomsgewijze aanpak) (fig.2 en 3).

De keuze om de kolomsgewijze aanpak onder te brengen in dezelfde categorie als het cijferalgoritme is bediscussieerbaar. Wanneer we naar de definitie van Verschaffel en anderen (2007) kijken, betekent hoofdrekenen: met getallen werken en niet met cijfers. De kolomsgewijze aanpak is gebaseerd op getallen en zou daarom een informele schriftelijke strategie genoemd kunnen worden. Dit zou betekenen dat de kolomsgewijze aanpak niet ondergebracht kan worden in de categorie gestandaardiseerde schriftelijke strategie, zoals in dit onderzoek is gedaan. Aan de andere kant karakteriseren Verschaffel en anderen een hoofdrekenaanpak als: de afwezigheid van een duidelijk gedefinieerd progressief schema. De kolomsgewijze aanpak voldoet niet aan dit aspect van de definitie van hoofdrekenen en is daarmee in onze opinie ook niet op zijn plaats in de categorie informele schriftelijke strategie. Dit wordt ondersteund door het feit dat de kolomsgewijze aanpak in het Nederlandse rekenonderwijs wordt gebruikt als een voorfase voor het aanleren van het cijferalgoritme (Van den Heuvel-Panhuizen en anderen, 2009) bij optellen, aftrekken en vermenigvuldigen. Bij delen is deze aanpak op de meeste scholen het eindstation: het cijferalgoritme voor delen (staartdeling) wordt op veel scholen niet aangeboden (Scheltens, Vermeulen & Hemker, 2013). Daarmee is de kolomsgewijze aanpak, net als het algoritme, een gestandaardiseerde strategie, hoewel hij meer vrijheid biedt in de manier waarop hij wordt ingezet. Omdat dit onderzoek zich richt op de wijze waarop hoofdrekenvaardigheid gemeten wordt, hebben we op basis van bovenstaande argumenten besloten de kolomsgewijze aanpak op te nemen in de categorie van gestandaardiseerde schriftelijke strategieën, naast het cijferalgoritme.

Itemkarakteristieken en percentage correct

Per opgave is het percentage goed berekend van de opgaven met en zonder gebruik van kladpapier. Daarnaast is berekend welk percentage leerlingen de verschillende oplossingsstrategieën toegepast heeft. Vervolgens zijn de meest karakteristieke opgaven geselecteerd. Het gaat dan om opgaven waarbij leerlingen meer dan gemiddeld een gestandaardiseerde schriftelijke strategie hebben gebruikt (dus: geen hoofdrekenopgaven) of waarbij ze juist meer dan gemiddeld informele schriftelijke en hoofdrekenstrategieën hebben toegepast (typische hoofdrekenopgaven). De itemkarakteristieken van deze opgaven zijn vervolgens geanalyseerd. Daarnaast is gekeken naar het percentage correct van de verschillende oplossingsstrategieën en naar verschillen tussen jongens en meisjes.

3 Resultaten

Effect van het gebruik van kladpapier op de moeilijkheid van opgaven

De resultaten van de vergelijking van de moeilijkheid van opgaven in de condities met en zonder kladpapier staan weergegeven in figuur 4. Over het algemeen zijn de opgaven bijna even moeilijk in beide afnamecondities, maar er zijn wel veel verschillen tussen opgaven (range – .13- tot +.15, gemiddelde +.04). Acht opgaven zijn moeilijker en negen makkelijker als leerlingen kladpapier mogen gebruiken.

proportie correct			
	met kladpapier	zonder kladpapier	verschil
opt1	.56	.67	–.11
opt2	.75	.78	–.03
opt3	.82	.83	.01
aft1	.77	.73	.04
aft2	.64	.52	.12
aft3	.45	.48	–.03
aft4	.73	.58	.15
aft5	.71	.59	.12
verm1	.31	.28	.03
verm2	.71	.59	.11
verm3	.76	.72	.04
verm4	.78	.79	–.01
del1	.29	.42	–.13
del2	.59	.59	–.01
del3	.63	.56	.07
del4	.83	.77	.07
del5	.60	.63	–.03
comb1	.90	.83	.07
comb2	.64	.67	–.03
gemiddeld	.67	.63	.04

figuur 4: proportie correct bij opgaven met en zonder kladpapier

We hebben hierbij geen specifiek patroon gevonden. Deze vergelijking wordt bemoeilijkt doordat we verschillende leerlingen vergelijken, die niet noodzakelijkerwijs dezelfde rekenvaardigheid hebben.

Hierna bespreken we de resultaten met betrekking tot de frequentie van strategiegebruik bij de verschillende opgaven, de rekenresultaten van leerlingen die deze strategieën gebruiken (percentage correct) en de relatie tussen de bewerking en de gebruikte strategie in de conditie: met kladpapier.

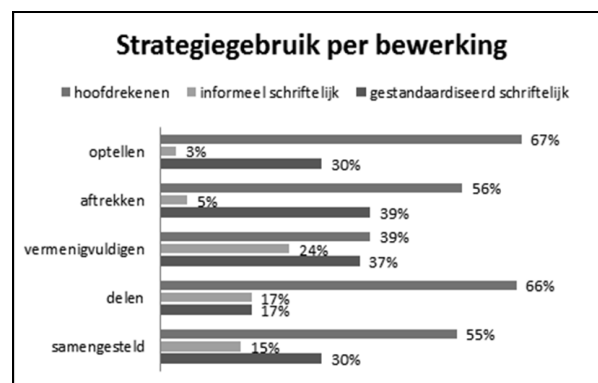
Strategiegebruik bij afname met kladpapier

De ‘uit het hoofd rekenstrategie’ wordt door leerlingen het meest gebruikt (range tussen de opgaven 20 tot 84 procent, gemiddeld 52 procent). Bij zestien van de negentien opgaven was dit de meest gebruikte aanpak, terwijl de gestandaardiseerde schriftelijke strategie bij de overige drie opgaven het meest voorkwam (range 5 tot 63

procent, gemiddeld 29 procent). De informele schriftelijke strategie gebruiken leerlingen het minst (range 1 tot 29 procent, gemiddeld 12 procent).

Strategiegebruik per bewerking

Ook vinden we verschillen in strategiegebruik bij de verschillende bewerkingen (fig.2). Bij alle vijf bewerkingen (optellen, aftrekken, delen, vermenigvuldigen en samengestelde bewerkingen) is de hoofdrekenstrategie de meest gebruikte (range 39 tot 67 procent), en de informele schriftelijke strategie de minst gebruikte strategie (range 3 tot 15 procent).



figuur 5: strategiegebruik per bewerking

Percentage correct per strategie

De mate waarin een strategie succesvol is, verschilt per opgave (fig.6). Gemiddeld presteren leerlingen het best met de gestandaardiseerde schriftelijke strategie (proportie correct range .10 - .97, gemiddeld .72). Bij twaalf opgaven is dit de strategie die de meeste goede antwoorden oplevert. Gemiddeld maken leerlingen de meeste fouten bij het gebruik van de informele schriftelijke strategie (proportie correct range .23 - .94, gemiddeld .63), maar toch is het bij vier opgaven wel de meest succesvolle strategie. Bij de overige drie opgaven maken de leerlingen die een (uit het) hoofdrekenstrategie toepassen de minste fouten (proportie correct range .29 - .91, gemiddeld .68). Voor elke opgave is een Chi-kwadraat-test uitgevoerd om het verband tussen strategiegebruik en het aantal leerlingen met een correct antwoord te bepalen. Bij dertien van de negentien opgaven is er een significant verband, wat betekent dat de proportie correct van de verschillende strategieën verschilt. Bij deze opgaven hangt de kans op het correct maken van deze opgave af van welke strategie je gebruikt. Echter: de verschillen tussen de strategieën zijn niet hetzelfde bij elke opgave.

Karakteristieke opgaven per strategie

Bij een diepte-analyse van de opgaven in relatie tot het strategiegebruik, maakten we een onderscheid in drie typen opgaven.

	Strategiegebruik					Proportie correct per strategie					Significante chi-kwadratoets
	Hoofdrekenen	Informeel schriftelijk	Gestandaardiseerd schriftelijk	Misconcep-tie	Missing	Hoofdrekenen	Informeel schriftelijk	Gestandaardiseerd schriftelijk	Significante chi-kwadratoets		
Opt1	80	2	7	0	11	.62	.29	.82		*	
Opt2	48	2	39	0	11	.76	.60	.97		*	
Opt3	55	4	37	0	4	.80	.80	.93		*	
Aft1	61	4	31	0	4	.81	.77	.80			
Aft2	50	11	32	2	4	.69	.54	.71		*	
Aft3	84	4	8	0	4	.44	.67	.70		*	
Aft4	29	1	63	0	7	.74	.50	.81			
Aft5	36	3	53	0	8	.74	.38	.82		*	
Verm1	20	14	42	2	23	.45	.23	.30		*	
Verm2	40	23	33	0	3	.68	.79	.78	**		
Verm3	43	21	33	0	3	.73	.80	.87		*	
Verm4	41	29	29	0	1	.75	.83	.80			
Del1	61	25	7	1	6	.29	.43	.10		*	
Del2	70	17	8	0	5	.62	.67	.52			
Del3	45	19	26	0	10	.60	.69	.87		*	
Del4	51	11	32	0	6	.84	.94	.94		*	
Del5	77	7	5	0	11	.73	.35	.31		*	
Comb1	43	21	34	0	2	.91	.89	.94			
Comb2	61	9	23	0	6	.65	.83	.71			
Mean	52	12	29	0	7	.68	.63	.72			

* 5 procentsniveau; ** 10 procentsniveau

figuur 6: percentage gebruikte strategieën en proportie correct per opgave

- opgaven die meer dan één *SD* boven het gemiddelde het gebruik van de gestandaardiseerde schriftelijke aanpak en meer dan één *SD* onder het gemiddelde het gebruik van de informeel schriftelijke en/of hoofdrekenaanpak uitlokken;
- opgaven die meer dan één *SD* boven het gemiddelde het gebruik van de informeel schriftelijke en/of hoofdrekenaanpak en meer dan één *SD* onder het gemiddelde het gebruik van de gestandaardiseerde schriftelijke aanpak uitlokken;
- opgaven waarbij zowel 1 als 2 niet van toepassing zijn.

Opgaven van type 1 noemen we karakteristieke algoritme-opgaven en opgaven van type 2 noemen we karakteristieke hoofdrekenopgaven.

Twee opgaven zijn typische algoritme-opgaven. Dit zijn allebei contextloze aftrekopgaven: $1\,630\,000 - 860\,000 =$ (aft4) en $1873 - 998 =$ (aft5). Opmerkelijk genoeg is het bij beide opgaven mogelijk een handige aanpak te gebruiken. Bij de eerste opgave kunnen leerlingen rekenen zonder nullen en een rijgstrategie gebruiken. Bij de tweede opgave dient de handige aanpak zich nog nadrukkelijker aan: daar kunnen leerlingen een compensatiestrategie gebruiken door 998 af te ronden naar 1000. In figuur 4 is te zien dat beide opgaven moeilijker zijn zonder het gebruik van papier. Dit impliceert dat leerlingen deze opgaven beter maken, wanneer ze kladpapier gebruiken om ze op te lossen.

Vier opgaven zijn typische hoofdrekenopgaven. Drie

daarvan zijn deelopgaven (del1, del2, del5) en één is een aftrekopgave (aft3). Dit zijn allemaal opgaven met decimalen. Opvallend is dat de andere drie opgaven met decimalen (optellen en vermenigvuldigen) onder type 3 vallen. Twee van de typische hoofdrekenopgaven lijken erg op elkaar. Leerlingen moeten berekenen hoeveel jassen kunnen worden gemaakt van 50 meter stof, als er voor één jas 2,40 meter nodig is (del2). Bij de andere opgave moeten ze uitrekenen hoeveel boeken van € 2,35 kunnen worden gekocht met 25 en 50 euro (del1). Na het uitrekenen moeten de leerlingen ook beredeneren wat het goede antwoord is.

Het boekenprobleem is minder moeilijk zonder kladpapier; bij het jassenprobleem vinden we geen substantieel verschil tussen de twee afnamecondities. De derde deelopgave van het type 'hoofdrekenopgave' is een contextloze opgave: $52,7 \div 100 =$ (del5). De meeste gebruikelijke strategie is de komma twee posities naar links verplaatsen. In de aftrekopgave moeten leerlingen uitrekenen hoeveel seconden de ene schaatser (38,6 seconden) sneller is dan de andere (39,06 seconden) (aft3). De moeilijkheid van deze opgave zit hem in het aantal decimalen en het gebruik van decimalen in een context van tijd. Uit figuur 4 blijkt dat er geen substantieel verschil in moeilijkheid is tussen de afnamecondities bij de derde deelopgave ($52,7 \div 100 =$ (del5)) en de aftrekopgave (verschil tussen tijden van twee schaatsters berekenen (aft3)). Dit is te verwachten aangezien in beide condities met name 'in' het hoofd wordt gerekend.

Verschillen tussen jongens en meisjes

Bij acht opgaven is er een significant verschil tussen de prestaties van jongens en van meisjes (drie opgaven worden door meisjes beter gemaakt, vijf opgaven door jongens). Gemiddeld genomen gebruiken meisjes twee keer zo vaak de gestandaardiseerde schriftelijke strategie als jongens (39 versus 19 procent). De informele schriftelijke strategie wordt meer gebruikt door meisjes dan door jongens (15 versus 9 procent). Jongens gebruiken daarentegen de hoofdreenstrategie meer (66 versus 40 procent). Twee van de vier hoofdreenopgaven (type 2) maken jongens beter (del1 en del2) en op een van de twee karakteristieke ‘algoritme-opgaven’ (type 1) presteren meisjes beter. Bij de andere karakteristieke opgaven vonden we geen verschillen.

4 Conclusie en discussie

Invloed van kladpapier op strategiegebruik

De afnameconditie (met of zonder kladpapier) heeft een grote invloed op het strategiegebruik van leerlingen. Echter, de gemiddelde moeilijkheidsgraad over alle opgaven verandert niet substantieel door een andere afnameconditie. Sommige opgaven zijn moeilijker met het gebruik van kladpapier, en omgekeerd. Daarbij hebben wij geen specifiek patroon gevonden.

Wanneer leerlingen kladpapier mogen gebruiken, zien we grote verschillen in strategiegebruik tussen de negentien opgaven. Zoals we verwachtten, wordt de hoofdreenstrategie gemiddeld genomen het meest gebruikt. Niettemin gebruiken leerlingen bij alle opgaven ook de gestandaardiseerde schriftelijke strategie; bij drie opgaven was dit zelfs de meest toegepaste strategie. Opvallend genoeg was er bij de meeste karakteristieke algoritme-opgaven (opgaven waarbij leerlingen meer dan gemiddeld een gestandaardiseerde schriftelijke strategie gebruiken) een handige aanpak mogelijk. Daaruit kunnen we afleiden dat leerlingen weinig gebruikmaken van de handige aanpak, ook al is die goed in te zetten bij het oplossen van een opgave.

Bijvoorbeeld: $106 \times 96 - 6 \times 96 = \dots$ (verm1) kan worden uitgerekend als: 100×96 , maar slechts 34 procent van de leerlingen gebruikt bij deze opgave een hoofdreen- of informele schriftelijke strategie, terwijl 42 procent een gestandaardiseerde schriftelijke strategie gebruikt om deze opgave op te lossen. We kunnen hieruit concluderen dat de opgaven uit dit onderzoek niet uitsluitend hoofdreenvaardigheid meten wanneer het gebruik van kladpapier toegestaan is. Echter, wanneer de opgaven zonder gebruik van kladpapier getoetst worden, is het niet mogelijk om een informele schriftelijke strategie te gebruiken. De hoofdreenvaardigheid kan hierbij niet in de volle

breedte gemeten worden. Als gevolg hiervan wordt de validiteit van de toets ondermijnd wanneer bij het toetsen van hoofdreen gebruik van kladpapier is toegestaan, maar ook wanneer het gebruik van kladpapier niet toegestaan is.

Factoren die strategiegebruik beïnvloeden

In dit onderzoek zien we verschillen in de mate waarin strategieën leiden tot een correct antwoord. Gemiddeld presteren leerlingen het best als ze een gestandaardiseerde schriftelijke strategie gebruiken, maar dit verschilt wel substantieel per opgave. Dit zijn relevante bevindingen om mee te nemen bij de constructie van nieuwe opgaven die bedoeld zijn om hoofdreenvaardigheid te meten. Er moet tijdens de constructie goed nagedacht worden over de getalskenmerken in de opgaven. Daarnaast is het aan te raden om opgaven eerst voor te leggen aan leerlingen en hierbij het spontane strategiegebruik te observeren. Dit om te voorkomen dat opgaven die in een toets ingezet worden om hoofdreenvaardigheid te meten, een andere vaardigheid meten.

Bovendien is er voor het onderwijs een belangrijke les te leren uit deze resultaten. Een groot deel van de leerlingen is geneigd uit het hoofd te rekenen. Wanneer leerlingen de opgave niet uit het hoofd uitrekenen zijn ze geneigd een gestandaardiseerde schriftelijke strategie te gebruiken in plaats van een informeel schriftelijke strategie, zelfs wanneer het voor het oplossen van de opgave niet de meest voor de hand liggende strategie is. Dit komt overeen met bevindingen van Selter (2001) en van Lucangeli, Tressoldi, Bendotti, Bonanomi & Siegel (2003).

Opmerkelijk is dat alle vier de opgaven waarbij leerlingen minder dan gemiddeld de gestandaardiseerde schriftelijke strategie gebruiken (karakteristieke ‘hoofdreenopgaven’) opgaven met decimalen zijn. Daarnaast zijn drie van die vier opgaven deelopgaven. Dit zou te verklaren kunnen zijn door het feit dat delen met decimale getallen pas in groep 8 wordt aangeboden, een jaar later dan optellen, aftrekken en vermenigvuldigen met decimalen. Daardoor vallen leerlingen bij het delen met decimalen waarschijnlijk snel terug op informele strategieën. Ook dit werd eerder door Selter (2001) en Lucangeli, en anderen (2003) gerapporteerd.

Deze verschillen in strategiegebruik tussen opgaven laten zien dat leerlingen hun strategie aanpassen aan de karakteristieken van de opgave, zoals ook blijkt uit ander onderzoek (Barouillet, Mignon & Thevenot, 2008; Siegler & Lemaire, 1997; Torbeyns, Arnaud, Lemaire & Verschaffel, 2004).

Echter, naast itemkenmerken spelen ook leerlingkenmerken, zoals geslacht, een rol bij de keuze van de gebruikte strategie; meisjes hebben een grotere voorkeur voor gestandaardiseerde schriftelijke strategieën dan jongens, zoals ook blijkt uit onderzoek van Hickendorff en anderen (2010), Carr en Jessup (1997), Fennema, Car-

penter, Jacobs, Franke en Levi (1998). Meisjes zijn, meer dan jongens, geneigd een gestandaardiseerde schriftelijke strategie te gebruiken bij een hoofdrekenoets waarbij ze kladpapier mogen gebruiken. Dat bewijst dat niet alleen controleerbare factoren als itemkarakteristieken en afnamecondities, maar ook individuele verschillen een rol spelen bij de valide meting van hoofdrekenvaardigheid. Een beperking in dit onderzoek is dat er geen onderscheid gemaakt is tussen goede en zwakke rekenaars. Dit is een aanbeveling voor vervolgonderzoek.

5 Slot

Na dit geconcludeerd te hebben, blijft de vraag over hoe hoofdrekenen op een valide manier gemeten kan worden, wanneer we de definitie uit de inleiding van dit artikel hanteren: hoofdrekenen is rekenen met het hoofd, en leerlingen mogen dan ook kladpapier gebruiken voor het opschrijven van hulpberekeningen en tussennotaties. De meeste opgaven die in dit onderzoek zijn afgenomen blijken minder geschikt voor dit doel. Veel leerlingen gebruikten immers een gestandaardiseerde schriftelijke strategie voor het oplossen van de hoofdrekenopgaven. Uit onderzoek van Heinze en anderen (2009) blijkt dat een gestandaardiseerde of een schriftelijke strategie zeer beperkt gebruikt wordt bij opgaven van het type $3n + 3n$ (bijvoorbeeld $459 + 373 =$ of $167 + 167 =$). De opgaven die in dit onderzoek gepresenteerd worden, zijn verschillend qua complexiteit. Het is mogelijk dat de complexiteit van een deel van de opgaven een groot beroep doet op de cognitieve capaciteiten van de leerlingen, waardoor een hoofdrekenstrategie minder voor de hand ligt. De uitdaging bij het beantwoorden van de vraag hoe hoofdrekenen valide gemeten kan worden is dan ook, zoals ook Porter (2006) stelt, het vinden van de balans tussen de inhoud en de cognitieve belasting. Wellicht moeten opgaven die hoofdrekenen meten minder complex van aard zijn dan de opgaven die in dit onderzoek meegenomen zijn. Om uitspraken te kunnen doen over wat voor type opgaven leerlingen met het gebruik van hoofdrekenstrategieën op kunnen lossen is verder onderzoek nodig naar welke item- en leerlingkenmerken hierop van invloed zijn.

Noot

- 1 F. Scheltens en L.A. Hiddink zijn werkzaam bij Cito in Arnhem, M. Hickendorff is werkzaam aan de Universiteit Leiden, Th. J.H.M. Eggen is werkzaam bij Cito en aan de Universiteit Twente.

Literatuur

Baroody, A.J. & A. Dowker (Eds.) (2003). *The development of arithmetic concept and skills: Constructing adaptive exper-*

- tise*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Barouillet, P., M. Mignon & C. Thevenot (2008). Strategies in subtraction problem solving in children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 99, 233-251.
- Carr, M. & D.L. Jessup (1997). Gender differences in first grade mathematics strategy use: Social and metacognitive influences in mathematic competency. *Journal of Educational Psychology*, 89, 318 - 328.
- Fennema, E., T.P. Carpenter, V.R. Jacobs, M.L.L. Franke & L.W. Levi (1998). A Longitudinal Study of Gender Differences in Young Children's Mathematical Thinking. *Educational Researcher*, 27(5), 6-11.
- Heinze, A., F. Marschick & F. Lipowsky (2009). Addition and subtraction of three-digit numbers: adaptive strategy use and the influence of instruction in German third grade. *ZDM Mathematics Education*, 41, 591-604.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den (2001). Realistic mathematics education in the Netherlands. In: J. Anghileri (Ed.). *Principles and practices in arithmetic teaching*. Buckingham: Open University Press, 49-64.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den, A. Robitzsch, A. Treffers & O. Köller (2009). Large-scale assessment of change in student achievement: Dutch primary school students' results on written division in 1997 and 2004 as an example. *Psychometrika*, 74, 351-365.
- Hickendorff, M., C.M. van Putten, N.D. Verhelst & W.J. Heiser (2010). Individual Differences in Strategy Use on Division Problems: Mental Versus Written Computation. *Journal of Educational Psychology*, 102(2), 438-452.
- Hickendorff, M., W.J. Heiser, C.M. van Putten & N.D. Verhelst (2009). How to measure and explain achievement change in large-scale assessments: a rejoinder. *Psychometrika*, 74, 367-374.
- Lucangeli, D., P.E. Tressoldi, M. Bendotti, M. Bonami & L. Siegel (2003). Effective Strategies for Mental and Written Arithmetic Calculation from the Third to Fifth Grade. *Educational Psychology*, 23, 507-520.
- Mazzeo, J. & M. von Davier (2008). *Review of the Programme for International Student Assessment (PISA) test design: Recommendations for fostering stability in Assessment results*. Paris: OECD Education Working Papers (EDU/PISA/GB(2008)28).
- Meelissen, M.R.M., M. Drent & R.A. Punter (2012). *TIMSS-2011 Nederland. Trends in leerprestaties in exacte vakken van het basisonderwijs*. Enschede: Twente University.
- Mullis, I.V.S., M.O. Martin & P. Foy (2008). *TIMSS 2007 international mathematics report. Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the fourth and fifth grades*. Boston: Boston College TIMSS & PIRLS International Study Center.
- Porter, A.C. (2006). Curriculum assessment. In: J.L. Green, G. Camilli & P.B. Elmore (Eds.). *Handbook of complementary methods in education research*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 141-160.
- OECD (2004). *Learning for tomorrow's world. First results from PISA 2003*. Paris: OECD.
- Scheltens, F., B. Hemker & J. Vermeulen (2013). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 5*. Arnhem: Cito.
- Selter, C. (2001). Addition and subtraction of three-digit numbers: German elementary children's success, methods and strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 145-173.
- Siegler, R.S. & P. Lemaire (1997). Older and younger adults'

strategy choices in multiplication: Testing predictions of ASCM using the choice/no choice method. *Journal of Experimental Psychology: General*, 126(1), 71-92.

Torbeyns, J., L. Arnaud, P. Lemaire & L. Verschaffel (2004). Cognitive change as strategic change. In: A. Demetriou & A. Raftopoulos (Eds.). *Cognitive developmental change: Theories, models and measurement*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 186-216.

Verschaffel, L., B. Greer & E. De Corte, (2007). Whole number concepts and operations. In F.K. Lester (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Greenwich, CT: Information Age Publishing, 559-565.

The current article presents a first exploration with respect to differences in strategy use on problems that are intended to measure mental arithmetic competence in a large-scale national assessment in the Netherlands. This study is necessitated by a recent re-definition from the Dutch government of what is mental arithmetic: changing from calculating in the head to calculating with the head, i.e. allowing the use of scrap paper. A consequence of this re-definition, however, is that it opens the undesired possibility that students use written standard strategies. In the current study, strategy use on nineteen mental arithmetic problems that were administered as a part of an incomplete linked design in the National Assessment (PPON) is investigated. Each problem was solved by over three hundred Dutch sixth graders. Subsequently, the strategy they used was coded, based on their written work in the test booklets. Findings show the different strategies (written standard, written informal and mental) are not used equally frequently on the different problems. Although the mental strategy is used most frequently, nevertheless for all nineteen problems the standard written strategy is used too. We found differences in accuracy of the different strategies: on average the written standard strategy is the most accurate, but there were differences between problems in the relative accuracies of the strategies too.

Bijlage A

Optelopgaven

Opt1

Wielrenner Pedro legt met één omwenteling van de pedalen 5,50 meter af.

Gert-Jan legt met één omwenteling 0,57 meter meer af.

Hoeveel meter legt Gert-Jan met één omwenteling af?

_____ meter

Opt2



De woning van de familie Holger wordt uitgebreid.

De woning heeft nu een oppervlakte van 162 m^2 .

Er komt 72 m^2 bij.

Hoeveel m^2 is de oppervlakte van de woning dan?

_____ m^2

Opt3

$645 + 565 =$ _____

Aftrekopgaven

Aft1

Vroeger bouwde men vaak vele eeuwen over een kerk. In de stad Maesdrecht kwam in 1662 de kerk klaar. Men was in 998 met de bouw van de kerk begonnen.

Hoeveel jaar heeft men over deze kerk gebouwd?

_____ jaar

Aft2

Moeder nam de meterstand van het gas op aan het begin en het eind van het jaar.

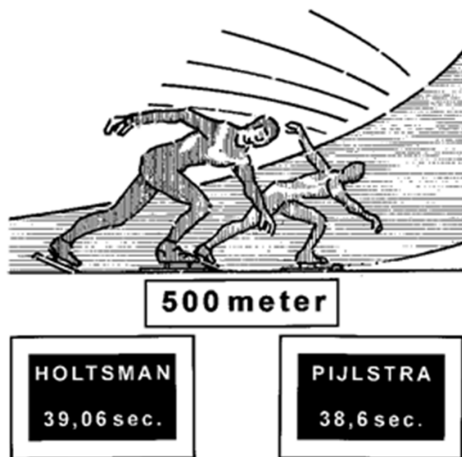
– stand aan het begin: 6375 m^3

– stand aan het eind: 9500 m^3

Hoeveel m^3 gas werd er verbruikt?

_____ m^3

Aft3



Pijlstra reed sneller dan Holtsman.
Hoeveel seconden sneller?
_____ seconden sneller

Aft4

$$1\,630\,000 - 860\,000 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Aft5

$$1873 - 998 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Vermenigvuldigopgaven

Verm1

$$106 \times 96 - 6 \times 96 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Verm2

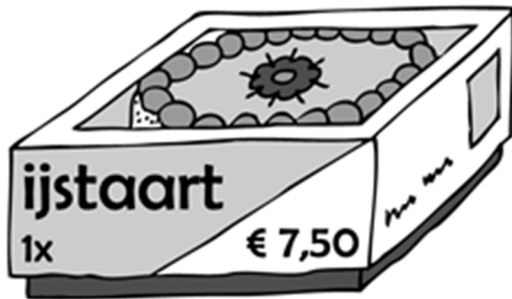


Inschrijfgeld € 2.25

Tachtig kinderen doen mee aan een trimloop in het park.
Hoeveel euro inschrijfgeld heeft de organisatie in totaal ontvangen?
_____ €

Verm3

In groep 8 zitten 29 kinderen. Juf Elise legt voor elk kind 6 schriften klaar.
Hoeveel schriften legt juf Elise in totaal klaar?
_____ schriften

Verm4

Meester Bart koopt 12 ijstaarten.
Hoeveel euro moet hij betalen?

Deelopgaven**Del1****Boeken in de uitverkoop.**

€ 2,35 per stuk.

Hoeveel van deze boeken kun je kopen als je € 25,- hebt?

_____ boeken

En hoeveel van deze boeken kun je kopen als je € 50,- hebt?

_____ boeken

Del2

Een mode-ontwerper koopt 50 m stof.

Voor één jas gebruikt hij 2,40 m stof.

Hoeveel jassen kan hij in totaal maken?

_____ jassen

Del3

De oma van Martin spaart elke maand 7 euro voor hem.

Er staat nu al € 364,- op de spaarrekening van Martin.

Hoeveel maanden spaart de oma van Martin al?

_____ maanden

Del4

$$217 : 7 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Del5

$$52,7 : 100 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Samengestelde opgaven

Comb1

Fiets 4 daagse km per dag	
maandag	65 km
dinsdag	115 km
woensdag	65 km
donderdag	115 km

Joris doet mee met de fiets-4-daagse.

Hoeveel km in totaal fietst Joris met de fiets-4-daagse?

_____ km

Comb2

De supporters van de handbalvereniging gaan mee met de uit-wedstrijd. Er zijn 4 bussen gehuurd.

– 2 voor 55 personen,

– 1 voor 45 personen, en

– 1 voor 25 personen.

Hoeveel supporters kunnen in deze 4 bussen samen?

_____ supporters

Bijlage B

