



Een learning study voor het verbeteren van het onderwijs in rekendidactiek aan een lerarenopleiding¹

J. van Bommel
Karlstads universitet, Zweden

Dit artikel beschrijft een studie met als doel: het verbeteren van onderwijzen van rekendidactiek. Gedurende drie lessen werd in een module rekendidactiek een Learning Study uitgevoerd, waarbij de lessen systematisch geanalyseerd werden met behulp van variatietheorie. Vijf onderdelen van Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) vormden het leerobject en voor dit leerobject werden vier kritische aspecten gevonden. Het kunnen formuleren van doelen voor een les, gedetailleerde beschrijvingen kunnen geven van onderdelen in een lesvoorbereiding, een adequate wiskundige kennis bezitten en een rol kunnen aannemen als rekenleerkracht, blijken noodzakelijk om het leren van MKT mogelijk te maken.

1 Inleiding

Stel je voor dat je lesgeeft over getalbegrip. Je wilt dat je leerlingen geschikte strategieën kiezen om opdrachten als $26 + 7$ of $55 + 9$ op te lossen. Welke manieren van aanpak kun je van je leerlingen verwachten? Zijn er modellen of voorbeelden die je juist wel of niet zou gebruiken? Hoe kun je ervoor zorgen dat leerlingen de overgang kunnen maken van tellen naar een meer gevorderde strategie? Beschrijf je lesplan.

Een lerarenopleider kan bovenstaande opdracht aan zijn of haar studenten voorleggen. Om antwoord te kunnen geven op de vragen uit deze opdracht heeft een student een bepaald type kennis nodig. Deze kennis is niet puur gericht op rekenen of op pedagogiek, maar is vakdidactisch, in dit geval reken-didactisch. Vakdidactische kennis van de leraar is van belang voor het leerproces van leerlingen. Verder heeft vakdidactische kennis van een leerkracht een positief effect op de resultaten van leerlingen (Darling-Hammond, 2000; Grossman, 2010; Nye, Konstantopoulos & Hedges, 2004; Sanders, Saxton & Horn, 1997). Hoe vakdidactische kennis door leerkrachten geleerd kan worden, is bijvoorbeeld door Oonk (2009) onderzocht, maar dit type onderzoek is voornamelijk schaars. Uit die schaarste aan onderzoek ontstaat de vraag: Welke (vak)didactische kennis hebben we wat betreft rekendidactiek?

Aanleiding voor het onderzoek dat in dit artikel wordt beschreven, was de behoefte van lerarenopleiders om hun opleidingsonderwijs in rekendidactiek te verbeteren. Zij signaleerden het probleem dat studenten na een module rekendidactiek wel de verschillende aspecten ervan konden beschrijven, maar dat de coherentie tussen deze

aspecten grotendeels achterwege bleef. Eén student beschreef bijvoorbeeld nauwkeurig welke materialen er voor het opbouwen van getalbegrip beschikbaar waren. Ook kon deze student nauwkeurig veelgemaakte denkfouten van kinderen beschrijven. Echter, wanneer gevraagd werd welk materiaal passend zou zijn om een bepaalde leerling met een specifieke denkfout te helpen, dan kon de student deze link niet leggen. De student kon dus wel de verschillende aspecten (materiaal en denkfouten) beschrijven, maar kon deze niet met elkaar verbinden. Er was, met ander woorden, geen coherentie tussen de verschillende aspecten.

Om aandacht te kunnen vestigen op de coherentie besloten de lerarenopleiders om nadruk te leggen op enkele aspecten van de rekendidactiek, namelijk: (1) gebruikmaken van het curriculum, (2) van verklaringsmodellen, (3) van *hands-on* materiaal, (4) het beschrijven van benodigde voorkennis en (5) de keuze van oefeningen en opdrachten.

De onderzoeksvraag in dit artikel luidt: Op welke manier is het mogelijk om rekendidactiek te onderwijzen in een module aan een lerarenopleiding, zodat een besef voor coherentie in rekendidactiek gestimuleerd wordt? Deze vraag richt zich op de rekendidactiek, die daarmee object van studie wordt.

Er bestaan grote verschillen tussen lerarenopleidingen, zowel binnen een land als tussen verschillende landen. Dit kwam onder meer naar voren in de TEDS-M studie (Blömeke, Suhl & Kaiser, 2011; Schmidt, Cogan & Haouang, 2011; Tatto, Schwille, Senk, Ingvarsson, Rowley, Peck & Reckase, 2012). Het onderzoek dat in dit artikel beschreven is, vond plaats aan een Zweedse lerarenopleiding. Qua inrichting is de opleiding vergelijkbaar met een Nederlandse pabo, waarbij de bevoegdheid

wordt verkregen voor de eerste zes jaar van de Zweedse *grundskolan* (het basisonderwijs). Er zijn echter ook verschillen tussen een Nederlandse en een Zweedse lerarenopleiding. Zo is uiteraard het schoolsysteem waarvoor opgeleid wordt anders. Verder wordt de opleiding in Zweden vaak in blokken gegeven, in plaats van parallelle vakken. Anders dan in Nederland kan een Zweedse pabo zowel in een hogeschool als in een universiteit zijn ondergebracht, zonder dat er verschil is in status of inhoud. Toch weet ik uit ervaring dat er veel overeenkomsten zijn tussen de lerarenopleidingen in deze twee landen. In beide landen worden studenten opgeleid tot leerkracht waarbij tijdens de opleiding meerdere vakken behandeld worden, anders dan bij de tweedegraadsopleiding waar één of twee vakken centraal staan. Een andere overeenkomst is dat rekendidactiek als vak wordt erkend en een duidelijke plek heeft binnen de opleiding.

In dit artikel wordt de studie vanuit de Zweedse situatie beschreven. De eventuele vertaalslag naar de Nederlandse praktijk kan door de lezer zelf gemaakt worden. In het onderzoek staan drie begrippen centraal: *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT), *Learning Study* en variatietheorie. In de volgende paragrafen worden deze begrippen nader toegelicht.

2 Rekenen, rekendidactiek en didactiek

Wat moet een leerkracht leren?

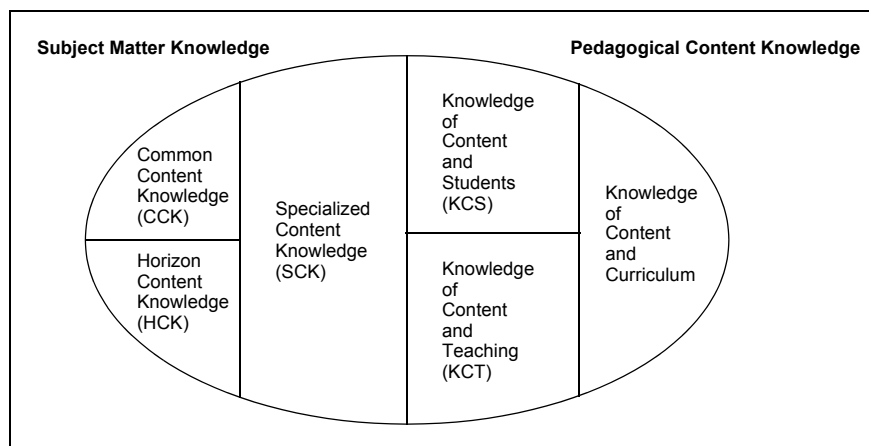
Reeds halverwege de vorige eeuw beschreef Klafki (1963) zijn idee over *Stoffdidaktik*, waarmee hij een derde soort kennis introduceerde. *Stoffdidaktik* was een kennis, naast vakinhoudelijke en pedagogische kennis, die leerkrachten nodig hebben voor hun onderwijs. In de jaren tachtig introduceerde Shulman de term *Pedagogical*

Content Knowledge (Shulman, 1986). Hij beschreef drie categorieën: *Content Knowledge* (vakinhoudelijke kennis), *Curricular Knowledge* (kennis over het curriculum) en *Pedagogical Content Knowledge* (PCK, vakdidactiek). Door PCK als begrip te introduceren, werd het belang van vakinhoudelijke kennis en vakdidactiek opnieuw benadrukt (De Corte, Greer & Verschaffel, 1996; Graeber & Tirosh, 2008). In de jaren daarna werd Shulman's PCK-begrip gebruikt en gherdefinieerd binnen onderzoek aan lerarenopleidingen (Borko & Putnam, 1996; Cochran, King & De Ruiter, 1991; Marks, 1990). In het Nederlands wordt PCK in het algemeen aangeduid als 'vakdidactiek'. Deze term gebruik ik in deze zin daarom ook in dit artikel. Maar ik gebruik het woord 'vakdidactiek' in dit artikel ook in een andere betekenis, namelijk die van een module aan een lerarenopleiding over 'hoe onderwijs in een discipline (vak) moet worden verzorgd'.

Speciaal voor rekenen: MKT

Voor reken- en wiskundendidactiek heeft de onderzoeksgroep onder leiding van Deborah Loewenberg Ball in Michigan een model ontwikkeld ter implementatie van PCK binnen het vakgebied rekenen-wiskunde.² Hun MKT-model, vaak beschreven als het ei (fig.1), beschrijft zes domeinen die van belang zijn voor het verzorgen van onderwijs van rekenen-wiskunde (Ball, 2005; Ball, Hill, & Bass, 2005).

Typische vakgerichte kennis die nodig is voor het verzorgen van rekenonderwijs kan met het MKT-model benoemd worden. Bijvoorbeeld: het herkennen van een verkeerd antwoord valt onder het domein *Common Content Knowledge* (CCK), het verklaren van de fout daarentegen is *Specialized Content Knowledge* (SCK). Kennis over gangbare fouten hoort tot het domein *Knowledge of Content and Students* (KCS). Om de volgorde van opdrachten in een les te bepalen heeft men *Knowledge of Content and Teaching* (KCT) nodig. De domeinen *Knowledge of Content and Curriculum* (KCC) en *Horizon Con-*



figuur 1: domein van *Mathematical Knowledge for Teaching* (Ball, Phelps & Thames, 2008, pag.403)

tent Knowledge (HCK) werden later toegevoegd. Beide hebben betrekking op de leerlijnen binnen rekenen-wiskunde, maar ook op de verhouding tot andere disciplines. Voor het domain KCC betreft dit alleen de schoolvakken, voor het domein HCK strekt dit verder dan de schoolvakken.

Het MKT-model van Ball, Phelps & Thames (2008) verschilt in enige mate van de PCK-beschrijving van Shulman (1986). Omdat MKT zich ook laat aanduiden als 'vakdidactiek' en het verschil tussen MKT en PCK hier wel van belang is, wordt MKT niet vertaald. Deze term wordt alleen gebruikt om het theoretisch kader voor het onderzoek te beschrijven. Indien gesproken wordt over de praktijk binnen onderwijs en lerarenopleiding, worden in dit artikel de termen PCK, 'vakdidactiek' en 'vakdidactische kennis' gehanteerd.

De grote verschillen tussen de opleidingen en het ontbreken van gevestigde principes en standaarden voor een goede lerarenopleiding werd in de TEDS-M-studie beschreven (Blömeke e.a., 2011; Schmidt, Cogan & Haouang., 2011; Tatto e.a., 2012) maar eerder ook door Shulman (2005). Deze diversiteit creëert een behoefte om zich te gaan richten op het 'hoe'. Hoe moet de rekendidactiek aan bod komen? Ook voor de lerarenopleiders in het hier beschreven onderzoek was dat de belangrijkste vraag: Hoe kunnen we de reken-didactische kennis, die we belangrijk achten voor onze studenten, het beste aan bod laten komen? De onderzoeksmethode die gekozen werd om deze vraag te beantwoorden, wordt in de volgende paragraaf beschreven.

3 Learning Study

Het verbeteren van de onderwijspraktijk kan op verschillende manieren gebeuren. De lerarenopleiders in dit onderzoek kozen voor een methode die op dit moment in Zweden veelvuldig gebruikt wordt, namelijk een *Learning Study* (Marton & Lo, 2007; Pang & Marton, 2003). Met een mix van *Design Research* en het *Lesson Study model* uit Japan (Marton & Lo, 2007; Stigler & Hiebert, 1999) biedt *Learning Study* de mogelijkheid om gezamenlijk lessen voor te bereiden en te analyseren, om te focussen op de vakinhoud en tegelijkertijd om als deelnemende leerkracht het proces te kunnen controleren. De eerste pijler van een *Learning Study - Design Research* kwam op als onderzoeksmethode om de kloof tussen onderwijskundig onderzoek en praktijk te overbruggen (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003).

Leerobject

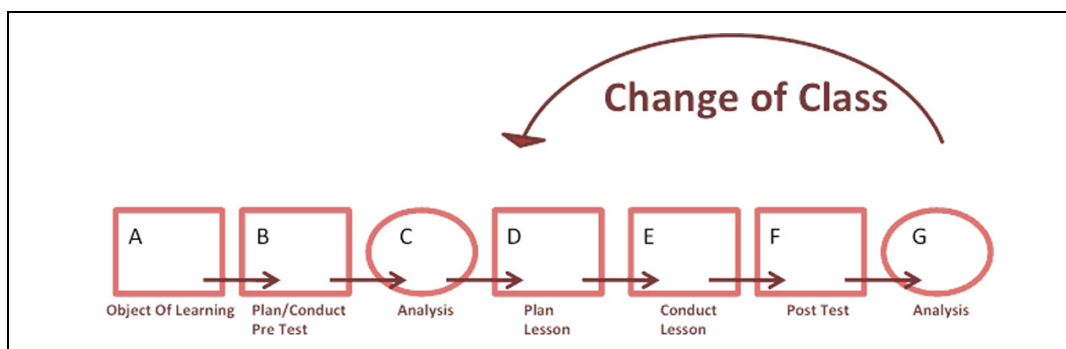
Leren is altijd het leren van 'iets', wat bij een *Learning Study* wordt beschreven als een 'leerobject'. Doordat een leerobject in de verschillende fases van het ontwikkeltra-

ject niet hetzelfde is, en omdat een leerobject door verschillende ontvangers anders wordt ervaren, wordt er onderscheid gemaakt tussen het geplande, het uitgevoerde en het ervaren leerobject (Runesson & Kullberg, 2010). Dit onderscheid is vergelijkbaar met de curriculaire verschijningsvormen (beoogd, geïmplementeerd en ervaren), zoals beschreven door bijvoorbeeld Goodlad (1979) en Van den Akker, Kuiper en Hameyer (2003). In een *Learning Study* verklaren de verschillen tussen de geplande, uitgevoerde en ervaren leerobjecten het resultaat in het leren dat plaatsvindt. Specifiek voor een *Learning Study* is de manier waarop de leertheorie (variatietheorie) gebruikt wordt in de verschillende fases van het onderzoek. Als eerste wordt nu het cyclische verloop van een *Learning Study* uiteengezet; daarna volgt een beschrijving van variatietheorie.

Design

Een groep leerkrachten bepaalt eerst een leerobject (*A*), bijvoorbeeld het begrijpen van het passeren van de tientallen bij opgaven als $26 + 7$. Door het bestuderen van relevante literatuur wordt kennis over dit leerobject verkregen. Daarna wordt geprobeerd om 'kritische factoren' te identificeren. Kritische factoren zijn die factoren die voor een leerling noodzakelijk zijn om het leerobject te begrijpen. Om het bestaan van de gespeculeerde kritische factoren te bevestigen en om nieuwe, voor de leerlingengroep specifieke factoren te identificeren, wordt een voortest ontwikkeld (*B*). Na het analyseren van deze voortest (*C*) wordt gezamenlijk een les voorbereid (*D*). De les wordt uitgevoerd (*E*) en daarna vindt een natest (*F*) plaats. Bij het analyseren van de resultaten van de leerlingen op de voor- en natest wordt gekeken naar wat er wel en niet geleerd is met betrekking tot het leerobject. De verschillen tussen de resultaten van de voor- en natest worden verklaard en afgestemd op de wijze waarop tijdens de les met het leerobject is omgegaan (*G*). Vervolgens worden aanpassingen gemaakt (*B*, *D*) en krijgt een tweede groep leerlingen een aangepaste voortest (*B*), een aangepaste les (*E*) en een na-test (*F*). Dit proces kan met nieuwe groepen leerlingen herhaald worden. In figuur 2 is dit proces in beeld gebracht.

Toen de lerarenopleiders in het onderzoek met het fenomeen *Learning Study* in aanraking kwamen, wilden zij zelf met een dergelijke studie aan de slag. Omdat zij geen toegang hadden tot parallelle groepen, koos men voor een wijziging in een structureel aspect van een *Learning Study*, namelijk dat er van klas wordt gewisseld. In het alternatief design voor het uitvoeren van een *Learning Study*, wordt gewisseld van wiskundig onderwerp in plaats van klas. Het leerobject - coherentie in de rekendidactiek - was hetzelfde, maar werd nu toegepast bij drie verschillende wiskundige onderwerpen: algebra, breuken en ruimtelijk inzicht. Een aanvullende onderzoeksvraag bij het onderzoek was dan ook of het alternatieve design



figuur 2: regulier design van een Learning Study

te generaliseren zou zijn. Een evaluatie van het uitgevoerde onderzoek gaf aan dat generalisering mogelijk en ook wenselijk is (Van Bommel, 2012; Van Bommel & Liljekvist, 2008). In dit artikel ligt daarentegen de focus op de resultaten met betrekking tot het opleidingsonderwijs in rekendidactiek. Welke kritische factoren moet men als lerarenopleider in acht nemen? De term 'kritische factoren' is nauw verbonden met de gekozen theorie voor het onderzoek (variatietheorie), dat in de volgende paragraaf beschreven is.

4 Variatietheorie

Variatietheorie, afkomstig uit de fenomenografie (Pang, 2003), verklaart het leren door de subjectieve dimensie van de leerling te omvatten (Holmqvist, Gustavsson & Wernberg, 2008; Runesson, 2006). Dit perspectief richt zich niet alleen op de leerstof, maar ook op het ervaren en begrijpen van de leerstof door een individu. Waar fenomenografie kijkt naar de kwalitatief verschillende manieren van ervaren van een fenomeen, kijkt variatietheorie juist naar het begrijpen van een fenomeen, zoals bijvoorbeeld het leerobject (Marton, 2000). Kritische factoren worden beschreven en gedefinieerd in relatie tot het leerobject: wat zijn de noodzakelijke factoren die het leren van het leerobject mogelijk maken? Deze kritische factoren worden beschreven met drie termen: onderscheiden, gelijktijdige bewustwording en variatiepatronen. Binnen een lessituatie op de basisschool komt het voor dat leerlingen bijvoorbeeld de verschillende soorten optelopdrachten niet uit elkaar kunnen houden, zoals bij $26 + 7$. In dergelijke lessituaties moet de aandacht gevestigd worden op optellingen waarbij het tiental gepasseerd wordt, naast die waarbij het tiental niet gepasseerd wordt ($26 + 2$). In een lessituatie moet het leerobject onderscheiden kunnen worden en naar voren gebracht worden - door de leerkracht of door de leerling zelf. Als niet duidelijk is wat het leerobject is, dan wordt de opeenvolgende informatie op een andere manier ervaren. De kritische factoren van het leerobject moeten, om leren moge-

lijk te maken, vervolgens gelijktijdig ervaren worden. Gelijktijdig ervaren, of bewustwording, kan mogelijk gemaakt worden door het gebruik van variatiepatronen. Een van de patronen die in variatietheorie gebruikt wordt is het 'contrasteren'. Door bijvoorbeeld te kijken naar de kritische factoren van het leerobject (bijvoorbeeld focus op de eenheden) kunnen voorbeelden gekozen worden om een kritische factor te verhelderen: $26 + 2 \dots 26 + 7$. Bij het contrasteren wordt binnen de kritische factoren een kleine variatie aangebracht. In dit geval ligt het contrasteren van optellingen, waarbij het tiental al dan niet gepasseerd wordt, voor de hand; de kleine variatie leidt in bepaalde gevallen wel tot het passeren van het tiental $26 + 7$ en in andere gevallen niet tot het passeren van het tiental: $26 + 2$.

Een ander variatiepatroon is het generaliseren, wat in dit geval zou kunnen leiden tot voorbeelden waar het passeren van een honderdtal, zoals bij $96 + 7$, of het twee keer passeren van een tiental, zoals bij $26 + 7 + 8$, ingezet wordt. Naast contrasteren en generaliseren zijn er in de variatietheorie nog twee variatiepatronen: separatie, waarbij de kritische factoren een voor een behandeld worden en fusie, waarbij de kritische factoren gelijktijdig aan bod komen.

5 De interventie

In het onderzoek werden tijdens een module 'rekendidactiek' drie bijeenkomsten van tweeënhalve uur onderzocht; deze bijeenkomsten werden voorbereid, gefilmd en geanalyseerd. De bijeenkomsten verschilden voor wat betreft de wiskundige inhoud. Ze gingen respectievelijk over getalbegrip, breuken en ruimtelijk inzicht. Het leerobject was echter overkoepelend: coherentie binnen de rekendidactiek.

Aansluitend werd getoetst hoe de studenten leerden door ze een lesvoorbereiding te laten opstellen. Deze opdracht was onderdeel van de reguliere module en vormde voor de 48 deelnemende studenten in het onderzoek geen extra belasting. Voor de video-opnamen in de klas was toe-

stemming gevraagd en studenten die niet in beeld wilden komen zaten achterin het lokaal, achter de camera. Van het videomateriaal werd een transcriptie gemaakt. Bij het vergelijken van de voor- en de natest werden met behulp van variatietheorie verklaringen gezocht voor de resultaten. De analyses werden daarnaast gebruikt om de planning van de volgende bijeenkomsten van de module bij te stellen.

6 Resultaten

Tijdens de *Learning Study* kwamen vier kritische factoren naar voren die, voor deze groep studenten, van belang bleken bij het leren en onderwijzen van de module ‘rekendidactiek’. In deze paragraaf zullen deze kritische factoren nader beschreven worden.

Voor dit onderzoek werd gekeken naar vijf onderdelen van rekendidactiek en naar meerdere factoren die van belang kunnen zijn bij het leren en onderwijzen van rekendidactiek. Ik beperk me hier tot de gevonden factoren die noodzakelijk zijn voor het leren van reken-didactische kennis.

Formuleren van doelen

In de toetsing kwam duidelijk naar voren dat de meeste studenten niet goed waren in het ‘formuleren van geschikte doelen’ voor een les. Veel studenten beschreven het gehele curriculum als doel voor een les, waarbij zij zowel alle wiskundige als de algemene doelen van het onderwijs beschreven. Het leren formuleren van passende doelen voor een les werd daarmee basisvoorwaarde om coherentie in lesvoorbereidingen aan te brengen.

In de experimentele setting, waarin algebra centraal stond, beschreef een van de studenten als doel van de les dat leerlingen algebra leren te begrijpen. Een andere student beschreef als doel van de les dat leerlingen het rekenen met onbekenden (in uitdrukkingen als $7 + x = 12$) zullen trainen, om zo te leren dat een onbekende in verschillende uitdrukkingen voor verschillende waarden kan staan. Beide studenten gaven daarna gelijksoortige oefeningen. Echter, bij de tweede student was het verloop van de les gericht op het werken met onbekenden; de eerste student vervolgde met oefeningen waarbij patronen ingekleurd en getallenreeksen aangevuld moesten worden, enzovoort. Er was in die les weinig focus te vinden, waardoor ook het doel minder duidelijk naar voren kwam.

Gedetailleerd beschrijven

Uit de lesvoorbereidingen was verder te lezen dat ‘gedetailleerde beschrijvingen’, waarbij alleen gekeken is naar

de vijf elementen, gekozen door de lerarenopleiders, coherentie bevorderde. Zo schreef een van de studenten in de test over algebra dat leerlingen vaak moeite hebben met de verschillende termen in algebra. Deze termen werden niet gespecificeerd en in het lesplan was dan ook geen training van terminologie opgenomen. Dit wijst erop dat op het moment dat studenten in staat zijn om bijvoorbeeld de benodigde voorkennis in detail te beschrijven, zij hun gekozen oefeningen en het door hen geformuleerde lesdoel hierop afstemmen. Bij minder gedetailleerde beschrijvingen was dit niet het geval. Dit uitte zich ook in klassikale discussies tussen lerarenopleider en student:

Student *A*: n is gelijk aan a keer 2. Of a is gelijk aan n gedeeld door 2.

Lerarenopleider: Wat moet je daarvoor kunnen? Welke voorkennis vereist zo’n opdracht?

Student *B*: De basis rekenoperaties

Lerarenopleider: Basis rekenoperaties, nog wat meer?

Student *C*: Verdelen in gelijke hoeveelheden.

Lerarenopleider: Verdelen in gelijke delen bijvoorbeeld

Student *D*: De regels, zoals het tegenovergestelde.

Lerarenopleider: Ja, het omgekeerde van vermenigvuldigen, wat delen is.

Student *E*: Precies.

Lerarenopleider: Ja, om dat te kunnen doen, dat is voorkennis...

De studenten hebben hier moeite om vereiste voorkennis te formuleren, terwijl dit voor de lesvoorbereidingen van groot belang is. Uitdrukkingen als ‘rekenoperaties’ en ‘de regels’ zijn niet specifiek genoeg om voorkennis te formuleren. Dit betekende voor de lerarenopleiders dat er in de bijeenkomsten met de studenten ruime aandacht moest komen voor meer uitleg over ieder didactisch onderdeel. Als methode werd vervolgens een gestructureerde *mind-map* ingezet om studenten doelgericht een leeractiviteit te laten beschrijven en zich te richten op verschillende didactische aspecten.

Wiskundige kennis

In het gespreksvoorbeeld zien we tevens dat de studenten niet de correcte wiskundige terminologie gebruiken. Bij andere discussies merken we dat het ontbreken van ‘wiskundige kennis’ deelname aan de didactische discussie verhinderd. Tijdens de tweede les wilde de lerarenopleider bijvoorbeeld praten over natuurlijke getallen, om te kijken welke stap logisch zou zijn voor leerlingen die te maken krijgen met breuken en negatieve getallen. De discussie bleef echter steken bij het woord ‘natuurlijk’. Een van de studenten beschreef natuurlijke getallen als de getallen één tot tien, omdat dat de getallen zijn die het meest natuurlijk zijn voor kinderen, dat zijn de getallen die ze het eerst leren.

Lerarenopleider: Waar ik het over had was dit diagram (wijst naar een Venndiagram op de powerpoint) met al de natuurlijke getallen.

Wat zijn dat voor een getallen? Welke getallen zijn natuurlijk?

Student: Eén tot tien.

Lerarenopleider: En...?

Student: Positief.

Lerarenopleider: Positief, nog wat anders? Hoe zit het met nul, positief? Wordt vaak vergeten, maar hij is er wel. Maar je zei een tot tien.

Student: Ja, want dat zijn de getallen die je het eerst leert.

Rol als rekenleerkracht

Ten slotte werd duidelijk dat studenten vastzaten in hun rol als pedagoog, dat zij ten opzichte van oefeningen, materiaal, enzovoort reflecteerden vanuit de pedagogische rol die ze als leerkracht hebben. De 'rol als rekenleerkracht' was daarbij niet zichtbaar. In de tweede les, waarin een spel gespeeld werd waarbij vergelijkingen opgelost moesten worden, werd studenten naar mogelijkheden gevraagd om het spel te verbeteren of te verrijken. Studenten gaven suggesties als: een grotere dobbelsteen, in groepjes spelen, gekleurd papier, enzovoort. In dit soort suggesties staat pedagogiek centraal en niet reken-didactiek. Tijdens het analyseren van de les werd duidelijk dat het geplande leerobject niet duidelijk genoeg naar voren werd gebracht en dat het uitgevoerde leerobject minder expliciet was. Het ervaren leerobject van de studenten was pedagogisch van aard.

7 Vier kritische factoren

Hiervoor zijn de vier kritische factoren beschreven die uit de data naar voren kwamen. We formuleerden de onderzoeksvraag 'Op welke manier is het mogelijk om reken-didactiek te onderwijzen in een cursus aan een lerarenopleiding zodat studenten systematischer gebruik gaan maken van rekendidactiek in de voorbereiding van hun toekomstige lessen?' We kunnen die vanuit het voorafgaande op de volgende manier beantwoorden. Bij het onderwijzen van rekendidactiek moet rekening worden gehouden met de vier kritische factoren. Twee factoren zijn dat studenten moeten leren om (1) duidelijke lesdoelen te formuleren en om (2) gedetailleerde beschrijvingen te maken van andere delen in een lesvoorbereiding. Onderwijs op de lerarenopleiding moet hier specifiek aandacht aan besteden. De twee andere factoren zijn dat (3) de wiskundige kennis van studenten op dat niveau gebracht moet worden, maar ook dat zij (4) de wiskunde centraal stellen tijdens cursussen in rekendidactiek. De lerarenopleiding moet hierop inspelen door vragen meer specifiek te stellen en continu de wiskunde op de voorgrond te plaatsen.

De vier kritische factoren hebben met verschillende delen

van het MKT-model te maken. Het formuleren van lesdoelen heeft met KCC te maken. Gedetailleerde beschrijvingen kunnen met zowel SCK, KCS, KCT als KCC verbonden worden. Benodigde wiskundige kennis is nauw verbonden met CCK. Ten slotte is de rol als rekenleerkracht deels te vinden in HCK, maar hoort deze ook thuis in het onderzoeksveld 'attitude' dat niet in het MKT-model is aangegeven? Het onderwijzen van rekendidactiek is meer dan het onderwijzen van de vijf elementen die in de *Learning Study* door de leraren aangemerkt waren als belangrijk: (1) gebruikmaken van het curriculum, (2) van verklaringsmodellen, (3) van hands-on materiaal, (4) het beschrijven van benodigde voorkennis en (5) de keuze van oefeningen en opdrachten. Deze keuze van de te onderzoeken elementen beïnvloedt welke kritische aspecten gevonden kunnen worden. Door deze elementen als leerobject te beschouwen, geeft een *Learning Study* juist ook de mogelijkheid om specifieke kritische aspecten te vinden.

8 Discussie

Formuleren van doelen, gedetailleerd beschrijven, wiskundige kennis en de rol als rekenleerkracht waren de vier kritische factoren die werden gevonden in dit onderzoek. Wat betreft het formuleren van doelen, werd het belang van curriculumkennis ook door Shulman (1986) aangetoond in zijn speciale categorie *Curricular Knowledge*. Grossman (1990) omvatte dit type kennis in haar PCK-beschrijving en benadrukte het belang daarvan bij haar beschrijving van vakkennis en leservaring. Ook het MKT-model omvat curriculumkennis als een van de domeinen (Ball e.a., 2008).

Het gedetailleerd beschrijven werd eerder ook al door Kinach beschreven: Kinach zag nauwkeurigheid van verklaringen als indicator voor PCK (Kinach, 2002). Binnen de module konden de lerarenopleiders twee beschrijvingen van lesdoelen en de gekozen oefeningen naast elkaar leggen. Het contrast maakte het belang van een duidelijk afgegrensd doel voor een les zichtbaar voor de studenten.

Dat vakkennis van belang is voor leerkrachten is in verschillende studies naar voren gekomen (Sullivan, 2008; Totto e.a., 2012). Dat vakkennis van invloed is op reken-didactische kennis is echter niet altijd even duidelijk. Dit onderzoek laat echter zien dat vakkennis de groei van reken-didactische kennis beïnvloedt. Voor de opdrachten in de module had dit tot gevolg dat de lerarenopleiders besloten om eerst de vakkennis van studenten te trainen en daarna pas de didactische discussie te starten. Momenteel wordt ook gesproken over of er, voor of tijdens de cursus, een basistoets ingevoerd kan worden.

De keuze om leerkracht voor het basisonderwijs te

worden houdt in dat de studenten naast hun rol als pedagoog ook hun rol als vakleerkracht moeten ontdekken. Als leerkracht vragen de verschillende rollen op verschillende momenten van de dag om aandacht. In het opleidingsonderwijs is het van belang dat lerarenopleiders uitdrukkelijk de discipline (vak) naar voren brengen.

In het onderzoek - een Zweedse situatie waarin studenten twintig weken achter elkaar een cursus rekendidactiek volgden, zonder andere vakken - bleek het nog steeds moeilijk om studenten te laten concentreren op de rekendidactiek.

Vragen als: 'Hoe kun je als leerkracht...?', moesten veranderd worden in: 'Hoe kun je als rekenleerkracht...?', om zodoende steeds het vak te benadrukken en de pedagogische rol even achterwege te laten. Daarmee is niet gezegd dat de pedagogische rol niet van belang is, maar die rol is niet aan de orde in de beschreven module. Voor de lerarenopleiders betekende dit om keer op keer te benadrukken dat het om rekendidactiek gaat, niet om algemene didactiek. Oftewel, de vakdidactiek niet impliciet houden, maar zichtbaar maken door het uit te spreken en te benadrukken.

Aan het begin van dit artikel stelde ik de vraag: Welke vakdidactische kennis hebben we wat betreft rekendidactiek? Het hier beschreven onderzoek geeft vier factoren aan die van belang zijn bij het onderwijzen van rekendidactiek op de lerarenopleiding. Tussen groepen zullen verschillen bestaan; in een *Learning Study* ga je er vanuit dat de gevonden factoren allereerst geldig zijn in de onderzochte groep. Een generalisering naar andere groepen kan gemaakt worden en van toepassing zijn, maar dat sluit niet uit dat in andere groepen andere factoren van belang zijn.

In dit geval betrof het een studie met Zweedse pabo-studenten. Zoals de TEDS-M-studie al aangaf, verschillen de lerarenopleidingen zowel binnen een land als tussen verschillende landen. Ondanks dat mag men verwachten dat de gevonden kritische factoren herkenbaar en toepasbaar zijn binnen andere (Zweedse) pabo's. Hier zal echter meer onderzoek naar gedaan moeten worden.

Zo kunnen verschillende en andere kritische factoren aan het licht komen. Dergelijk onderzoek kan daarnaast laten zien hoe rekendidactiek het meest effectief gegeven kan worden. Welke factoren zijn van belang bij de effectiviteit van het onderwijzen van rekendidactiek? Door onderwijs op de pabo te onderzoeken, kan inzicht verkregen worden in verbeterings- en ontwikkelingsmogelijkheden en kan meer vakdidactische kennis over rekendidactiek worden opgedaan.

Noten

- 1 Ik wil Pauline Vos bedanken voor haar ondersteuning bij het schrijven van dit artikel.
- 2 Het Engelstalige begrip *Mathematics* omvat de gebieden rekenen en wiskunde; het kent geen onderscheid daarin. Omdat het beschreven onderzoek echter het rekenen betreft,

vertaal ik *Mathematics*, indien dit geen begripsprobleem oplevert, hier met 'rekenen' en anders met 'rekenen-wiskunde'.

Literatuur

- Akker, J. van den, W. Kuiper & U. Hameyer (2003). *Curriculum landscapes and trends*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Ball, D.L. (2005). Mathematics in the 21st century: What mathematical knowledge is needed for teaching mathematics? Retrieved 2012-05-28, from <http://www.ed.gov/rschstat/research/progs/mathscience/ball.html>.
- Ball, D.L., H.C., Hill & H. Bass (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(1), 14-17, 20-22, 43-46.
- Ball, D.L., G. Phelps & M.H. Thames (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Blömeke, S., U. Suhl & G. Kaiser (2011). Teacher education effectiveness: Quality and equity of future primary teachers' mathematics and mathematics pedagogical content knowledge. *Journal of Teacher Education*, 62(2), 154-171.
- Bommel, J. van & Y. Liljekvist (2008). *Testing the same group again and again: An alternative design for a learning study*. Paper presented at the WALs 08, Hong Kong, China.
- Bommel, J. van (2012). *Improving teaching, improving learning, improving as a teacher: Mathematical knowledge for teaching as an object of learning*. Karlstad, Sweden: Karlstad University.
- Borko, H. & R. Putnam (1996). Learning to Teach. In: D. C. Berliner & R. C. Calfee (Eds.). *Handbook of Educational Psychology*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2 ed., 673-708.
- Cobb, P., J. Confrey, A. diSessa, R. Lehrer & L. Schauble (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13.
- Cochran, K.F., R.A. King & J.A. de Ruiter (1991). *Pedagogical content knowledge: A tentative model for teacher preparation*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago, IL.
- Darling-Hammond, L. (2000). Teacher quality and student achievement: A review of state policy evidence. *Education Policy Analysis Archives*, 8(1), 1-44.
- Corte, E. De, B. Greer & L. Verschaffel (1996). Mathematics teaching and learning. In: D.C. Berliner & R.C. Calfee (Eds.). *Handbook of Educational Psychology*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2 ed., 491-549.
- Goodlad, J.I. (1979). *What schools are for*. Bloomington, IN: Phi Delta Kappa Educational.
- Graeber, A. & D. Tirosh (2008). Pedagogical content knowledge: Useful concept or elusive notion. In: P. Sullivan & T. Wood (Eds.). *The international handbook of mathematics teacher education: Vol 1. Knowledge and Beliefs in mathematics teaching and teaching development*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers, 117-132.
- Grossman, P.L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York, NY: Teachers College Press.
- Grossman, P.L. (2010). Learning to Practice: the design of clinical experience in teacher preparation. *Nea Policy brief*,

- May. http://www.nea.org/assets/docs/Clinical_Experience_-_Pam_Grossman.pdf
- Holmqvist, M., L. Gustavsson & A. Wernberg, (2008). Variation theory: An organizing principle to guide design research in education. In: A.E. Kelly, J.Y. Baek & R.A. Lesh (Eds.). *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching*. New York, NY: Routledge, 111-130.
- Kinach, B.M. (2002). A cognitive strategy for developing pedagogical content knowledge in the secondary mathematics methods course: Toward a model of effective practice. *Teaching and teacher education*, 18(1), 51-71.
- Klafki, W. (1963). *Studien zur Bildungstheorie und Didaktik*. Weinheim, Germany: Verlag Julius Beltz.
- Marks, R. (1990). Pedagogical content knowledge: From a mathematical case to a modified conception. *Journal of Teacher Education*, 41(3), 3-11.
- Marton, F. (2000). The practice of learning *Nordisk Pedagogik*, 20(4), 230-237.
- Marton, F. & M.L. Lo (2007). Learning from the "Learning Study". *Journal of Research in Teacher Education*, 14(1), 31-46.
- Nye, B, S. Konstantopoulos & L. Hedges (2004). How large are teacher effects? *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 26(3), 237-257.
- Oonk, W. (2009). *Theory-Enriched Practical Knowledge in Mathematics Teacher Education*. Leiden: ICLON.
- Pang, M.F. (2003). Two faces of variation: On continuity in the phenomenographic movement. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 47(2), 145-156.
- Pang, M.F. & F. Marton (2003). Beyond "Lesson Study": Comparing two ways of facilitating the grasp of some economic concepts. *Instructional Science*, 31(3), 175-194.
- Runesson, U. (2006). What is it possible to learn? On variation as a necessary condition for learning. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 50(4), 397-410.
- Runesson, U. & A. Kullberg (2010). Learning from variation: Differences in learners' ways of experiencing differences. In: B. Sriraman, C. Bergsten, S. Goodchild, G. Palsdottir, B. Dahl & L. Haapasalo (Eds.). *The first sourcebook on Nordic research in mathematics education: Norway, Sweden, Iceland, Denmark and contributions from Finland*. Charlotte, NC: Information Age Publishing, 299-318.
- Sanders, W.L., A.M. Saxton & S.P. Horn (1997). The Tennessee value-added assessment system, a quantitative, outcomes-based approach to educational measurement. In: Millman (Ed.). *Grading teachers, grading schools, Is student achievement a valid evaluation measure?* Thousand Oaks, CA: Corwin Press, 137-162.
- Schmidt, W.H., L. Cogan & R. Haouang (2011). The role of opportunity to learn in teacher preparation: An international context. *Journal of Teacher Education*, 62(2), 138-153.
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L.S. (2005). Teacher education does not exist *Stanford Educator (Fall 2005)*. Retrieved 2012-05-28, from <http://ed.stanford.edu/sites/default/files/suse-educator-fall05.pdf>.
- Stigler, J.W. & J. Hiebert, (1999). *The teaching gap: best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York, NY: Free Press.
- Sullivan, P. (2008). Knowledge for teaching mathematics. In: P. Sullivan & T. Wood (Eds.). *The international handbook of mathematics teacher education Vol 1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers, 1-12.
- Tatto, M., J. Schwille, S. Senk, L. Ingvarsson, G. Rowley, R. Peck & M. Reckase (2012). *Policy, practice and readiness to teach primary and secondary mathematics in 17 countries*. Amsterdam, The Netherlands: International association for the evaluation of educational achievement.

The aim of the study described in this article was to improve the teaching of the didactics of mathematics. A Learning Study was conducted during a course in the didactics of mathematics at a teacher training college, and three lessons were planned and analysed with the help of variation theory. The object of learning consisted of five elements of Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) and for this object of learning, four critical features were found. To be able to formulate goals for a lesson, to be able to give detailed descriptions, to have adequate mathematical knowledge and to be able to take a role as a mathematics teacher appeared to be necessary for understanding the object of learning, MKT.