



# Wiskundig denken stimuleren bij aanstaande leraren

## - verslag van een discussieronde tijdens de ELWIER-conferentie 2014 -

R. Keijzer, B. Zwaneveld, J.W. Brandsma, J. Faarts & I. Meijers<sup>1</sup>

*Jaarlijks discussiëren opleiders van de lerarenopleiding basisonderwijs met hun collega's uit de tweede en eerstegraads sector tijdens de ELWIER-conferentie over een actueel thema dat de verschillende typen opleidingsonderwijs bezighoudt. Tijdens de conferentie in 2014 was dit het wiskundig denken van studenten. Dit onderwerp werd vanuit verschillende perspectieven bekeken, waarbij de conclusie was dat er verschillende factoren zijn die het wiskundig redeneren door studenten eerder remmen dan stimuleren en er een taak voor de opleidingen licht dit te doorbreken.*

## 1 Inleiding

In het verleden en ook de laatste tijd is er aandacht voor de opvatting dat wiskunde niet alleen een verzameling begrippen en regels is, maar vooral een gebied waarin het denken een centrale rol speelt, af althans zou moeten spelen. Daarmee wordt bedoeld dat het naast die begrippen en regels ook over het aanpakken en oplossen van problemen moet gaan. In het basisonderwijs stond dit al centraal bij Wiskobas en is dit later uitgewerkt in onder meer de 'Proeve...' -reeks (Treffers, 1987; Treffers, De Moor & Feijs, 1989). Maar niet alleen in het basisonderwijs is er aandacht voor het wiskundig denken. Dit komt ook naar voren in het voortgezet onderwijs (Van Streun & Kop, 2013; Drijvers, in druk) en in het buitenland, zoals bijvoorbeeld de Verenigde Staten van Amerika in de 'Common Core State Standards' (Common Core State Standards Initiative, 2010).

Als dit probleemoplossen en wiskundig denken voor de leerlingen inderdaad belangrijk is dan geldt dit a fortiori voor hun leraren, zowel in het basisonderwijs als in het voortgezet onderwijs. Deze aandacht voor wiskundig denken werd dan ook - met zo veel woorden - vastgelegd in de 'Proeve voor de opleiding' (Goffree & Dolk, 1995) en in de 'Kennsbasis voor de pabo' (Van Zanten, Barth, Faarts, Van Gool & Keijzer, 2009). Tijdens de jaarlijkse ELWIER-conferentie van 21 november 2014 is in drie parallelwerkgroepen over het thema 'wiskundig denken stimuleren bij aanstaande leraren basis- en voortgezet onderwijs' gediscussieerd. In elk van deze werkgroepen waren er twee korte inleidingen door lerarenopleiders, gevolgd door een discussie over de twee stellingen die door de inleiders geponeerd werden.

We geven in dit verslag een kort overzicht van de inleidingen en discussies in de drie werkgroepen. We doen dat vanuit de volgende aspecten die respectievelijk in de drie werkgroepen aan de orde waren:

- het sturen van het leren door de toets;
- de opleider als rolmodel;
- beïnvloeden van de attitude van aanstaande leraren.

## 2 Toets als richtsnoer

Hanneke van Doornik-Beemer is lerarenopleider bij de Fontys-pabo in Eindhoven. Zij presenteert een voorbeeldles waarin ze laat zien hoe ze studenten aanzet tot wiskundig denken. Zij deelt de vragen die zij studenten stelt en opdrachten die ze geeft met de deelnemers aan de discussie:

- Welke opgaven kun je bedenken bij foto's van de pindakaaspotten (fig.1)?
- Welke bij foto's van chocomel-pakjes?

- Vervolgens gaan studenten zelf eerst aan de slag en ze bespreken de aanpakken met elkaar. Ze gaan dan na of het lukt op elkaar opgaven op te lossen.



figuur 1: verschillende pindakaaspotten

Van Doornik-Beemer richt de aandacht op verschillende niveaus en gebruikt daarbij de ijsbergmetafoor. Ze wijst de studenten ook op het nadenken over de beginsituatie van de collegastudenten. Ze vertelt hoe zij de les met de studenten evalueert op de punten interactie, samenwerken en ontwerpen. Dit brengt haar tot haar stelling over het stimuleren van wiskundig denken bij deze pabo-studenten.

### Stelling

*Wiskundig denken ontwerpen is voor studenten tegengesteld aan wat ze in de opleiding moeten leren voor de rekentoetsen en landelijke kennisbasistoets.*

Geeke Bruin-Muurling is docent vakdidactiek in de master wiskunde bij de Hogeschool Arnhem/Nijmegen. Zij geeft aan dat ze verwacht dat de wiskunde anders wordt door een veranderende samenleving en de inzet van ICT. Zij zet met studenten in op voorkennis van een bepaald onderwerp, maar wil ook aandacht voor wat het einddoel is. Wiskunde moet in haar ogen de oplossing zijn voor een probleem in plaats van dat de wiskunde zelf het probleem wordt. Zij herformuleert dit tot de stelling die ze met de groep wil bespreken.

### Stelling

*Zolang we in onze lessen en in het stellen van doelen voor het wiskundeonderwijs antwoord en taakgericht blijven, zal 'denken' niet meer zijn dan reproductie van andermans begrip.*

### Uit de discussie

De twee stellingen vormen de aanleiding om met elkaar in discussie te gaan en bij de start van de discussie wordt helder dat de discussianten de stellingen met elkaar in verband brengen. Leraar en leerlingen richten zich op de toets. Het is dan ook vaak de toets die ertoe leidt dat leerkrachten antwoordgericht gaan doceren. Dit ligt ook voor de hand als studenten grote moeite hebben aan de eisen die de toets stelt te voldoen. De toets moet immers gehaald worden en dat is voor met name zwakke studenten een probleem. Zij haken af bij het wiskundig denken en dat gebeurt ook in de geschetste les op de opleiding. Meer algemeen blijkt dat bij het ontwerpen van lessen door studenten hun wiskundig denken vaak achter blijft bij wat de docent verwacht.

Overigens kan niet iedereen zich vinden in de stelling van Van Doornik-Beemer. De situatie op de lerarenopleiding voortgezet onderwijs is anders dan die op de lerarenopleiding basisonderwijs. De opleiding voor het vo staat zeker niet direct in het teken van de toets. Bij de pabo gaat het om twee toetsen, namelijk de Wiscattoets en de kennisbasistoets, en de aanwezigen ervaren beide als een belemmering voor het wiskundig denken. Ze merken overigens ook dat toetsen van de opleiding zelf die zich richten op het wiskundig denken dit geweld van de landelijke toetsen niet kunnen keren.

Er komen in de discussie twee opleidingsmodellen ten aanzien van wiskundig denken naar voren. In het eerste model richt de opleiding zich de eerste twee jaar op de eigen vaardigheid en is er in het derde en vierde jaar aandacht voor wiskundig denken. In het andere model is er sprake van integratie van deze twee vanaf

het begin. En die integratie blijkt te werken, maar wel op voorwaarde dat de docent de beginsituatie van de studenten kent en daarop kan inspelen, om zo afhaken van zowel de zwakkere als de betere studenten te voorkomen. De verschillen tussen de studenten van de verschillende lerarenopleidingen (voor po en vo) blijken inderdaad groot. Als het om het ontwerpen van lessen gaat waarin wiskundig denken een rol speelt staan de studenten uit het mbo aan het ene uiteinde van het spectrum, terwijl de studenten van de eerstegraads lerarenopleidingen aan het andere uiteinde zitten. Maar ook die laatste groep studenten moet vaak loskomen van een op het produceren van antwoorden gerichte cultuur, terwijl zij daarnaast op pedagogisch gebied nog veel te leren hebben. Uiteindelijk gaat het erom dat studenten aan het eind van hun opleiding in staat zijn leerlingen wiskundig te laten denken en dat docenten die merken dat studenten daar mee worstelen, deze hiaten onderkennen en opvullen. Dat er bij problemen ook oplossingen zijn die niet op algebra of het kale rekenen, maar op wiskundig denken, en dan met name redeneren, gebaseerd zijn, vereist ook een omslag in denken bij de leraren. Een algebraïsche oplossing of een oplossing waar vooral met getallen gerekend wordt, kan dan een wiskundig-denk-actieve oplossing in de weg zitten. Overigens wordt gesteld dat het realiseren van een dergelijke omslag wellicht meer opleidingstijd vergt dan er beschikbaar is.

De discussie wordt afgesloten met een hartenkreet: de studenten moeten een andere beeld van het onderwijs ontwikkelen, waarbij ze loskomen van het eigen onderwijsverleden. Studenten leerden daar in het algemeen dat het bij rekenen-wiskunde en wiskunde ging om het toepassen van standaard werkwijzen. Deze achtergrond is goeddeels bepalend voor hoe de aanstaande leraren hun onderwijs inrichten. Daarbij komt dat zij daarin ondersteund worden met boeken die ook vooral voor het antwoord gaan en het wiskundig leren denken niet prominent in beeld brengen. Het is daarom wellicht goed om studenten te leren zelf onderwijs te ontwerpen en daarbij eventueel te raden te gaan bij vakken waar dat veel gebruikelijker is dan bij rekenen-wiskunde of wiskunde.

### 3 Opleider als rolmodel

Douwe Bergsma, tweedegraadsopleider aan de Noordelijke Hogeschool Leeuwarden, vertelt dat de komst van de kennisbasis ertoe heeft bijgedragen dat het leerplan van de opleiding kritisch onder de loep genomen werd. Dat leidde tot de nodige aanpassingen, onder meer voor de competenties die niet getoetst worden maar die wel belangrijk zijn. Een van die competenties gaat over de wiskundige denkactiviteiten waarbij probleemoplossen een centraal aspect is. Bergsma geeft onder andere het volgende voorbeeld van hoe je met behulp van probleemoplossen kunt komen tot het aanzetten van denken bij inhoud.

Bedenk een functie  $f$  waarvoor geldt:  $\int_a^b f(x) = 10$

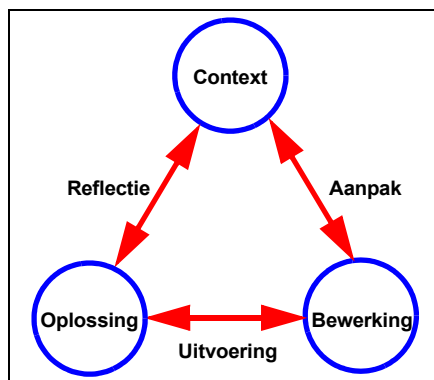
Met dit voorbeeld in gedachten formuleert hij zijn stelling.

#### Stelling

*Door beter te worden in Probleem oplossen, word je beter in wiskunde.*

*Door beter te worden in Wiskunde, word je dus een betere Wiskundeleraar.*

*Dus door beter te worden in Probleemoplossen, word je een betere Wiskundeleraar.*



figuur 2: het drieslagmodel (Van Groenestijn, 2011, pag.146)

Jan-Willem van Slijpe is opleider rekenen-wiskunde aan de Hogeschool iPabo. Hij vertelt over zijn ervaringen met studenten die goed kunnen rekenen maar die door zeer talige sommen tot waanzin worden gedreven. Zijn kader is het drieslagmodel (fig.2) dat gebruikt wordt bij het aanpakken en oplossen van wiskundige problemen (Van Groenestijn, Borghouts & Janssen, 2011). Hij geeft de volgende voorbeelden, die van studenten vragen tussen verschillende cirkels in het drieslagmodel te schakelen.

*London Eye*

Je stapt in terwijl het reuzenrad draait. Hoe snel gaat de gondel en kun je dan gemakkelijk in/uitstappen?

*Percentage*

Het antwoord is 12%, bedenk een vraagstuk.

Van Slijpe geeft aan dat hij deze voorbeelden met studenten deelt, maar zelden laat merken hoe hij tot deze voorbeelden kwam. Hij herformuleert dit tot zijn stelling als inbreng in de discussie.

## Stelling

*Rekendocenten zijn een slecht rolmodel voor studenten, ons eigen wiskundig denken is zelden zichtbaar.*

## Uit de discussie

Verschillende deelnemers kunnen zich vinden in het benadrukken van het drieslagmodel. Het is immers een middel om je eigen denkproces vorm te geven. Dit kan de studenten stimuleren. Dat gebeurt bijvoorbeeld als je het antwoord voorzegt om vervolgens te reflecteren op het denkproces of wanneer je de student hardop laat denken bij het oplossen van een probleem.

Dat neemt niet weg dat het drieslagmodel het probleemoplossen niet helder in beeld brengt. Voor dit probleemoplossen moeten studenten (en leerlingen) namelijk een wiskundige attitude ontwikkelen. Activiteiten waarbij studenten problemen moeten oplossen moeten in de ogen van de aanwezigen stevig ingebed worden in het opleidingsonderwijs en het moet ook getoetst worden.

Wat de houding van de studenten betreft moet er aandacht zijn voor: samen problemen oplossen die het zelf denken ontwikkelen. En dat komt, volgens enkele aanwezigen, al heel dicht bij leren wiskundig modelleren. Daarbij past niet een houding dat het bij reken-wiskunde vooral gaat om de kortste route naar een antwoord. De student moet verschillende strategieën overwegen en tegen elkaar afwegen.

Begrijpen en betekenis kunnen geven zijn voorwaarden voor dit wiskundig denken. En volgens verschillende aanwezigen is dit tot op zekere hoogte geborgd in de pabo. Namelijk voor het halen van een hoge score op de Wiscattoets, is het nodig dat de student verder kijkt dan standaardaanpakken. Voor nogal wat pabostudenten vormt die attitude bij het probleemoplossen echter een hindernis. Dat bleek toen een van de aanwezigen de volgende situatie beschreef.

Een breedbeeld-tv met beeldverhouding 9 : 16 en een beeldoppervlakte van 70,56 cm<sup>2</sup>.

Wat zijn de afmetingen van het beeldscherm?

De studenten kregen van deze opleider de opdracht een les over deze opgave voor te bereiden. Een aanvullende eis was dat in de les de situatie zo naar voren zou komen, dat iedereen zou begrijpen hoe de oplossing verliep. Tijdens de bespreking bleek dat de studenten geen denkmodel konden bedenken en dat iedereen direct met een formele vermenigvuldigaanpak aan de slag ging. De deelnemers aan de discussie brachten naar voren dat juist dit vraagt om een omslag in attitude. Studenten moeten ervaren dat het niet gaat om algoritmische aanpakken en standaardaanpakken om goede cijfers te halen, maar om het doorzien van oplossingen. Echter dit blijkt niet makkelijk, ook niet omdat het concurreert met een belangrijke zorg van studenten, namelijk het klassenmanagement. Met leerlingen op avontuur gaan, vraagt namelijk veel meer van het organiseren van het onderwijs, dan het inoefenen van standaardaanpakken.

In een terugblik op de werkgroep wordt opgemerkt dat het een interessant aanpak is probleemoplossen te verweven met vakinhoud en te werken aan een attitude waar wiskundig denken en onderzoeken centraal staat. Dit betekent dat het goed zou zijn het wiskundig denken bij iedere leerinhoud naar voren te laten komen; eerst met relatief eenvoudige problemen, zoals door Van Slijpe naar voren gebracht, om stukje bij beetje over te stappen op problemen waar de studenten werkelijk hun tanden kunnen zetten.

---

## 4 Attitude aanstaande leraren

Trudy van der Kolk-den Heijer is opleider aan de tweedegraads lerarenopleiding wiskunde van Driestar Educatief. Zij gaat in op algebraïsche vaardigheden in relatie tot het verwerven van een onderzoekende houding. Ze stelt dat open opdrachten er toe kunnen leiden dat studenten ervaren welke algebraïsche vaardigheden vereist zijn om tot een oplossing te kunnen komen. Ze pleit daarom ook voor het gebruiken van dergelijke open opdrachten. Van der Kolk-den Heijer formuleert dat in haar stelling voor de discussie.

### Stelling

*Open opdrachten bieden ruimte om wiskunde te bedrijven, wat resulteert in meer vaardigheid en zin geeft aan geïsoleerd oefenen.*

Petra van den Brom-Snijders, pabo Hogeschool Inholland, geeft haar studenten open opdrachten die ruimte bieden om wiskunde te bedrijven. Dit resulteert in haar ogen in grotere vaardigheden voor rekenen-wiskunde en geeft bovendien zin geeft aan geïsoleerd oefenen. Haar stelling richt zich op deze open vragen en meer algemeen op open onderwijs.

### Stelling

*Onderwijs moet opener, kijk meer naar algemenere doelstellingen.*

Van den Brom-Snijders licht toe dat dat wellicht de vraag oproept hoe dat moet met zwakke rekenaars, omdat zij problemen hebben met open opdrachten. Maar in deze stellingname kan zij zich niet vinden. Volgens haar leert de ervaring dat ook deze leerlingen meer plezier hebben en minstens minder zwak lijken. Bij 'nadoen' is er veel benauwdheid, maar een open ruimte geeft meer lucht.

### Uit de discussie

In de discussie riep het karakter van de open opdrachten vragen op. De vraag is namelijk hoe open een open opdracht kan zijn. Men was het er over eens dat het belangrijk is dat studenten door aan de slag te gaan met open opdrachten ontdekken dat het leuk is om met dergelijke opdrachten bezig te zijn. Dit veronderstelt wel vakmatige kennis, bijvoorbeeld bij delen. Het gaat hier om vragen als 'welke deelstrategieën zijn passend?'. Door een open opdracht komen studenten echter niet toe aan doorgronden van het probleem. Een mooie open opdracht kun je bewust inzetten als je bijvoorbeeld aandacht vraagt voor verschillende handelingsniveaus. Dit kan bijvoorbeeld leiden naar kennis eigen maken via exploreren of naar motiveren om de algebraïsche vaardigheden of het rekenen met kale getallen te oefenen. Hiervoor is nodig dat studenten zich zeker (gaan) voelen en zelf de kracht van open opdrachten ervaren hebben. De angst het vereiste vaardigheidsniveau niet te halen kan dan in de weg zitten. Daarom moeten open opdrachten passen in de zone van naaste ontwikkeling van studenten, zodat ze aanknopingspunten hebben. En het is helemaal prachtig, zo komt in de discussie naar voren, als de studenten bij een open opdracht ook bezig zijn met de didactiek van open opdrachten. Als opleider moet je hierin sturen en expliciteren. Het antwoord op de vraag hoe open opdrachten een rol kunnen spelen bij het aanleren van didactische vaardigheden is wellicht dat het hier gaat om samen met studenten kennis construeren. Verder bleek dat lerarenopleiders aan de lerarenopleiding basisonderwijs hier anders over denken dan hun collega's die aan de tweede- en eerstegraads opleiding werken. Daar waar pabodocenten open problemen graag inzetten om met studenten van gedachten te wisselen over de didactiek, vinden opleiders voor het voortgezet onderwijs dat deze opdrachten niet geschikt zijn om gereedschappen, zoals algebraïsche vaardigheden, op niveau te brengen.

---

## 5 Reflectie

Veel studenten, met name studenten aan de lerarenopleiding basisonderwijs worstelen met de eigen wiskunde vaardigheid of rekenvaardigheid. Dit leidt bij deze studenten vaak tot instrumenteel leergedrag, ter-

wijl dat niet het doel van de opleiding is. De studenten op hun beurt ervaren dat het instrumenteel leren van rekenregels of algebraïsche aanpakken, hen tot gewenste antwoorden brengen. Zij kiezen er daarom bij voorkeur niet voor om aan de slag te gaan met open problemen of opdrachten die wiskundige denkactiviteiten van hen vragen.

Hierin schuilt ook een paradox. Want het aanpakken van de open opdrachten of het aan de slag gaan met wiskundige denkactiviteiten veronderstelt een zeker repertoire. De studenten, met name de wat zwakkere rekenaars, zijn - op hun manier - bezig dit repertoire te verwerven. En als dat in hun ogen effectief is, valt daarvoor zeker wat te zeggen. Maar, zo stellen deelnemers aan de verschillende discussies vast, wanneer een student eenmaal vast zit in dit regelgericht handelen, komt hij of zij daar moeilijk van los. En dat leidt vervolgens tot de kernvraag: kunnen we studenten wiskundige vaardigheden laten verwerven in open, rijke situaties, die vragen om wiskundige denkactiviteiten?

In de discussies kwamen enkele voorbeelden naar voren. Dat is echter - in ieder geval voor de pabo - niet genoeg. Het wiskundige niveau voor de student is vastgelegd in de kennisbasistoets, die de student in het derde of vierde studiejaar voldoende moet scoren. We zijn feitelijk op zoek naar een hele range van wiskundige opdrachten en uitdagingen voor studenten om via deze wiskundige denkactiviteiten stukje bij beetje de kennisbasis te verwerven. Dat is niet gering, maar heeft, als dat lukt wel een belangrijk voordeel. Op dat moment ligt de didactiek op de stip en verwerven studenten de wiskunde in het licht van de didactiek en ook daar is veel voor te zeggen.

## Noot

- 1 R. Keijzer is werkzaam aan de Hogeschool iPabo/ELWleR), G. Zwaneveld & J.W. Brandsma aan de Stenden Hogeschool, Leeuwarden, J Faarts bij de Fontys Hogescholen, Pabo Sittard en I. Meijers aan de Hogeschool Leiden. G. Zwaneveld is emeritus hoogleraar didactiek van de wiskunde en informatica.

## Literatuur

- Drijvers, P. (in druk). Wiskundig modelleren. *Euclides*, 90(4).
- Goffree, F. & M. Dolk (red.). (1995). *Proeve van een nationaal programma rekenen-wiskunde & didactiek op de pabo*. Enschede/Utrecht: Instituut voor Leerplanontwikkeling / NVORWO.
- Groenestijn, M. van, C. Borghouts & C. Janssen (2011). *Protocol Ernstige RekenWiskunde-problemen en Dyscalculie*. Assen: Van Gorcum.
- Common Core State Standards for Mathematics*. Washington DC: Common Core State Standards Initiative.
- Treffers, A. (1987). *Three dimensions: a model of goal and theory description in mathematics instruction - The Wiskobas project*. Dordrecht: Reidel.
- Treffers, A., E. de Moor & E. Feijs (1989). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool, Deel 1. Overzicht Einddoelen*. Tilburg: Zwijssen.
- Streun, A. van & P. Kop (2013). Wiskundige Denkactiviteiten. In: P. Drijvers, A. van Streun & B. Zwaneveld (red.). *Handboek wiskundendidactiek*. Utrecht: Epsilon, 339-368.
- Zanten, M. van, F. Barth, J. Faarts, A. van Gool & R. Keijzer (2009). *Kennisbasis Rekenen-Wiskunde voor de lerarenopleiding basisonderwijs*. Den Haag: HBO-raad.

---

*Every year at the ELWleR-conference, teacher primary educators discuss with their colleagues from secondary education a trending topic which concerns both types of teacher education. At the 2014 conference the topic was student teachers' mathematical thinking. This topic was discussed from several perspectives. Teacher educators concluded that teacher education in many cases hinders student teachers' mathematical thinking. Teacher education is obliged to change this.*