

A. Goddijn
Flsme, Universiteit Utrecht

Op het web vond ik deze vraag en antwoord:

Vraag: Ik zou graag willen weten hoe je een kaboutermuts maakt. Gr (...).

Antwoord: Je neemt een A4 papier en je rolt het op van de ene hoek naar de andere. De hoeken staan schuin over elkaar en zo probeer je de juiste maat te vinden. *Pas op:* dit vraagt een beetje geduld. Dan kun je een watje op de top plakken en evt. de hoed rood verven. Je kan direct rood karton gebruiken! Groetz (...).

Prachtig natuurlijk, die onderlinge hulp op het web, maar ik zie het met de muts nog niet helemaal lukken! Er zijn natuurlijk wel betere kaboutermutsrecepten te vinden op het web. Deze 'Praktijktip' geeft er voor puntige ronde kaboutermutsen ook weer een heel stel. Daarbij wordt ook dieper ingegaan op de achtergronden van het fenomeen puntmuts van papier; de vraag is natuurlijk wel: waarom zou je dat met je studenten doen, als er al genoeg informatie is? En: hoezo achtergronden?

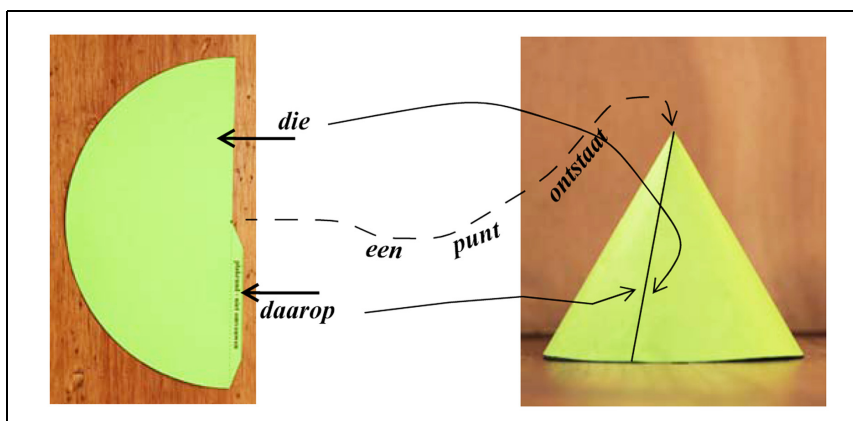
Om dat waarom toe te lichten, ga ik eerst even naar een veel jongere doelgroep. Ik zag afgelopen weekend een

was het nog niet. Ze rolt het blad steeds in de lengterichting op en als ik het in de breedterichting doe, doet ze dat niet na, terwijl ze normaliter alles wat ik doe onmiddellijk imiteert!

Het in elkaar zetten van een bouwplaat, of het nu om een doosje, koker of puntmuts gaat, is een intense beleving van de overgang vlak naar ruimtelijk. Tijdens het buigen, vouwen en plakken gaan allerlei zaken, zoals hoeken en kanten van het papier en figuren die al op het papier staan, mee de ruimte in en worden anders geordend. Het is moeilijk tijdens het plakken daarbij niet vooruit te denken naar wat er ontstaat. Met andere woorden: de intuïtieve ruimtemeetkundige activiteit komt op gang.

Wie een stukje ouder is dan Vera-Sofie kan er ook hardop of in gedachten over praten. Bijvoorbeeld bij het maken van de puntmuts uit een halve cirkel: 'Oh natuurlijk, die kant komt daarop terecht en dan komt er een punt te voorschijn.' Het mentale proces ziet er in beelden en woorden gevat zo'n beetje zo uit (fig.1).

Het monteren van de bouwplaat is daarom echt een con-



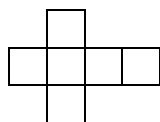
figuur 1

enthousiaste Vera-Sofie van twee-en-driekwart jaar koker na koker rollen van blaadjes A4, niet op mijn initiatief maar uit eigen vrije wil; blijkbaar is het maken van zo'n ruimtelijk rond-en-recht-tegelijk-ding uit een vel papier heel fascinerend. 'Bespreekbaar' met de kleine

ceptvormende activiteit. Ik benadruk nog een paar punten in de gang van vlakke halve cirkel naar de eindvorm. De kegel, dat is de vorm die hier ontstaat, is een bijzonder samengaan van rond en recht. Dat was bij die kokers van A4 ook zo, maar bij de kegel zorgen we ervoor dat er geen

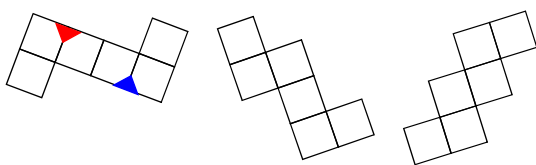
gat aan een uiteinde van het rondgebogen ding is. Bij het in elkaar zetten is dat in praktische zin het lastigste plekje van de plaknaad. Dicht bij de punt moet als het ware veel meer voorgebogen worden, dan verder er vanaf. Want daar ontstaan hele kleine cirkeltjes! Een handige manier van voorbuigen is overigens deze: leg de rechte kant van de halve cirkel langs de rand van een tafel. Druk licht met de wijsvinger op het midden (de toekomstige top), zodat de bouwplaat nog kan draaien. Maak die hele draai en breng het buiten de tafel stekende deel steeds naar beneden. Zorg dat er geen vouw ontstaat, maar wel over de tafelrand gebogen wordt! De tafelrand ligt dan steeds onder een lijn van het midden naar de cirkel. Die lijnen zijn de lijnen die recht blijven bij het in elkaar zetten. Zo ervaren we al buigend dat de kegel weliswaar rond is, maar toch rechte lijnen bevat, en wel overal! Het zelf in elkaar zetten van de bouwplaten maakt de analyse van de vorm heel zichtbaar.

Het in elkaar zetten van bouwplaten is het scheppen van ruimte vanuit een platte figuur, het is dus een ambachtelijk, maar ook een wiskundig-mentaal proces. Er zijn bouwplaten waar je zou kunnen denken: het kan ook wel zonder mentaal proces. Bij het zien van figuur 2 is het voor veel mensen moeilijk om niet aan een kubus te denken.



figuur 2

Ja, dat kan ten gevolge van eerdere ervaringen zo zijn, maar bij de vraag welke van deze drie hieronder geen kubus kan zijn, komt er in veel hoofden een lastig naverstelbaar draaien, omklappen en bewegen op gang dat best een minuut kan aanhouden voor er een antwoord op deze vraag is.



figuur 3

Precies in dat draaien, omklappen en bewegen, daar zit hier weer de mentale meetkundige activiteit. Mooi extraatje is hier nog de suggestie het rode en blauwe neusje van de linkse bouwplaat af te maken met nog twee kleine gekleurde driehoekjes in ander vlakjes van de bouwplaat.

Leuke vragen zijn het wel en ook prima als generatoren van mentale activiteit, maar ik nam ze toch niet op in het werkblad bij deze 'Praktijktip'. De vragen bij de kubusbouwplaten zijn veel gezochter en richten zich veel meer

tot de puzzelaars. Bij de kegel ga ik uit van de bekende situatie van het maken van een puntmuts en laat de wiskunde daar op een nog redelijk natuurlijke wijze uit voortvloeien, juist omdat ik de nadruk wil leggen op de intuïtieve basis onder het fenomeen.

In de werkbladen wordt iets aan de kale kegel toegevoegd dat ook met ook zo'n natuurlijk onderdeel van de mutsenmakerij van doen heeft: het gebruik van versiering en kleur. In het werkblad gaat het eerst om een speciale aanwezige regelmatige structuur op papier die door buigen vervormd of verstoord wordt: het ruitjespatroon. Er is namelijk iets bijzonders met ruitjespapier, dat verstoord wordt als je van ruitjespapier een kegel maakt, zoals bij bouwplaat B gebeurt. Ook al knip je de bouwplaat zó, dat de ruitjes op zich goed over de plaknaad doorlopen! Daar zit een verrassing in die wel voorbereid moet worden.

Verassingen bij het doen van wiskunde kun je als docent aan het toeval overlaten, maar als we dat in het reken-wiskundeonderwijs alléén maar doen, bereiken de meeste leerlingen het einde van hun schoolloopbaan zonder het genot van de wiskundige verrassing ooit ervaren te hebben. Vandaar de zeer gestuurde opgave 4: tel het aantal vierkantjes dat je tijdens een terugkerende route over ruitjespapier passeert. Ik garandeer dat veel leerlingen en andere mensen met enige verbazing ontdekken dat dat aantal altijd even is en met de vraag komen: hoe zit dat dan? In het laatste onderdeel van de opgave zit weer een sturing: doe het eens op een dambordpatroon. Maar, de opgave laat toch nog ruimte voor een stap in de redenering waarmee je zelf het antwoord op de waarom-vraag kunt vinden.

De wiskundige methode die in dit onderdeel zit ingebouwd, namelijk het verkennen van een regelmatige structuur door middel van een intensivering van de regelmaat (hier door kleuring), ja, dat is een stukje schoonheid van de wiskunde dat ik graag geniet en hergeniet in velerlei vorm, en daarom ook iedereen hartelijk gun. Mooi, maar als we kegels maken van ruitjespapier, dan gaat er ook iets mis met de net ontdekte wet van de eventallige terugkeerroutes. Dat is opgave 5.

Op sommige ruitjeskegels geldt de wet van de even gesloten routes niet als de route om de top gaat. De driehoekige route op de Vietnamese hoed bijvoorbeeld. Wat is daarvan de storende oorzaak? De eerder getoonde schaakbordmethode nemen we nu in heronderzoek. Door dat schaakbord kregen we inzicht in de wet op de even routes, dus hier gaan we vast aan het dambord merken wat er aan de hand is. Dat is opgave 6. Nee, dat ga ik in deze toelichting niet verder voorkauwen.

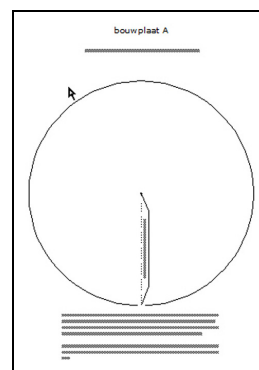
Maak die bouwplaat maar van rood-wit schaakbordpapier! En wat de laatste drie kegels betreft: het uiteindelijke doel is de laatste zin van opgave 7: ontdek zelf een voor jou bijzonder patroon!

Om te beginnen

Je weet vast hoe je een vrolijke kabouterpuntmuts maakt uit een rond stuk papier. Hier onderzoeken we verschillende soorten puntmutsen waar ook speciale patronen op staan. Daarvoor zijn zes voorbeelden beschikbaar m op stevig papier af te drukken (zie pagina 49 tot en met 54) Aanbevolen papierdikte: 120 gram per vierkante meter, maar met minder gaat het ook wel.

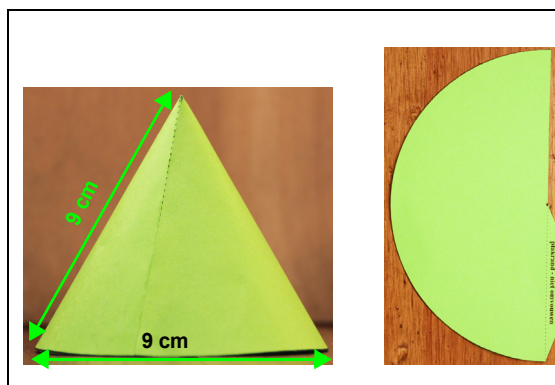
Opgave 1: Effen puntmuts in allerlei vormen

Gebruik bouwplaat A. Daarin staat het basisidee. Cirkel uitknippen, twee sneden van rand naar midden maken. Buigen, lijmen. Doe het even. Je kunt er scherpe tovenaarsmutsen mee maken, maar ook van die Vietnamese hoeden. Deze puntmuts is ongekleurd, dus versiering kun je toevoegen, maar dat moet je vóór het plakken doen.



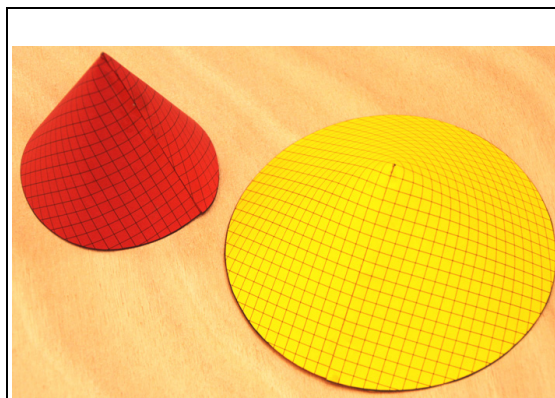
Opgave 2: Puntmuts van halve cirkel

Gebruik een nieuwe kopie van bouwplaat A precies de halve cirkel; trek daarvoor de stippellijn van de plakrand recht door. Je puntmuts ziet er van opzij nu als een driehoekje uit. Op de foto kun je zien dat de doorsnede van de onderkant van de muts precies zo groot is als de schuine opstaande kant! Je kunt dat eigenlijk wel verwachten. Want van de helft van de hele cirkel van de bouwplaat maak je al buigend de grondcirkel van de muts. Die grondcirkel is dus ... Vul zelf de redenering maar aan!



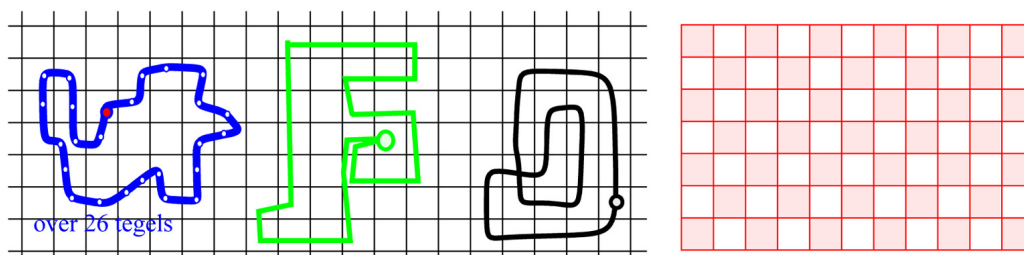
Opgave 3: Puntmuts met ruitjes

Neem je ruitjespapier in plaats van effen papier, dan gaat het als je de puntmuts in elkaar zet niet altijd goed met het patroon. De ruitjes lopen meestal niet vanzelf door over de plaklijn, daar moet je echt je best voor doen. Bouwplaat B levert je drie puntmutsen waarbij de ruitjes mooi doorlopen! Op de foto zie je een van die drie, samen met een minder succesvol exemplaar. Maar ook al lopen de ruitjes wel door, toch gaat er soms iets mis. Er is iets anders dat niet meer klopt. Daarom eerst iets bijzonders over wandelen over tegels en ruitjes.



Opgave 4: Rondstappen op een tegelpatroon: de wet van de even routes

Hier zie je een paar terugkerende wandelingen over een gewoon ruitjespatroon.

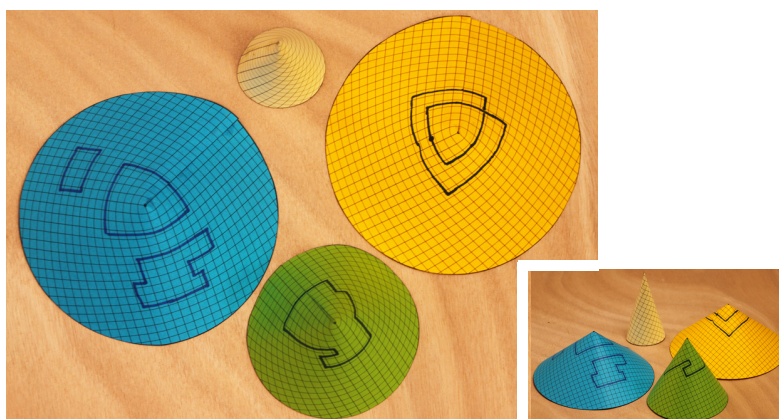


Bij deze wandelingen mag je alleen van ruitje naar ruitjebuurtje gaan en niet via de hoekpunten gaan. Tel de ruitjes die je van start tot terug bij start bij deze routes paseert. Als het goed is, kom je alleen even aantallen tegen. Wonderlijk! Probeer maar of je toch een oneven route kunt vinden...

Als je een route tekent op het rood-witte veld en daarvan het ruitjesaantal telt, kom je er wel achter waarom dat aantal inderdaad altijd even moet zijn: van rood stap je steeds naar wit en ... Vul de rede-nering maar aan.

Opgave 5: Routes op de ruitjesmutsen

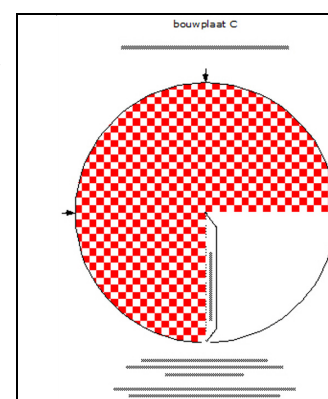
Hier zie je een paar ruitjesmutsen die van bouwplaat B gemaakt zijn recht van boven. Je zou toch wel mogen verwachten dat de wet van de even routes ook op de puntmuts opgaat, of niet soms? Nu maakte een mier diverse routes over deze mutsen, je ziet hier hun routes. Tel weer de lengtes van de routes. Maak zo'n spitse muts met ruitjes zelf; teken en tel een route rond de top ...



Nu is er blijkbaar niet altijd een even aantal tegels op een ruitjesroute. Wanneer wel en wanneer niet? Bij welke puntmuts gaat de altijd-even bewering nog wel op? En hoe zit het met de dubbele omloop op de platste muts?

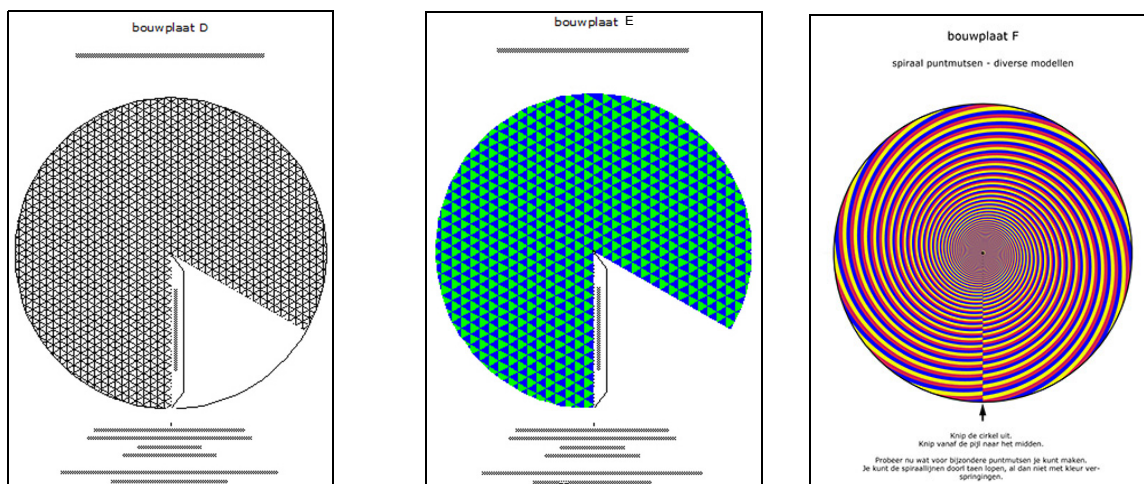
Opgave 6: De unieke roodwitte puntmuts

Het raadsel van de oneven route is met behulp van hetzelfde trucje van het rood-witte ruitjes papier te begrijpen. Gebruik hiervoor bouwplaat C. Knip hem uit en verken de drie mutsen die er mee mogelijk zijn, zoals bij de zwart witte ruitjes. Je gaat nu wel zien wanneer wel - en waarom en wanneer niet het patroon echt doorloopt over de plaklijn. Blijft nog even de vraag: waarom heeft de dubbele omloop op de Vietnamese muts dan wél een even aantal stapjes?



Opgave 7: Driehoekjesmutsen: spiralen

Op bouwplaat *D* en bouwplaat *E* kun je bij een driehoekjespatroon dezelfde vragen stellen als bij de ruitjesmuts.

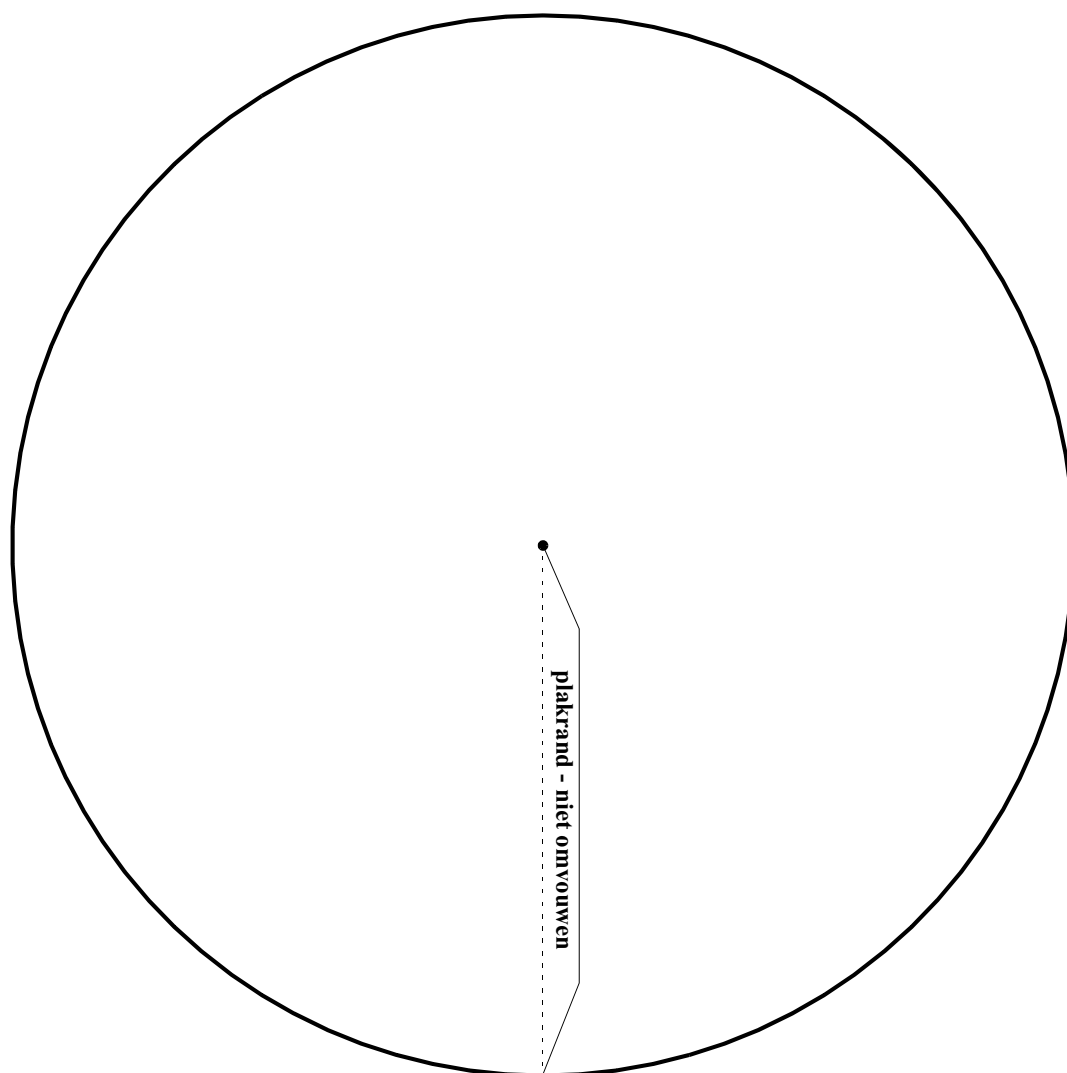


Hoeveel kun je er maken van bouwplaat *D*, waarbij de driehoekjes als patroon door lopen? En hoeveel als je ook nog met kleur moet rekening houden? En hoe zit het hier met de routes? Om zelf uit te zoeken! De spiraalfeestmuts tot slot levert mutsen (ja: meerdere!) met een heel ander patroon, met spiraallijnen. Je kunt weer mutsen maken waarbij het patroon (de spiraallijnen die de grenzen tussen de gekleurde banen zijn) wel doorloopt, en de kleuraansluiting niet. Of wél: het kan allemaal. En vergeet niet dat je de eerste blanco bouwplaat natuurlijk zo kunt in richten als je zelf wilt!

Veel plezier met deze feestmutsen!

bouwplaat A

effen puntmutsen - alle vormen



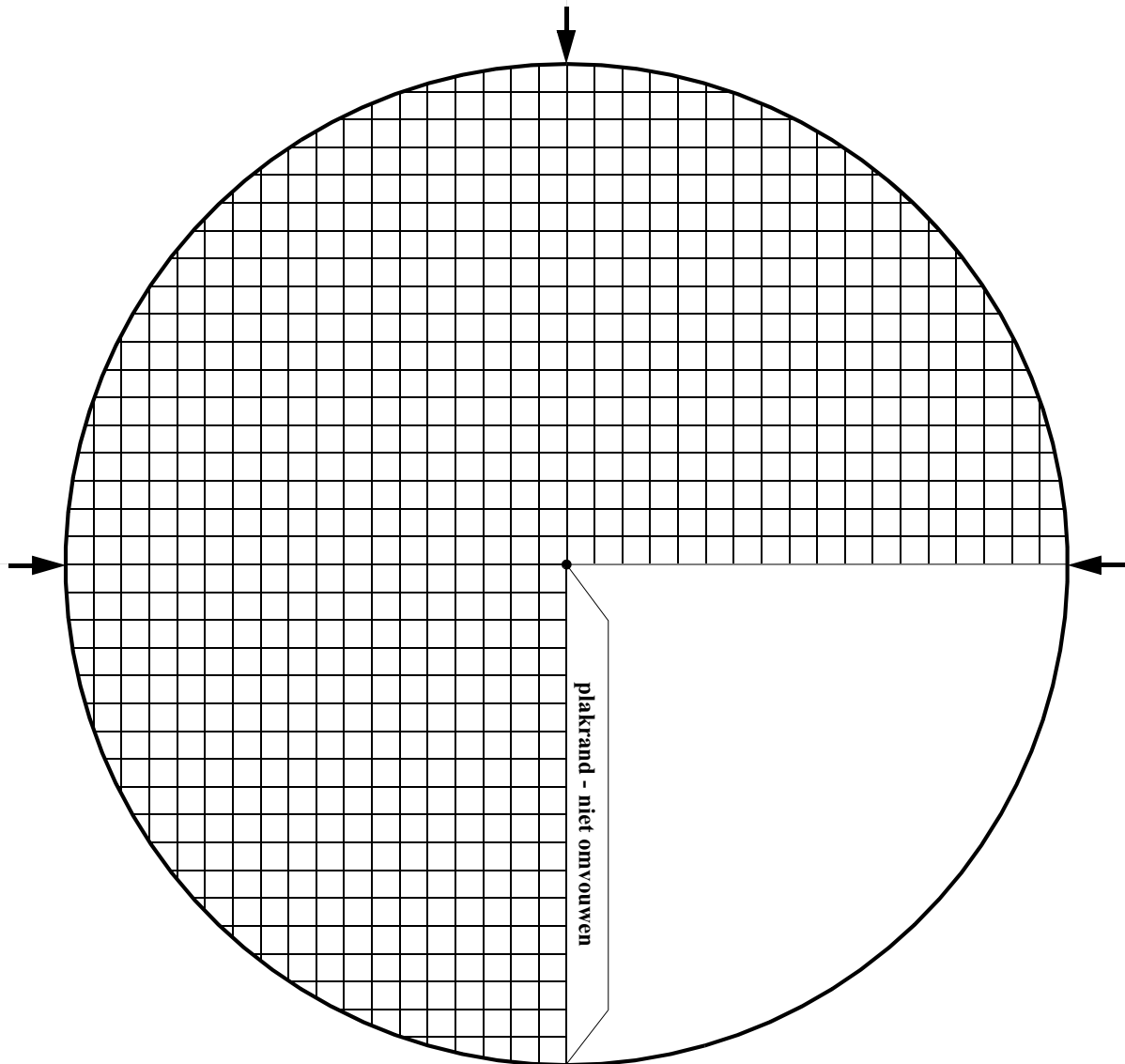
Knip de cirkel uit. Knip langs de plakrand naar het midden.

Breng je puntmuts in de vorm die je wilt, voor een scherpere punt schuif je de plakrand verder onder de rest van de cirkel. Nu weet je waar je van de cirkelrand af naar het midden moet knippen om het overbodige stuk van de cirkel te verwijderen.

Vouw de plakrond niet om, maar bij scherpgepunte mutsen moet je vooral het bovendee van de plakrand wel rondbuigen.

bouwplaat B

geruite puntmutsen - drie modellen

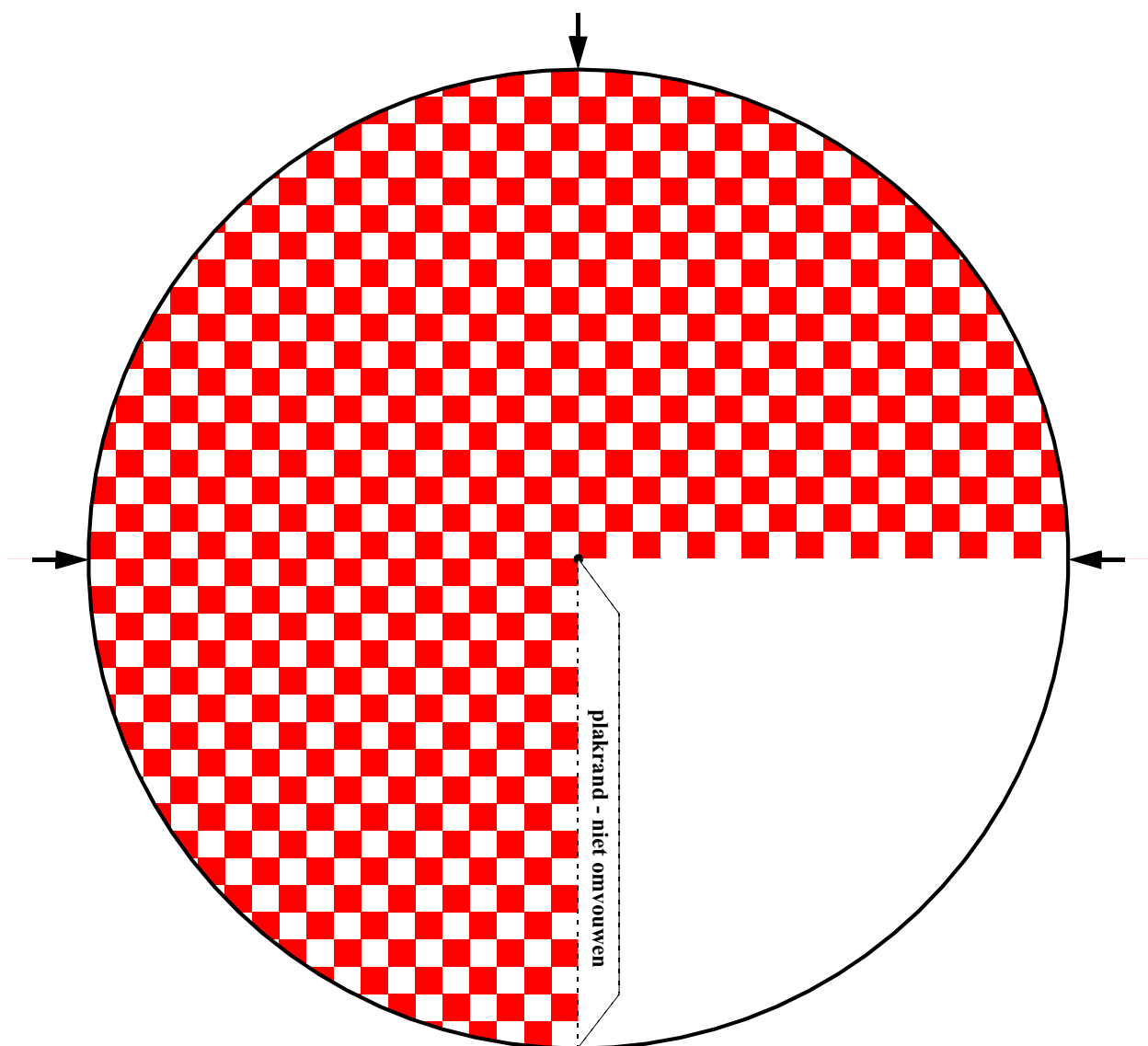


Knip langs de plakrand naar het midden.
Knip vanaf een van de drie pijlen naar het midden.
Knip tot slot de cirkel uit.

Laat bij het plakken de ruitjes precies doorlopen!

bouwplaat C

mooie roodwitte puntmuts - uniek exemplaar

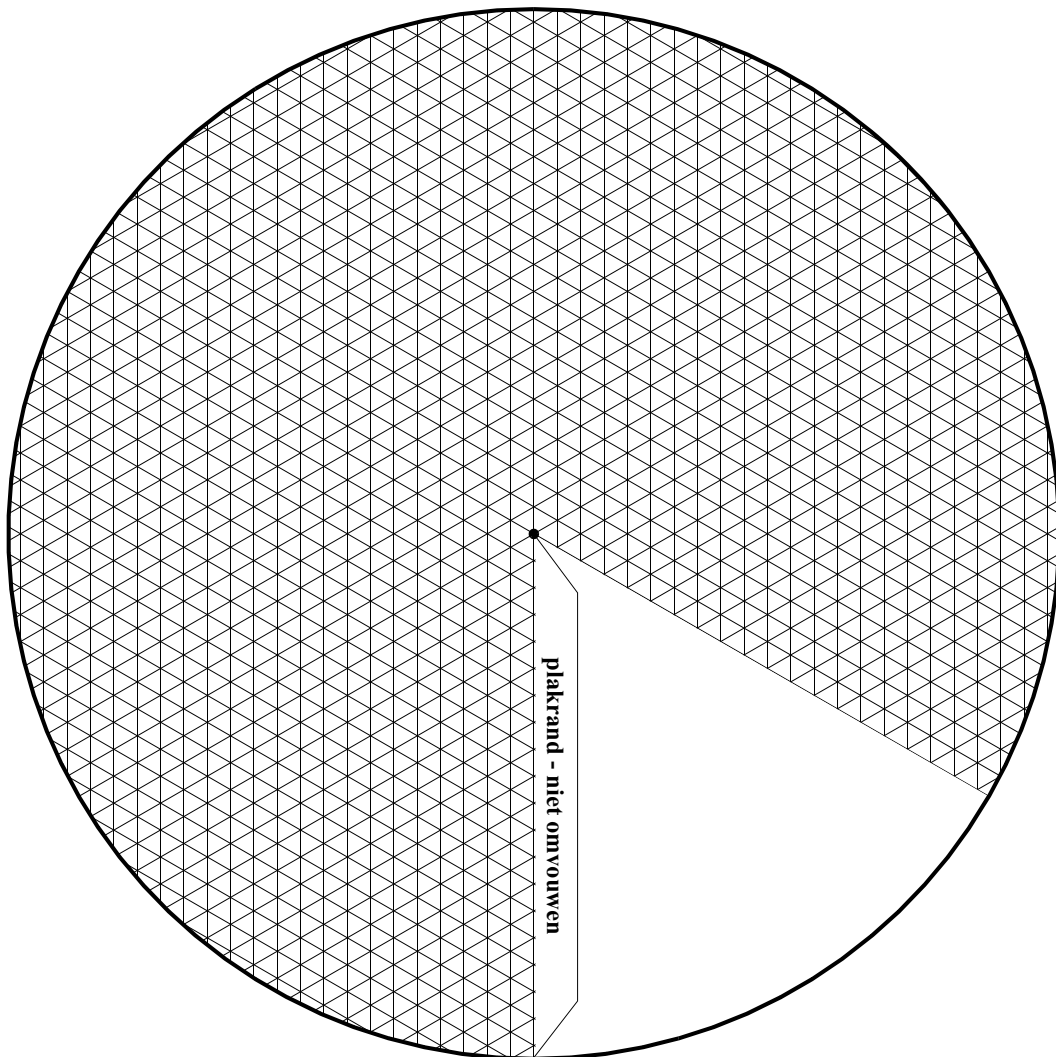


Knip langs de plakrand naar het midden.
Knip vanaf een van de drie pijlen naar het midden.
Knip tot slot de cirkel uit.

Laat bij het plakken de ruitjes precies doorlopen.

bouwplaat D

triangel puntmutsen - hoeveel?



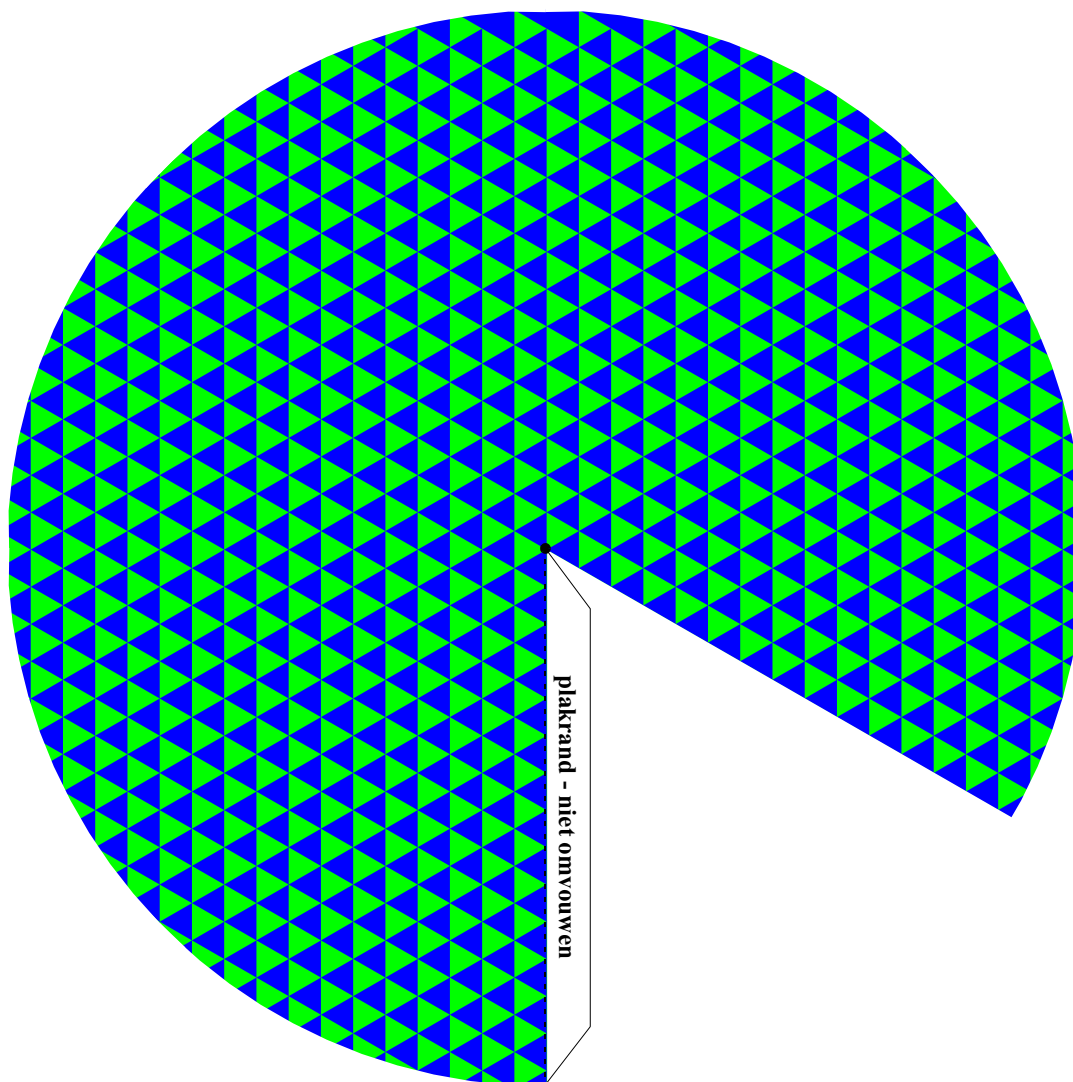
Knip langs de plakrand naar het midden.
Knip vanaf één van de vijf geschikte plekken
naar het midden.

Knip tot slot de cirkel uit.

Zorg dat het patroon over de plaknaad mooi doorloopt.

bouwplaat E

groenblauwe triangel puntmutsen - uniek?

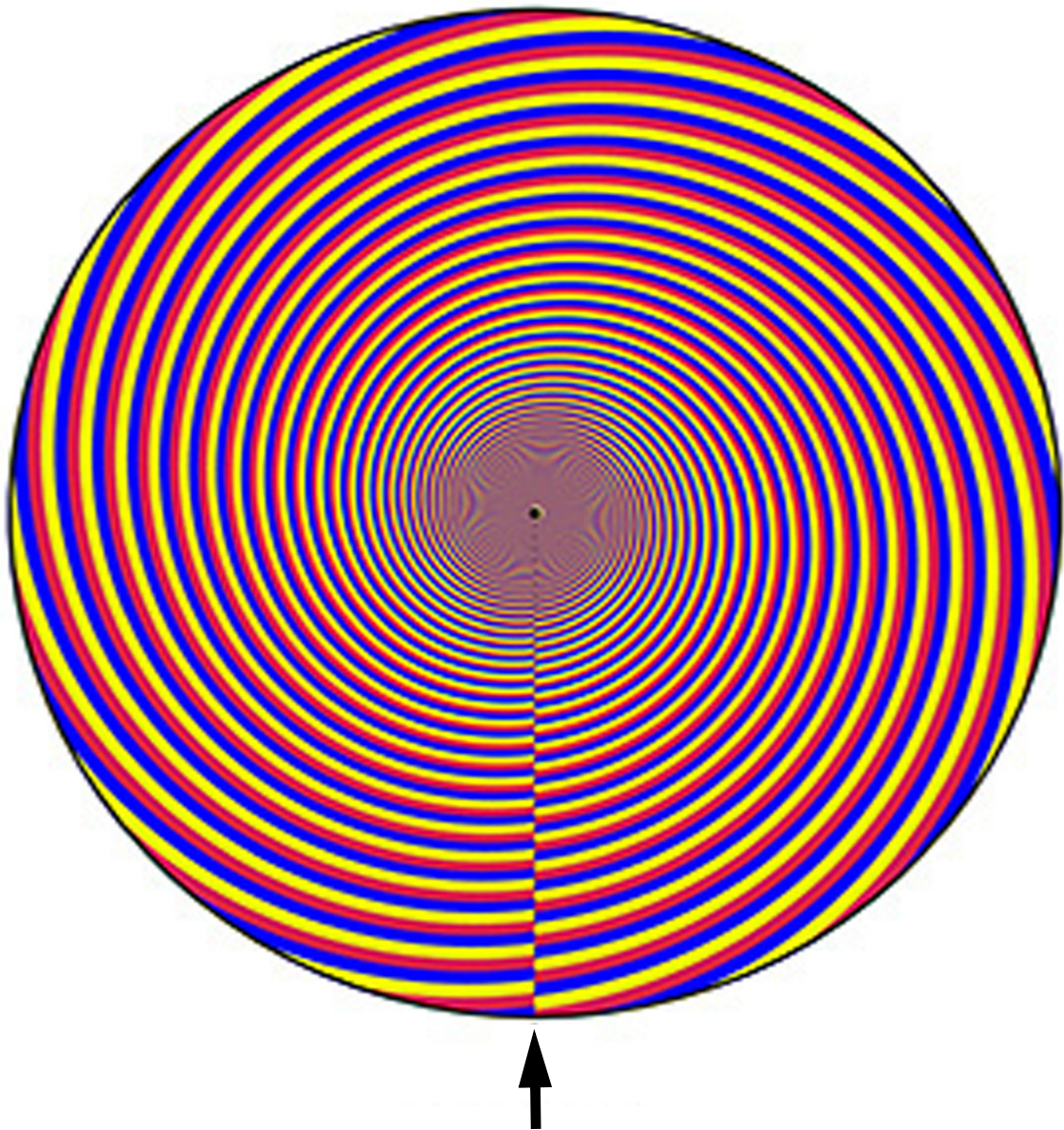


Knip langs de plakrand naar het midden.
Knip vanaf één van de vijf geschikte plekken
naar het midden.
Knip tot slot de cirkel uit.

Vouw de plakrond niet om, maar buig wel vóór het plakken
de puntmuts in de goede vorm.

bouwplaat F

spiraal puntmutsen - diverse modellen



Knip de cirkel uit.
Knip vanaf de pijl naar het midden.

Probeer nu wat voor bijzondere puntmutsen je kunt maken.
Je kunt de spiraallijnen door laten lopen,
al dan niet met kleurverspringingen.