Instructie in rationale getallen: moeilijkheden en uitdagingen

F. Depaepe, P. Van Roy, I. Hawrijk, A. Palmaerts, N. Vermeersch, J. Torbeyns, L. Verschaffel & W. Van Dooren
Katholieke Universiteit Leuven, België

De overgang van natuurlijke naar rationale getallen[1] verloopt voor de meeste leerlingen niet probleemloos. Ze schrijven de eigenschappen van natuurlijke getallen vaak ten onrechte toe aan rationale getallen, een fenomeen dat in de literatuur bekend staat als de 'natural number bias'. In deze bijdrage gaan we in op een analyse van de rol van instructie in het voorkomen en verhelpen van deze moeilijkheden in het domein van de rationale getallen. We bespreken eerst de resultaten van een analyse van de manier waarop rationale getallen aangebracht worden in drie Vlaamse wiskundemethodes voor het basisonderwijs. Vervolgens gaan we in op de vakinhoudelijke en vakdidactische kennis van leerkrachten inzake rationale getallen, met bijzondere aandacht voor studenten uit de lerarenopleiding.

1 Moeilijkheden van leerlingen met rationale getallen

Breuken en kommagetallen worden beschouwd als een van de moeilijkste wiskundige domeinen in de basisschool (Zhou, Peverly & Xin, 2006). Toch is een goede kennis van rationale getallen een belangrijke basis voor het leren van meer geavanceerde wiskundige inhouden zoals algebra en kansrekening (Behr, Lesh, Post & Silver, 1983; Lamon, 2005). In Vlaanderen blijken de moeilijkheden die leerlingen ondervinden bij het begrijpen van en omgaan met rationale getallen onder meer uit de resultaten van de peilingsproef voor wiskunde op het einde van het basisonderwijs[2] (Departement Onderwijs, 2010): maar liefst 36 procent van de leerlingen haalt de minimumdoelstellingen voor (bewerkingen met) breuken en kommagetallen niet; voor procentberekening in toepassingssituaties ligt dit percentage zelfs nog hoger, namelijk 41 procent. Dat leerlingen moeilijkheden ondervinden bij het leren van rationale getallen blijkt ook uit internationaal onderzoek (Cramer, Post & delMas, 2002; Moss & Case, 1999; Ni & Zhou, 2005; Vamvakoussi & Vosnidou, 2004; Zhou, Peverly & Xin, 2006).
Een belangrijke oorzaak voor de moeilijkheden van leerlingen met rationale getallen, vormt het begrip van getallen dat zij hebben opgebouwd op basis van hun eerder ervaringen met natuurlijke getallen. Bij het verwerven van inzicht in rationale getallen moeten er immers een aantal grote conceptuele sprongen gemaakt worden (Lamon, 2005). Leerlingen beroepen zich op hun voorkennis over natuurlijke getallen om betekenis te geven aan en te werken met rationale getallen (Ni & Zhou, 2005). Deze voorkennis kan worden beschouwd als een persoonlijke en impliciete theorie waarvan de leerlingen zich nauwelijks bewust zijn. Die theorie ontwikkelen leerlingen zowel binnen als buiten de school en met name tijdens het opereren met natuurlijke getallen. In sommige situaties helpt deze voorkennis leerlingen in het leerproces. Bijvoorbeeld, op basis van deze voorkennis zullen leerlingen begrijpen dat $\frac{4}{5}$ groter is dan $\frac{3}{5}$ (want 4 is groter dan 3) of dat 0,6 twee keer zo groot is als 0,3 (want 0,3 + 0,3 = 0,6). Maar in andere situaties strookt de theorie die leerlingen opbouwden over natuurlijke getallen niet met de eigenschappen van rationale getallen, bijvoorbeeld $\frac{3}{4} + \frac{1}{5} \neq \frac{3+1}{4+5}$.
Deze voorkennis over natuurlijke getallen kan op deze manier storend werken en zelfs misvattingen over het rationale getalbegrip en over bewerkingen met rationale getallen met zich meebrengen. Wanneer leerlingen opgaven met rationale getallen systematisch fout oplossen ten gevolge van het generaliseren van hun voorkennis over natuurlijke getallen naar situaties waar deze niet van toepassing is, spreekt men van de *natural number bias* (Vamvakoussi, Christou, Mertens & Van Dooren, 2011; Vamvakoussi, Van Dooren & Verschaffel, 2012). Deze *natural number bias* - door anderen ook de *whole number bias* (Ni & Zhou, 2005) of *whole number dominance* (Behr, Wachsmuth, Post & Lesh, 1984) genoemd - is in de onderzoeksliteratuur voor minstens vier aspecten gedocumenteerd. Een eerste aspect betreft het vergelijken en ordenen van rationale getallen. Zo denken leerlingen vaak onterecht dat $\frac{5}{9}$ groter is dan $\frac{5}{7}$, omdat 9 groter is dan 7. Of veronderstellen ze dat 0,425 groter is dan 0,5, omdat 425 groter is dan 5. Het tweede aspect heeft betrekking op bewerkingen met rationale getallen. Bijvoorbeeld, leerlingen kunnen onterecht besluiten dat $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{5}{9}$, omdat 2 + 3 gelijk is aan 5 en 5 + 4 gelijk is aan 9. Hetzelfde geldt voor bewerkingen

Depaepe, F., P. Van Roy, I. Hawrijk, A. Palmaerts, N. Vermeersch, J. Torbeyns, L. Verschaffel & W. Van Dooren. (2014). Instructie in rationale getallen: moeilijkheden en uitdagingen. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 33,* 86-94.

met kommagetallen waar bijvoorbeeld vaak wordt aangenomen dat 0,9 : 0,3 = 0,3, omdat 9 : 3 = 3. De misvatting dat vermenigvuldigen altijd groter maakt en delen altijd kleiner maakt, heeft ook zijn wortels in bewerkingen met natuurlijke getallen. Als derde aspect verwijzen we naar het continue karakter van rationale getallen. Op basis van eerdere ervaringen met natuurlijke getallen besluiten leerlingen vaak onterecht dat 0,51 de unieke opvolger is van 0,50, want na het natuurlijk getal 50 komt 51. Analoog is de onterechte veronderstelling dat er maar één rationaal getal ligt tussen $\frac{4}{7}$ en $\frac{6}{7}$ of tussen 8 en 10. Het vierde aspect betreft de representaties van rationale getallen, bijvoorbeeld onterecht verwerpen dat $\frac{4}{1}$, $\frac{16}{4}$, $\frac{24}{6}$, 4 en 4.00 hetzelfde rationale getal voorstellen, aangezien leerlingen voor de introductie in rationale getallen slechts met één representatie van een natuurlijk getal, met name '4', geconfronteerd werden (Vamvakoussi e.a., 2012; Van Hoof, Vandewalle, Verschaffel & Van Dooren, 2014).

2 Effectieve instructie in rationale getallen

Indien er in de instructie over rationale getallen geen extra aandacht besteed wordt aan de verschillende kenmerken van natuurlijke en rationale getallen, bestaat het gevaar dat leerlingen de nieuwe informatie over rationale getallen integreren in hun bestaande conceptuele schema's (met name in hun voorkennis) over natuurlijke getallen zonder die schema's zelf te herstructureren (Ni & Zhou 2005). Wil men de beoogde conceptuele veranderingen (*conceptual change* (Vosniadou & Verschaffel, 2004)) in de kennis van leerlingen over getallen bereiken, dan is het belangrijk om tijdens de instructie leerlingen te laten ervaren dat allerhande vooronderstellingen, die ze eerder ontwikkeld hebben op basis van hun ervaringen met natuurlijke getallen, niet langer gelden bij rationale getallen. Expliciet aandacht besteden aan deze discrepanties kan tot minstens twee inzichten bij leerlingen leiden. Ten eerste kunnen zij ervaren dat bepaalde naïeve veronderstellingen over getallen en bewerkingen met getallen niet gelden. Ze merken bijvoorbeeld dat vermenigvuldigen, in tegenstelling tot wat zij altijd gedacht hebben, niet altijd groter maakt. Ten tweede leren ze verfijningen aanbrengen in deze veronderstellingen, die leiden tot een beter getalbegrip. Leerlingen verwerven bijvoorbeeld het inzicht dat het resultaat van het vermenigvuldigen met een getal groter maakt, terwijl het resultaat van een vermenigvuldiging met een getal kleiner dan 1 kleiner maakt. Meerdere interventiestudies bevestigden de doeltreffendheid van instructie die expliciet gericht is op betekenisgeving van het rationale getalbegrip en aandacht schenkt aan de voorkennis van leerlingen (Cramer e.a., 2002; Mack, 1990; Moss & Case, 1999). Ondanks de gevonden positieve effecten van instructie waarbij de overgang van natuurlijke naar rationale getallen expliciet wordt gemaakt, zijn er indicaties dat in de onderwijspraktijk slechts weinig aandacht wordt besteed aan de betekenisgeving van leerlingen aan deze nieuwe getallen en hun relatie met natuurlijke getallen (Moss & Case, 1999). Instructie in rationale getallen lijkt veeleer gericht op de goede beheersing van de procedures voor het opereren met deze getallen. Als gevolg daarvan wordt er weinig of geen aandacht geschonken aan de herstructurering van de conceptuele kennisbasis van leerlingen bij de overgang van natuurlijke naar rationale getallen.

In deze bijdrage brengen we verslag uit van twee gerelateerde studies die deel uitmaken van een ruimer onderzoeksproject naar instructie in rationale getallen in de Vlaamse onderwijscontext. In dit onderzoeksproject hebben we aandacht voor twee belangrijke determinanten van kwaliteitsvolle instructie, met name (1) de gehanteerde wiskundemethodes voor het onderwijzen van rationale getallen en (2) de kennisbasis van (toekomstige) leerkrachten inzake rationale getallen. In deze bijdrage besteden we achtereenvolgens aandacht aan een handboekanalyse van drie Vlaamse wiskundemethodes (paragraaf 3) en een meting van de vakinhoudelijke en vakdidactische kennis van toekomstige leerkrachten in drie lerarenopleidingen (paragraaf 4).

3 Rationale getallen in Vlaamse wiskundemethodes

Een belangrijke bron waar leerkrachten zich door laten inspireren tijdens hun instructie in rationale getallen is de wiskundemethode en in het bijzonder de handleiding voor de leerkracht. De handleiding beïnvloedt niet enkel de manier waarop les wordt gegeven, maar tevens hoe leerlingen de leerstof verwerken. Samen met twee masterstudenten onderzochten we de manier waarop rationale getallen aangebracht worden in Vlaamse wiskundemethodes. We selecteerden de drie meest gebruikte wiskundemethodes in Vlaanderen. In de handleidingen voor het tweede[3] (groep 4) tot zesde leerjaar (groep 8) gingen we op een systematische manier na of en op welke manier er verwezen werd naar natuurlijke getallen bij het aanleren van leerinhouden die betrekking hebben op een van de hoger genoemde aspecten (zie paragraaf 1) met name, (1) de grootte van rationale getallen, (2) bewerkingen met rationale getallen, (3) het continue karakter van rationale getallen en (4) representaties van rationale getallen. Voor elk van de vier aspecten analyseerden we of er verschillen en/of gelijkenissen tussen natuurlijke en rationale getallen aan bod kwamen en of deze verschillen en/of gelijkenissen werden geëxpliciteerd (letterlijk neerschrijven dat het een

Handboek	Lj.	Grootte				Bewerkingen				Continuïteit				Representaties*			
		E≠	I≠	I=	E=	E≠	I≠	I=	E=	E≠	I≠	I=	E=	E≠	I ≠	I=	E=**
Methode1	2		1		1										1		
	3		2	1				2							1		
	4		3	2			3	9			2				4		
	5		6	1			9	10			1				7		
	6		4	1			14	9			1				5		
Methode2	2							1									
	3							1							1		
	4		2	2			1	4	2		1				4		
	5		2	2			6	7							5		
	6		1				8	8	3		1				5		
Methode3	2																
	3							1									
	4		1				2	5							1		
	5						7	8	1					1		1	
	6						7	5									

* De vier onderzochte aspecten zijn grootte van rationale getallen, bewerkingen met rationale getallen, het continue karakter van rationale getallen en representaties van rationale getallen.

** Voor elk van de vier aspecten werd nagegaan of verschillen (≠) of gelijkenissen (=) tussen rationale en natuurlijke getallen op een expliciete (E) of impliciete (I) manier benadrukt werden

figuur 1: expliciete en impliciete verschillen en gelijkenissen tussen natuurlijke en rationale getallen in Vlaamse wiskundemethodes

verschil/gelijkenis met natuurlijke getallen betreft) of impliciet (niet letterlijk neerschrijven dat het een verschil/gelijkenis met natuurlijke getallen betreft) vervat zaten in de manier waarop het aangebracht werd. Bijvoorbeeld:

> De leerlingen ervaren dat het vermenigvuldigen van een kommagetal met een natuurlijk getal op dezelfde manier verloopt als het vermenigvuldigen van een natuurlijk getal met een natuurlijk getal werd gescoord als een expliciete gelijkenis,

terwijl:

> Voor delingen waarbij de deler kleiner is dan 1, is het belangrijk voor leerlingen dat ze begrijpen en benadrukken dat het quotiënt groter is dan het deeltal. De leerlingen kunnen dit inzicht gebruiken om hun verkregen oplossingen te controleren. Door dit inzicht te benadrukken, vermijd je dat leerlingen misvattingen over delen gaan ontwikkelen,

gecodeerd werd als een 'impliciet verschil' tussen natuurlijke en rationale getallen. Figuur 1 geeft de resultaten van deze handboekanalyse voor elk van de vier onderzochte aspecten weer. We geven hierna een korte samenvatting van de belangrijkste onderzoeksresultaten (voor een uitgebreidere beschrijving, verwijzen we naar Depaepe, Torbeyns, Verschaffel & Van Dooren, 2012). Allereerst is het opvallend dat er over alle leerjaren heen in de drie wiskundemethodes slechts één keer op een expliciete manier verwezen wordt naar een verschil tussen natuurlijke en rationale getallen. De manier waarop dit gebeurt, wordt weergegeven in figuur 2.

Noteer op het bord: 12,456
Vragen en opdrachten:
– *Is dit een natuurlijk getal?*
– *Hoe noem je dergelijk getal? (kommagetal)*
– *Waarom noem je deze getallen zo?* (kommagetal omdat je er een komma in noteert)

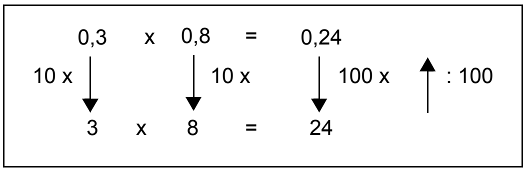
figuur 2: expliciet verschil tussen natuurlijke en rationale getallen met betrekking tot representaties

In dit fragment geeft de leerkrachtenhandleiding aan dat leerkrachten de vraag moeten stellen of 12,4856 een natuurlijk getal is. Het onderscheid tussen natuurlijke getallen en rationale getallen, en meer specifiek kommagetallen, wordt hier met andere woorden expliciet vermeld. Aangezien de bespreking over het verschil tussen natuurlijke en rationale getallen de schrijfwijze betreft, hebben we dit gescoord onder het aspect ‘representaties’. Echter, hoewel dit fragment uit de leerkrachtenhandleiding als een expliciet verschil werd gecodeerd, wordt er niet echt stilgestaan bij de conceptuele verschillen tussen natuurlijke en rationale getallen wat betreft de aard van de representatiewijzen en gebeurt de expliciete beschrijving eerder op een oppervlakkige manier.

In tegenstelling tot de beperkte expliciete vermeldingen van verschillen tussen natuurlijke en rationale getallen, stellen we meerdere verwijzingen naar expliciete gelijkenissen tussen natuurlijke en rationale getallen vast. Deze expliciete gelijkenissen hebben voornamelijk betrekking op het domein van bewerkingen. Bijvoorbeeld:

> Bij het aanbrengen van bewerkingen met rationale getallen kan men best starten vanuit gelijkenissen met natuurlijke getallen.

Hoewel deze aanpak vruchtbaar kan zijn voor het aanleren van het vermenigvuldigen van kommagetallen, zoals weergegeven in figuur 3, bestaat de kans erin dat leerlingen deze aanpak onterecht generaliseren naar het delen van kommagetallen. De leerlingen zien bij het vermenigvuldigen dat ze beide factoren mogen vermenigvuldigen met 10, waarna ze het product moeten delen door 100. Als hier geen expliciete aandacht wordt besteed aan de reden waarom deze regel werkt en hoe het eraan toegaat bij het delen van kommagetallen, bestaat de kans dat leerlingen ook bij het delen van kommagetallen eenzelfde strategie toepassen. Bijvoorbeeld: 0,8 : 0,4 wordt dan 8 : 4 en het ‘tussentijds quotiënt’ (wat in werkelijkheid het definitieve quotiënt is) wordt vervolgens onterecht gedeeld door 100, wat 0,2 is.



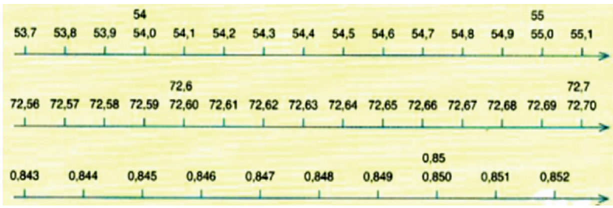
figuur 3: expliciete gelijkenis tussen natuurlijke en rationale getallen met betrekking tot bewerkingen

Daarnaast constateren we een toename in het aantal expliciete en impliciete verwijzingen naar gelijkenissen en verschillen tussen natuurlijke en rationale getallen tussen het tweede en het zesde leerjaar. Dit is wellicht mede te verklaren doordat er in de hogere jaren meer tijd wordt besteed aan breuken en kommagetallen.
Ten slotte zijn de meeste verwijzingen naar gelijkenissen en verschillen tussen natuurlijke en rationale getallen impliciet aanwezig in de geanalyseerde methodes. Het aanreiken van een aantal impliciete verschillen tussen natuurlijke en rationale getallen in de wiskundemethodes biedt zeker aangrijpingspunten om in de klas stil te staan bij mogelijke discrepanties tussen de voorkennis van leerlingen over natuurlijke getallen en de nieuwe kennis over rationale getallen. Een mooie illustratie hiervan vinden we in figuur 4, waarbij expliciet de misvatting dat delen altijd kleiner maakt wordt tegengegaan. Dit fragment werd als een impliciet verschil tussen natuurlijke en rationale getallen gecodeerd omdat er geen letterlijke verwijzing naar natuurlijke getallen wordt gemaakt.

> Bij deze deling is het belangrijk dat de leerlingen inzien en verwoorden dat het quotiënt groter is dan het deeltal wanneer de deler kleiner is dan 1. De leerlingen kunnen dit inzicht gebruiken voor een vlugge controle van de resultaten. Door dit inzicht te benadrukken, vermijd je ook dat leerlingen zich foutieve voorstellingen over de deling vormen (zoals: bij het delen is het quotiënt altijd kleiner dan het deeltal).

figuur 4: impliciet verschil tussen natuurlijke en rationale getallen met betrekking tot bewerkingen

Echter, impliciete en/of onvolledige passages in de wiskundemethodes kunnen ook misvattingen bij leerlingen versterken. Bijvoorbeeld, de geïntroduceerde regel: Hoe groter de noemer, hoe kleiner de breuk. Hoe kleiner de noemer, hoe groter de breuk, kan misvattingen veroorzaken als niet expliciet wordt aangegeven dat het om gelijke tellers gaat, want hoewel de noemer in $\frac{8}{14}$ groter is dan in $\frac{4}{7}$ is de eerste breuk niet kleiner dan, maar gelijkwaardig aan de tweede. Analoog weerspiegelt figuur 5 dat betreffende het continue karakter van rationale getallen mogelijke misvattingen bij leerlingen kunnen ontstaan door niet expliciet aan te geven dat er tussen elke twee getallen oneindig veel rationale getallen liggen. Leerlingen kunnen hierdoor onterecht denken dat er tussen 54 en 55 slechts negen getallen liggen (met name 54.1, 54.2, 54.3, …, 54.9). Hetzelfde geldt voor de daaronder vermelde getallenlijnen.



figuur 5: impliciet verschil tussen natuurlijke en rationele getallen met betrekking tot het continue karakter

Bij deze belangrijkste resultaten van onze eerste studie willen we opmerken dat naast de wiskundemethode ook de wijze waarop een leerkracht omgaat met een wiskundemethode bepalend is voor de kwaliteit van instructie en het leerproces van leerlingen (Depaepe, De Corte & Verschaffel, 2007, 2010; Stein & Smith, 2010). Hopelijk zullen leerkrachten de - hoofdzakelijk impliciete - kansen in de wiskundemethodes aangrijpen om leerlingen te laten ervaren dat bepaalde denkwijzen over natuurlijke getallen bij rationale getallen niet meer volstaan en dat een bijsturing van eerdere concepten nodig is om een beter rationaal getalbegrip te ontwikkelen. Deze aanpak vereist naast een degelijke vakinhoudelijke kennisbasis (met name conceptuele en procedurele kennis inzake rationale getallen) ook een zeer goede vakdidactische kennisbasis (met name kennis over geschikte instructietechnieken en representaties voor het onderwijzen van rationale getallen en kennis over moeilijkheden van leerlingen inzake rationale getallen) van leerkrachten. Op deze kennisbasis bij toekomstige leerkrachten gaan we nu in.

4 Vakinhoudelijke en vakdidactische kennis

De vakinhoudelijke en vakdidactische kennis van (toekomstige) leerkrachten in het domein van de rationale getallen is een belangrijk fundament van de kwaliteit van het onderwijs en de leereffecten bij leerlingen (Baumert, Kunter, Blum, Brunner, Voss, Jordan, Klusmann, Krauss, Neubrand & Tsa.i, 2010; Kunter, Klusmann, Baumert, Richter, Voss & Hachfelde, 2013). Er zijn echter aanwijzingen dat er tekorten zijn in de vakinhoudelijke en vakdidactische kennis van (toekomstige) leerkrachten betreffende het vak wiskunde in het algemeen (KNAW, 2009; Ma, 1999; Verschaffel, Janssens, & Janssen, 2005) en het domein van de rationale getallen in het bijzonder. Wat de vakinhoudelijke kennis van leerkrachten over rationale getallen betreft, tonen studies aan dat zowel toekomstige leerkrachten (Merenluoto & Lehtinen, 2004) als leerkrachten in het werkveld (Izsák, Orrill, Cohen & Brown, 2010) onvoldoende de inhouden beheersen die ze verwacht worden te onderwijzen. Zo houden ze er zelf diverse misvattingen over rationale getallen op na, bijvoorbeeld met betrekking tot het continue karakter van rationale getallen. Wat de vakdidactische kennis betreft, blijken leerkrachten en toekomstige leerkrachten het moeilijk te hebben bij het bedenken van geschikte rekenverhalen voor bewerkingen met rationale getallen (Ball, 1990) en zijn ze vaak niet op de hoogte van veel voorkomende fouten bij leerlingen en mogelijke oorzaken ervan (Mack, 1990; Tirosh, 2000).

Aansluitend bij internationale studies over ontoereikende kennis van (toekomstige) leerkrachten in het domein van de rationale getallen, hebben we op een systematische manier de vakinhoudelijke en vakdidactische kennis van 158 toekomstige leerkrachten basisonderwijs uit drie Vlaamse lerarenopleidingen in kaart gebracht (Depaepe, Torbeyns, Vermeersch, Janssens, Kelchtermans, Verschaffel & Van Dooren, 2013). De deelnemers aan de studie behoorden tot het tweede opleidingsjaar[4] en hadden in dat jaar lessen over (het onderwijzen) van rationale getallen gevolgd. We ontwikkelden een toets voor het meten van de vakinhoudelijke en vakdidactische kennis over rationale getallen. Zoals weergegeven in figuur 6, bestond de toets uit 48 items en omvatte ze verschillende domeinen.
De helft van de items betrof breuken, de andere helft had betrekking op kommagetallen. Een aantal items mat de kennis over het concept breuk of kommagetal, terwijl andere items bewerkingen met breuken en kommagetallen betroffen. Parallel met Shulmans (1986) conceptualisering van *pedagogical content knowledge* - of vrij vertaald vakdidactische kennis - onderscheidden we twee dimensies, met name kennis van (mis)concepties bij leerlingen (leerlingdimensie) en kennis van representaties en instructiestrategieën (instructiedimensie). De vakinhoudelijke en vakdidactische items waren complementair in

			Vakinhoudelijke Kennis	Vakdidactische Kennis	
				Leerling	Instructie
Breuken	Concept		4	2	2
	Bewerkingen	Optellen	2	1	1
		Aftrekken	2	1	1
		Vermenigvuldigen	2	1	1
		Delen	2	1	1
Kommagetallen	Concept		4	2	2
	Bewerkingen	Optellen	2	1	1
		Aftrekken	2	1	1
		Vermenigvuldigen	2	1	1
		Delen	2	1	1
Totaal			24	12	12

figuur 6: design van vakinhoudelijke en vakdidactische toets

die zin dat ze betrekking hadden op eenzelfde wiskundige bewerking of aspect van het rationale getalbegrip en dat ze een gelijkaardige moeilijkheidsgraad van getallen omvatten. Een voorbeeld van een complementair vakinhoudelijk en vakdidactisch item met betrekking tot het continue karakter van rationale getallen is weergegeven in figuur 7.

Vakinhoudelijk item
Rangschik de volgende getallen van klein naar groot.
0,33 0,8 0,242 0,4 0,71

Vakdidactisch item
Rangschik de volgende getallen van klein naar groot.
0,53 0,7 0,475 0,12 0,3
Een leerling lost de vraag als volgt op:
0,3 0,7 0,12 0,53 0,475
Noteer de vermoedelijke redenering van de leerling en evalueer of het antwoord van de leerling correct is.

figuur 7: een vakinhoudelijk en complementair vakdidactisch item (leerlingdimensie) over het concept kommagetallen

Het niveau van de toetsvragen was de bovenbouw van het basisonderwijs (groep 8). De toets was onderverdeeld in twee subtoetsen van 24 items (twaalf vakinhoudelijke en twaalf vakdidactische). Tussen de afname van beide subtoetsen was er één week. De complementaire items werden gesplitst over de twee subtoetsen, opdat de deelnemers het antwoord op het voorgaande complementair item niet konden gebruiken om het gerelateerde item te beantwoorden.
De resultaten van deze studie tonen allereerst dat toekomstige leerkrachten matig scoren op de vakinhoudelijke items (M = .77; SD = .15), zeker wanneer we rekening houden met het niveau van de toetsvragen. Specifieke moeilijkheden van toekomstige leerkrachten zijn veelal gerelateerd aan bewerkingen met breuken en kommagetallen, waarbij ze moeilijkheden ondervinden om vraagstukken in een wiskundig model te vertalen of om een kale operatie met rationale getallen correct uit te voeren (fig.8).

Los op met behulp van hoofdrekenen en noteer je werkwijze.
0,9 : 0,3 = ***0,3***

figuur 8: illustratie van een verkeerde oplossing van een toekomstige leerkracht op een vakinhoudelijk item

Bovendien merken we dat niet enkel leerlingen, maar ook toekomstige leerkrachten lijden aan de *natural number bias*. Zo kon slechts de helft van de toekomstige leerkrachten aangeven dat er oneindig veel getallen tussen 7,2 en 7,4 liggen. Typische voorbeelden van antwoorden van leerkrachten bij deze opgave zijn ‘1’(7,3), ‘19’ (7,21, 7,22, 7,23, …) of ‘20’ (7,20 ← → 7,40).
Ten tweede scoren leerkrachten significant zwakker op de vakdidactische items (M = .58; SD = .15) dan op de vakinhoudelijke items. Specifieke moeilijkheden hebben opnieuw betrekking op opgaven met bewerkingen met breuken en kommagetallen. Zo vinden toekomstige leerkrachten het lastig om een vraagstuk te bedenken voor een gegeven operatie met rationale getallen of hebben ze, zoals weergegeven in figuur 9, moeilijkheden om een (fictief) leerlingenantwoord te interpreteren.

Gegeven:
Een leerling werkt de volgende oefening als volgt uit:
Los op:
2,98 + 0,2 = ***3***
Gevraagd:
a) Is dit antwoord juist of fout?
Juist
b) Noteer de vermoedelijke redenering van de leerling.
2,98 + 0,2 = 2,100 = 3

figuur 9: illustratie van een verkeerde oplossing van een toekomstige leerkracht op een vakdidactisch item

Ten derde hangt de vakinhoudelijke en vakdidactische kennis van toekomstige leerkrachten op een significant positieve manier samen.
En ten vierde blijkt voor bijna alle complementaire itemparen dat toekomstige leerkrachten in staat moeten zijn om het vakinhoudelijk item op te lossen voordat ze het vakdidactisch item kunnen oplossen. Het correct oplossen van het vakinhoudelijk item garandeert echter geen correcte oplossing van het vakdidactisch item, waardoor we - in lijn met Baumert en collega’s (2010) - kunnen concluderen dat de vakinhoudelijke kennis van toekomstige leerkrachten een noodzakelijke, maar geen voldoende voorwaarde is voor het beschikken over vakdidactische kennis met betrekking tot hetzelfde onderwerp.

5 Conclusie en discussie

In deze bijdrage zijn we ingegaan op moeilijkheden die leerlingen bij het leren van rationale getallen ervaren. We verklaarden deze moeilijkheden mede vanuit een kloof die bestaat tussen de voorkennis die leerlingen ontwikkelden op basis van hun ervaringen met natuurlijke getallen en de nieuwe leerstof die ze moeten verwerven over rationale getallen. Leerlingen vertonen veelal de neiging om principes van natuurlijke getallen te generaliseren, ook in situaties waar deze niet van toepassing zijn. Dit wordt de *natural number bias* genoemd (Vamvakoussi e.a., 2011, 2012). Om de *natural number bias* te voorkomen, is het belangrijk dat er in het onderwijzen van rationale getallen rekening wordt gehouden met de voorkennis van leerlingen en dat er ruimte is voor leerlingen om te ervaren dat bepaalde aspecten van hun voorkennis niet voldoen voor het leren werken met rationale getallen (Ni & Zhou, 2005). In deze bijdrage hebben we een onderzoeksproject, bestaande uit twee gerelateerde studies, gepresenteerd dat beoogt uitdagingen voor instructie op het domein van rationale getallen in kaart te brengen.

In de eerste studie analyseerden we de manier waarop rationale getallen aangebracht worden in drie Vlaamse wiskundemethodes. Deze handboekanalyse toonde aan dat er uiterst zelden aandacht besteed wordt aan discrepanties tussen de voorkennis van leerlingen over natuurlijke getallen en de leerstof over rationale getallen, en dat dit bovendien steevast op een impliciete manier gebeurt. Hoewel in een aantal gevallen bepaalde misvattingen van leerlingen worden tegengegaan, zoals de misvatting dat vermenigvuldigen altijd groter maakt en delen altijd kleiner, vonden we ook aanwijzingen dat bepaalde misvattingen kunnen worden versterkt: bijvoorbeeld, dat er een eindig aantal getallen ligt tussen twee rationale getallen en dat bewerkingen met rationale getallen dezelfde principes volgen als bewerkingen met natuurlijke getallen. Op basis van deze handboekanalyse is duidelijk dat er weinig aandacht wordt besteed aan het voorkomen of remediëren van de *natural number bias*. Daarom is het belangrijk dat toekomstige handboeken meer en explicieter aandacht besteden aan de overgang van natuurlijke naar rationale getallen. Tevens is het van belang dat docenten in de lerarenopleiding kritisch stil staan bij de inhoud en het gebruik van wiskundemethodes in de klas. Daarenboven moeten vooral leerkrachten over de nodige kennis beschikken om op een adequate manier deze wiskundemethodes te implementeren en daarbij de nodige aandacht besteden aan discrepanties tussen de voorkennis van leerlingen en de nieuw te verwerven kennis.

Een tweede studie bracht evenwel tekorten aan het licht in de kennisbasis van toekomstige leerkrachten uit drie Vlaamse lerarenopleidingen die reeds les hadden gekregen over (het onderwijzen van) rationale getallen. Uit dat onderzoek kunnen we concluderen dat Vlaamse toekomstige leerkrachten over een matige vakinhoudelijke en zwakke vakdidactische kennis beschikken. Deze resultaten zijn in de lijn met internationale studies inzake de vakinhoudelijke en vakdidactische kennis over rationale getallen bij (toekomstige) leerkrachten (bijvoorbeeld Ball, 1990; Izsák e.a., 2010; Mack, 1990; Merenluoto & Lehtinen, 2004; Tirosh, 2000). Gegeven deze vastgestelde beperkingen in de kennisbasis van toekomstige leerkrachten is het een uitdaging voor lerarenopleidingen om goede leraren op te leiden.

Rekening houdend met deze moeilijkheden die Vlaamse toekomstige leerkrachten ervaren is het belangrijk om vervolgonderzoek op te zetten waarin gepoogd wordt om deze kennisbasis van toekomstige leerkrachten inzake rationale getallen positief te beïnvloeden. Momenteel ontwikkelen we samen met drie Vlaamse lerarenopleidingen een nieuwe lessenreeks over (het onderwijzen van) rationale getallen. Deze lessenreeks wil zowel de vakinhoudelijke als vakdidactische kennis van toekomstige leerkrachten versterken. Analoog aan de conceptualisering van vakdidactische kennis door Shulman (1987) wil de lessenreeks zowel de kennis van leerkrachten inzake de misvattingen en moeilijkheden van leerlingen over rationale getallen als de kennis inzake representaties en instructietechnieken voor het onderwijzen van rationale getallen versterken. Voor dit eerste aspect maken we gebruik van *concept cartoons* (Keogh & Naylor, 1999) waarmee we toekomstige leerkrachten confronteren met de belangrijkste misvattingen van basisschoolleerlingen. Voor het tweede aspect wordt ingezet op het aanleren van een diverse waaier van concrete (C), schematische (S) en abstracte (A) representaties (CSA) voor het onderwijzen van rationale getallen. Hoewel deze studie nog in uitvoering is, resulteerde de implementatie van de lessenreeks al wel in positieve ervaringen bij zowel docenten als studenten. Tevens tonen de eerste globale analyses van de pretest- en posttestafnames een positief effect van deze lessenreeks, zowel op de vakinhoudelijke als vakdidactische kennis van toekomstige leerkrachten, in vergelijking met een controleconditie waarin toekomstige leerkrachten in hun opleidingsinstituut een even lang durende lessenreeks rond (het onderwijzen van) rationale getallen volgen in hun opleiding die verschilt op de twee hierboven vernoemde aspecten. Het is evenwel belangrijk om meer diepgaande analyses uit te voeren - met betrekking tot specifieke items waarop leerwinst wordt gemaakt - om conclusies te formuleren over de effectiviteit van de lessenreeks en aanbevelingen te formuleren in functie van de initiële opleiding en de verdere professionalisering van leerkrachten.

In deze bijdrage willen we echter niet suggereren dat de oorzaak van de moeilijkheden die leerlingen inzake rationale getallen ervaren uitsluitend in de instructie ligt. Eerder willen we aangeven dat de *natural number bias* in stand kan worden gehouden door een samenspel van de voorkennis van leerlingen over natuurlijke getallen en een instructie die onvoldoende aandacht besteedt aan het opbouwen van een adequaat begrip over rationale getallen (Ni & Zhou, 2005). Verder onderzoek naar de aanpak van rationale getallen in de concrete klaspraktijk en interventiestudies waarbij gepoogd wordt om het leren van rationale getallen bij leerlingen te bevorderen, zijn noodzakelijk met het oog op specifieke aanbevelingen ten dienste van de onderwijspraktijk.

Noten

1 Een rationaal getal dat kan worden uitgedrukt als een breuk $\frac{a}{b}$ waarbij a en b gehele getallen zijn. Rationele getallen kunnen verschillende symbolische representaties aannemen, waaronder breuken en kommagetallen. Natuurlijke getallen zijn onderdeel van de verzameling van rationele getallen. Wanneer het in deze bijdrage evenwel gaat over moeilijkheden die leerlingen bij het leren van rationale getallen ervaren, betreft dit de rationale getallen die geen natuurlijke getallen zijn.

2 Een peilingsproef is een grootschalige afname van toetsen bij een representatieve steekproef van scholen voor een bepaald domein, in dit geval wiskunde op het einde van het basisonderwijs (groep 8 in Nederland). Deze peiling gaat na in welke mate leerlingen de vooropgestelde eindtermen (kerndoelen) voor wiskunde hebben bereikt (www.peilingsonderzoek.be). Deze afname is erg gelijkaardig aan de periodieke peiling van het onderwijsniveau (PPON) in Nederland.

3 Het eerste leerjaar (groep 3) werd niet opgenomen in onze analyses, omdat rationale getallen daar nog niet aan bod komen.

4 In Vlaanderen bestaat de opleiding tot leraar lager onderwijs uit drie opleidingsjaren - een bacheloropleiding van hinderdtechtig studiepunten.

Literatuur

Ball, D.L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal, 90*, 449-466.

Baumert, J., M. Kunter, W. Blum, M. Brunner, M.T. Voss, A. Jordan, U. Klusmann, S. Krauss, M. Neubrand & Y.-M Tsai (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal, 47*, 133-180.

Behr, M.J., R. Lesh, T.R. Post & E. Silver, (1983). Rational number concepts. In: R. Lesh & M. Landau (Eds.). *Acquisition of mathematical concepts and processes.* New York: Academic Press, 92-127.

Behr, M.J., I. Wachsmuth, T.R. Post & R. Lesh (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*, 323-341.

Cramer, K. A., T.R. Post & R.C. delMas (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*, 111-144.

Depaepe, F., E. De Corte & L. Verschaffel (2007). Unraveling the culture of the mathematics classroom: A video-base study in sixth grade. *International Journal of Educational Research, 46*, 266-279.

Depaepe, F., E. De Corte & L. Verschaffel (2010). Teachers' approaches towards word problem solving: Elaborating or restricting the problem context. *Teaching and Teacher Education, 26*, 152-160.

Depaepe, F., J. Torbeyns, L. Verschaffe & W. Van Dooren (2012). Wat is er dan zo rationeel aan rationale getallen? Of hoe voorkennis niet (altijd) helpt. *School- en klaspraktijk,53,* 2-16.

Depaepe, F., J. Torbeyns, N. Vermeersch, D. Janssens, G. Kelchtermans, L. Verschaffel & W. Van Dooren (2013). *Vakinhoudelijke en vakdidactische kennis in het domein van de rationale getallen: een vergelijkende studie bij toekomstige leerkrachten lager en secundair onderwijs (groep 1).* Paper gepresenteerd op de Onderwijs Research Dagen: Vrije Universiteit Brussel.

Departement Onderwijs. (2010). *Tweede peiling wiskunde in het basisonderwijs.* Brussel: Agentschap voor Kwaliteitszorg in Onderwijs en Vorming.

Hoof, J. Van, J. Vandewalle, L. Verschaffel & W. Van Dooren (2014). In search for the natural number bias in secondary school students' interpretation of the effect of arithmetical operations. *Learning and Instruction*. DOI: 10.1016/j.learninstruc.2014.03.004.

Izsák, A., C.H. Orrill, A.S. Cohen & R.E. Brown (2010). Measuring middle grades teachers' understanding of rational numbers with the mixture Rasch model. *The Elementary School Journal, 110*, 279-300.

Keogh, B. & S. Naylor (1999). Concept cartoons, teaching and learning in science: an evaluation. *International Journal of Science Education, 21*, 431-446.

KNAW (2009). *Rekenonderwijs op de basisschool: Analyse en sleutels tot verbetering*. Amsterdam: Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen.

Kunter, M., U. Klusmann, J. Baumert, D. Richter, T. Voss & A. Hachfeld (2013). Professional competence of teachers: Effects on instructional quality and student development. *Journal of Educational Psychology, 105*, 805-820.

Lamon, S.J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers (2nd Ed.)*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics. Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Mack, N.K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*, 16-32.

Merenluoto, K. & E. Lehtinen (2004). Number concept and conceptual change: Towards a systematic model of the processes of change. *Learning and Instruction, 14*, 519-534.

Moss, J. & R. Case (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*, 122-147.

Ni, Y. & Y.-D Zhou (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40*, 27-52.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*, 4-14.

Schulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57,* 1-21

Stein, M.K. & M.S. Smith (2010). The role of curricular materials in elementary mathematics classrooms. In: D.V. Lambdin & F.K. Lester (Eds.). *Translating research to the ele-*

mentary classroom. Reston, VA: NCTM.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*, 5-25.

Vamvakoussi, X., J.P. Christou, L. Mertens & W. Van Dooren (2011). What fills the gap between discrete and dense? Greek and Flemish students' understanding of density. *Learning and Instruction, 21*, 676-685.

Vamvakoussi, X., W. Van Dooren & L. Verschaffel, (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*, 344-355.

Verschaffel, L., S. Janssens & R. Janssen (2005). Development of mathematical competence in pre-service elementary school teachers in Flanders. *Teaching and Teacher Education, 21*, 49-63.

Vosniadou, S. & L. Verschaffel (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. *Learning and Instruction*, *14*, 445-451.

Zhou, Z., S.T. Peverly & T. Xin (2006). Knowing and teaching fractions: A cross-cultural study of American and Chinese mathematics teachers. Contempora.

For most students the transition from natural to rational numbers is far from evident. Many incorrectly generalize properties of natural numbers to rational numbers, a phenomenon which is known in the research literature as the 'natural number bias'. In the present contribution we focus on the role of instruction in preventing and remediating students' learning difficulties in the rational number domain. First, we report on the results of an analysis of how rational numbers are approached in three Flemish elementary education textbooks. In addition, we discuss the content knowledge and pedagogical content knowledge of teachers on rational numbers, with a special emphasis on pre-service teachers.