



Professor Freudenthal op de Pedagogische Academie

Fred Goffree & Huub Jansen

Het is 1976. Professor Freudenthal is nu vijf jaar hoogleraar-directeur en medewerker van het IOWO als hij zich gaat interesseren voor het ontwikkelwerk op de Pedagogische Academie (PA). Zijn interesse gaat al spoedig over in deelname en inzet. Twee dagen per week rijdt hij met H. Jansen en F. Goffree mee naar Gorinchem en omliggende plaatsen, waar leerscholen van de PA zijn gesitueerd. Hij discussieert met studenten en docenten in de wiskunde- en didactieklessen op de PA; op de leerscholen begeleidt hij studenten bij hun werk met kinderen van de basisschool. Niet zelden voert hij zelf ook leergesprekken met de kinderen. Vervolgens wordt een en ander tijdens de lunch of op de terugweg geanalyseerd en nabesproken. Freudenthal is een nieuweling in het PA-wereldje, maar voelt zich van meet af aan als een vis in het water. In de gesprekken met docenten, studenten en leerlingen kan hij praktisch en theoretisch zijn didactische denkwerk kwijt. De Egmond-conferentie van oktober 1976 is in dezelfde geest ingericht. In dit artikel komt het PA-ontwikkelwerk op alle genoemde niveaus in beeld. Als er ook enige afstand genomen wordt ziet de lezer enkele belangrijke principes, hier aangeduid als '5 big ideas van Freudenthal', totstandkomen. In het slotwoord wordt de bijdrage van Freudenthal aan de lerarenopleiding nog eens in een breder perspectief geplaatst.

1 Egmond Conferenties

Sinds 1969 werden in het kader van het Wiskobasproject jaarlijks conferenties georganiseerd voor de docenten rekindidactiek van de Pedagogische Academies. In latere jaren gingen ook hun collega's, pedagogiekdocenten, aan deze conferenties deelnemen. In het conferentieverlag van de Egmond-conferentie in 1976 met als titel '20 gevallen van stagebegeleiding' wordt een ontwikkeling zichtbaar. Een ontwikkeling die begint met nieuwe inhoud - 'New Math!' - en via nieuwe opleidingsdidactische werkvormen en gesprekken met kinderen voerde naar de essenties van de onderwijzersopleiding.

Freudenthal was bij al deze conferenties betrokken, vanuit de gedachte dat ook PA-docenten betrokken dienden te worden bij de ontwikkelingen van het reken-wiskunde-onderwijs. Zelf had hij een Pedagogische Academie nooit eerder bezocht. Dit veranderde in 1976, het jaar van de laatstgenoemde conferentie. Als hij in de zomer van 1977 het voorwoord schrijft voor het omvangrijke en verlate conferentieverlag van Egmond '76, heeft hij een jaar van bezoeken, twee dagen per week, op de Pedagogische Academie Juliana van Stolberg in Gorinchem, achter de rug.

Laten we eens lezen wat hij schrijft over deze conferentie, waar PA-docenten de opdracht krijgen in groepjes van vier één Gorcumse PA-student te begeleiden bij het voorbereiden en vervolgens geven van een les aan basisschoolleerlingen uit Egmond aan Zee.

Egmond 1976

Woord vooraf

Een jaar van nuttig besteed emeritaat. Onder meer bevestigd op de PA Gorcum en de oefenscholen daarvan. Ik heb in dat jaar iets geleerd dat ik trouwens al vermoedde: dat de PA het zenuwknoppunt, het moeilijkste probleem, maar ook de meest belovende uitdaging van ons Nederlandse onderwijs is.

Van alle IOWO manifestaties, die ik heb meegemaakt, zal Egmond 1976 mij het langste heugen. Een toppunt waarvan ik me afvraag of ik het ooit overtroffen zal zien. Een scherp gestructureerd gebeuren, maar dan een rijke structuur, rijk invulbaar en rijk ingevuld. De hoofdmoot, in 20 stroompjes verdeeld, een stuk onderwijs op de PA. Niet echt natuurlijk. Of veel meer dan echt. Een beeld van onderwijs, niet zoals het is, maar zoals het zou kunnen, zou moeten zijn, en met aksenten, anders gelegd dan je echt zou doen, om te beklemtonen waar het op aankomt.

Je stuurt een student PA naar een oefenschool, niet met de opzet dat de kinderen iets van hem leren, maar dat hij iets van de kinderen leert (en ook nog iets van de mentor). In het didactisch gebeuren in Egmond waren er drie soorten acteurs: kinderen, studenten, begeleiders.

Misschien hebben de Egmondse kinderen er iets bij opgestoken, wellicht ook de Gorcumse studenten. Maar begonnen was het om de begeleiders, om het opdoen van ervaringen in en met de didactische processen die zich daar af zouden spelen.

Of was de meest begunstigde het IOWO-team, dat iets te weten wilde komen hoe een structuur functioneert, hoe gevarieerd ze kan worden ingevuld en wat de invulling openbaart omtrent de onderwijs-leer-processen van allen die erbij betrokken zijn?

Hans Freudenthal

Opgemerkt moet worden dat de auteur in de Wiskobaskring, op de PA te Gorinchem, in de oefenscholen en in de auto op de A27 tussen Utrecht en de Alblasserwaard altijd met professor werd aangesproken. Als er 'over' hem werd gesproken, was het Freudenthal. En als iemand 'Hans' zei, was hij het zelf. Op die ene keer na, vlak voor de sluiting van zijn instituut en op zijn 75^{ste} verjaardag (17 september 1980), toen alle IOWO-medewerkers een bijdrage leverden aan het boekje 'Kijk op Hans'. Tot die tijd en ver daarna, was het 'professor'. Zoals E. de Moor het eens zei: 'Eigenlijk is zijn voornaam gewoon 'professor'. In wat volgt, wordt zorgvuldig met 'professor Freudenthal' omgegaan.

2 Professor Freudenthal als deelnemer

Het 'gebeuren', waarin professor Freudenthal een rol speelt, is getiteld 'Jan, een blijspel in zes bedrijven'. W. Uittenbogaard (PA Alkmaar), H. Gritter (PA Leeuwarden) en T. Hendriks (secretaris van de Innovatie Commissie Opleidingen) zijn de andere begeleiders van student Jan (fig. 1).



figuur 1: de vier begeleiders van Jan

Ze kiezen uit de aangereikte werkbladen het blad met een kubus. Daarmee moet Jan een lesje gaan geven aan vier meisjes (tien en elf jaar) van de St. Jozefschool uit Egmond. Jan schrikt, want hij weet zelf niet goed hoe hij een kubus moet beschrijven. W. Uittenbogaard legt hem uit hoe het zit met een kubus. Aan didactiek komt hij nauwelijks toe, maar hij geeft wel het goede voorbeeld. 's Middags gaat het gebeuren. De meisjes (uit de klassen 4 en 5) komen er onder leiding van Jan zelfs toe om van een gegeven kubus een grotere kubus te maken en het aantal daarvoor benodigde blokjes te noemen. Als Jan na een half uur niet meer weet hoe hij verder moet, neemt Uittenbogaard het van hem over. Hij maakt van de kubusbouwsels huizen die geverfd moeten worden.

Dan mag ook professor Freudenthal iets nieuws aansnijden. Hij toont de leerlingen een draadmodel van de kubus en vraagt: 'Hoeveel hoekpunten?' In koor wordt geroepen: 'Acht!' En hoeveel ribben komen in elk hoekpunt samen? 'Drie!' 'Dat zijn dan 24 ribben, niet waar? 8×3 . Maar hoeveel zijn er echt?' 'Twaalf.' Hoe kan dat nou? Marieke, een van de meisjes, hoeft daar niet lang over na te denken: 'Dubbel geteld'.

Tot zover de eerste bedrijven van dit 'blijspel'. Er resten nog twee, waarin eerst de begeleiders het gebeuren nabespreken en vervolgens het gesprek met Jan evalueren. De manier van werken in zo'n begeleidingsgroepje, observeren, meepraten, meedenken en af en toe een bijdrage leveren aan de voortgang, is Freudenthal op het lijf geschreven. Geen hoogdravende toespraken vanuit de wetenschap, maar iemand die de tijd neemt met anderen te reflecteren op hetgeen zich heeft afgespeeld. Met deze kennis dient dit verhaal gelezen te worden. Het gaat over onze ervaringen met Freudenthal op de PA te Gorinchem in het schooljaar 1976-'77. Uit de verslagen van het werk op de PA én in de oefenscholen, hebben we een selectie gemaakt van de bijdragen van Freudenthal waarvan er nu nog sporen zijn te vinden. We zijn gaan spoorzoeken om herinneringen aan dat jaar op te halen.

3 De onderwijzersopleiding in de jaren zestig en zeventig

Vóór we verslag doen van dit spoorzoeken, blikken we terug op de onderwijzersopleiding uit de tijd vóór professor Freudenthal erbij betrokken werd.

In de oude kweekschool stond het vak rekenen op het lesrooster. Een vak zonder veel aandacht voor de rekendidactiek in de toenmalige lagere school, want dit behoorde tot het werkterrein van de leraar pedagogiek. Oude rekenboeken voor de onderwijzersopleiding geven nog een beeld van de inhoud van het vak: veel aandacht voor vaak lastige rekenopgaven, rekenen met breuken, kenmerken van deelbaarheid, grootste gemene delers, kleinste gemene veelvoud en vooral ook voor rekenopgaven die de leerlingen in toelatingsexamens voor het voortgezet onderwijs moesten oplossen. Oudere lezers zullen zich voorbeelden uit die mooie rekestijd herinneren.

Dit veranderde eind jaren zestig toen kweekscholen Pedagogische Academies werden en het vak rekendidactiek in het rooster werd opgenomen. Een nieuw vak, maar nog zonder leerboeken en leraren, met als gevolg dat het oude kweekschoolrekenen nog lang de inhoud van dat nieuwe vak 'rekendidactiek' bleef bepalen. Een bijkomend, maar belangrijk probleem was de situatie van de leraren die aan dit nieuwe vak vorm en inhoud moesten geven. Die hadden, behalve een wiskundeopleiding, vaak wel ervaring met het vak rekenen in de lagere school, maar het nieuwe

opleidingsvak rekendidactiek stelde andere eisen. Bovendien waren deze opleidingsdocenten vaak eenlingen die zonder veel steun een nieuw wiel moesten uitvinden. Deze situatie veranderde toen het eerste leerboek rekendidactiek voor de nieuwe opleiding op de markt verscheen en de vernieuwingsbeweging Wiskobas landelijk verspreide werkgroepen oprichtte en jaarlijkse conferenties ging organiseren waar nagenoeg alle PA-docenten rekendidactiek aan deelnamen.

4 De actoren anno 1976

F. Goffree, een van de auteurs van dit verhaal, begon als leerling van de Hervormde Kweekschool te Amsterdam in het jaar van de Nieuwe Kweekschoolwet (1952). Hij werd onderwijzer in Hengelo (O) en in 1959 leraar aan de Rijkskweekschool aldaar. Hij bleef er tien jaar en schreef in die periode 'Rekenen en Didactiek', waarin een poging werd gedaan om de oude rekenkunde en de nieuwe rekendidactiek tot elkaar te brengen. In 1969 begon zijn carrière als medewerker van Wiskobas, daartoe uitgenodigd door E. Wijdeveld, die eerder ook als kweekschoolleeraar werkzaam was geweest.

De andere auteur - H. Jansen - begon zijn onderwijsloopbaan op een lagere school in Kattenburg, een echte Amsterdamse volkswijk. Na een aantal jaren wiskundeleraar op een ULO en daarna op een lyceum te zijn geweest, werd hij leraar rekendidactiek op de Gemeentelijke Amsterdamse Kweekschool, de school waar hij ooit als kwekeling begon. Na nog een korte baan aan de Utrechtse Rijkskweekschool werd hij in 1972 medewerker van het IOWO en lid van het Wiskobasteam.

Freudenthal had tot de start van 'zijn' IOWO in de totaal andere wereld van wiskundigen verkeerd. Wel had hij al diverse keren van zijn belangstelling voor didactische zaken blijk gegeven. Zo verschenen in 'De Groene Amsterdammer' verschillende artikelen (columns) over onderwijs in het algemeen en het leren van (zijn) kinderen in het bijzonder. In de jaren vóór 1959 had hij, samen met professor Langeveld, destijds een bekende pedagoog, het echtpaar Van Hiele begeleid bij hun promotiestudie op het gebied van de wiskundendidactiek. De titel van het proefschrift van P. van Hiele was: 'De problematiek van het inzicht, gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkundeleerstof' en van het proefschrift van D. van Hiele-Geldof: 'De didactiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.'

Ver daarvoor, tijdens de Tweede Wereldoorlog, maakte hij een begin aan een boek dat ooit 'rekendidactiek' had moeten heten. Na de oorlog nam hij actief deel aan de Wiskundewerkgroep van de WVO (100 jaar wiskundeonderwijs). Toen hij in september 1976 zijn opwachting in

de PA maakte, was zijn eerste grote onderwijskundige werk 'Mathematics as an Educational Task' (1973) al verschenen en zijn tweede 'Weeding and Sowing' (1978) in de maak.

5 Vijf big ideas van Freudenthal

In het schooljaar 1975-'76 experimenteerden Goffree en Jansen als onderwijsontwikkelaars met de ontworpen PA-blokken in de eerstejaarsklassen in Gorinchem. Dit in samenwerking met de reken-wiskundedocenten, vanaf die tijd 'wiskunde- & didactiekdocenten' genoemd: J. Keijnemans (wiskunde), J. Bosch (pedagogiek) en J. Ritsema (wiskunde). Met hen én met het materiaal dat in het voorgaande jaar was ontwikkeld, gingen zij in september 1976 in de nieuwe eerstejaars PA-klas (fig.2) en in de oefenscholen van de studenten aan de slag.



figuur 2: klasfoto jaar 1975-'76

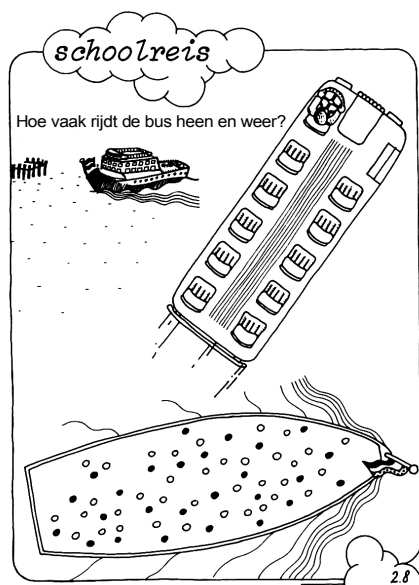
Goffree, die eerder door Freudenthal was aangemoedigd een proefschrift over dit werk op de PA te schrijven, hield met het oog hierop een uitvoerig logboek bij. Uit het deel '1976-1977' is bij het ophalen van herinneringen uit dit bijzondere jaar met groot plezier geput. Om al die 'korte verhalen' met enige samenhang weer te geven, hebben we ze gegroepeerd rond vijf 'big ideas' van Freudenthal, die ook nu nog bekend zijn in de wiskundig-didactische gemeenschap: de rijke context, concretiseren, de rol van taal in de wiskunde, didactische fenomenologie en gesprekken met kinderen. Om te beginnen gaan we op speurtocht naar zijn gedachten en opmerkingen over het begrip 'rijke context'.

Rijke context

Dit begrip kwam voor het eerst aan de orde toen we even tevoren in een PA-les over oppervlakte hadden gediscussieerd. We hadden enkele ideeën uit de Wiskobasbesprekingen over oppervlakte uiteengezet; ideeën met een nogal technisch karakter over het vergelijken van de grootte van vier eilanden en het verknippen van een cirkel

in sectoren om er een rechthoek van te leggen. Freudenthal reageert hierop door het beeld op te roepen van een prachtige, alleenstaande kastanjeboom, in volle bladertooi. Hij nodigt ons uit deze boom te zien als leverancier van zuurstof waar elk blad een eigen bijdrage aan levert. Het geschetste beeld en de gedachte aan 'de groene long' zijn voldoende om de term 'rijke context' zonder verdere toelichting betekenis te geven. Als opleiders en ontwikkelaars kunnen we ons zonder veel inspanning allerlei wiskundige activiteiten met betrekking tot meten, benaderen, tellen en schatten, voor de geest halen. Voor alle duidelijkheid moet hier aan toegevoegd worden dat Freudenthal er zelf nooit een dergelijke microdidactische uitwerking bij gaf. Maar bij andere gelegenheden komt het begrip 'context' wel weer naar voren, vaak vanuit een andere invalshoek of een ander niveau van inzicht. Een tweetal voorbeelden:

- 1 Aan de lunch in het Gorcumse Piazza Centrum praten we na over de les in de PA. Het begrip 'context' komt ter sprake. Freudenthal betreft dit op een ander begrip dat hij vaker noemt: wiskundige attitude. Kinderen moeten geneigd zijn de wiskunde zelf betekenis te geven in een hun bekende context, stelt hij. Maar de leraar moet weten dat de context die hij aanbiedt, niet de context hoeft te zijn die de kinderen 'ontvangen'. Een gegeven situatie roept bij een kind misschien een heel andere context op dan de leraar bedoelt en dan ontstaan er misverstanden. Hij geeft nog een aanvulling: kinderen moeten ook leren naar de wiskundige context te kijken en afzien van andere zaken!



figuur 3: boot-busprobleem

- 2 Lia heeft gewerkt met het boot-busprobleem. Op het werkblad is een grote boot getekend met zwarte en witte rondjes die de jongens en meisjes voorstellen die op de boot meevaren. Er is ook een steiger getekend

met een bus erop. Het dak van de bus is doorzichtig, je kunt de banken aan weerszijden van het gangpad zien. De vraag luidt hoe vaak de bus moet rijden om alle kinderen naar de plaats van bestemming te brengen (fig.3). Lia gaat in op de suggestie van een leerling de kinderen als stipjes op de zitplaatsen te tekenen en dan stippen op de boot door te strepen. Een paar leerlingen willen drie kinderen op een bank voor twee personen zetten. Wat te doen? Daar is het beoogde rekenwerk niet op berekend. In zo'n geval, zegt Freudenthal, moet je de contextsituatie naar je hand zetten. Bijvoorbeeld hier: 'Drie op een bank mag niet van de politie'.

Concretiseren

Hoewel Freudenthal zich in de Wiskobasbijeenkomsten niet opstelde als wiskundige, kwam zijn opvatting over het veelbesproken koppel 'concreet en abstract' voor de meeste Wiskobassers als een donderslag bij heldere hemel. Wiskunde, menen velen, is toch het abstracte vak bij uitstek. Zo hadden ook de Wiskobassers het vak wiskunde in hun eigen opleidingen leren zien. In de wiskunde van het voortgezet onderwijs mocht aan (concrete) figuren geen wiskundige bewijskracht worden toegekend. Dat de drie zwaartelijnen in een driehoek door één punt gaan, moest bijvoorbeeld bewezen worden met een scherpe redenering.

En toen kwam Freudenthal op zekere keer met de uitspraak dat hij wiskunde beschouwde als een menselijke activiteit die voor een groot deel bestaat uit concretiseren. Later, in de auto op de A27, praten we over wiskunde als abstract vak en onze didactische neiging om te concretiseren. Freudenthal gaat daarop in met een 'kort college' over C. von Neumann, die hij heel hoog schat als wiskundige. Von Neumann schreef het beste didactische werk in de wiskunde, merkt hij op. Het gaat over Riemannse theorie, die door twintigste eeuw-wiskundigen van een 'beledigende helderheid' is genoemd. Ik herinner me de Riemannse vlakken uit mijn studietijd. Freudenthal stelt dat Riemann die niet als didactisch hulpmiddel heeft bedoeld. Juist door dit soort concretisering werd zijn werk, onder andere door Weierstrass, geheel terzijde geschoven.

Concretiseren heeft verscheidene uitwerkingen; Freudenthal laat er, vooral als er met PA-studenten en kinderen gewerkt wordt, het een en ander van zien in de volgende herinneringen.

Concreet maken met een voorbeeld

Terug naar de Gorcumse PA. Medio september 1976 zitten we in de oefenschool in Arkel bij het gesprek van de studenten Margo en Karin met vier leerlingen uit klas 4. De studenten proberen de lusabacus uit te leggen. Tijdens een PA-les is het idee geopperd de abacus te gebruiken als kilometerteller in de auto van Fred Flintstone, een populaire televisieserie die zich afspeelt in het 'stenen tijd-

perk'. Dit idee doet het goed. Flintstone beweegt zijn stenen auto met zijn benen voort en op de abacus kan zo gemakkelijk het aantal kilometers worden bijgehouden. In de nabespreking komt Freudenthal terug op de hulp die Karin gaf toen de kinderen vastliepen op de vraag welk getal vóór 2000 komt. Karin heeft de aftrekking 2000 – 1 onder elkaar laten maken. Dit leidt in de vierde klas, waar het cijferen nog maar pas aan de orde is gekomen, tot problemen. Misschien kun je dat anders uitleggen, zegt professor Freudenthal, bijvoorbeeld door te vragen welk getal voor 100 komt.

Het concrete materiaal

Ook in september, in dezelfde oefenschool. Twee studenten observeren een gesprek van hun PA-docent met vijf kinderen uit klas 5. Ze spelen het spelletje 'Raad mijn getal'. Het wordt snel duidelijk dat het erom gaat de leerlingen een strategie te laten bedenken. De docent probeert de kinderen op het goede spoor te zetten door ze de bordliniaal aan te reiken. Maar er zijn storende materiaal-factoren: er staan geen getallen op de liniaal. Freudenthal komt dan met de suggestie: neem een strook papier en knip steeds het stuk eraf waarop het gezochte getal niet kan staan.

De zakdoek van Freudenthal

Mia, een eerstejaarsstudente, wil haar leerlingen laten uitzoeken hoe ze van een rechthoekig blaadje papier een vierkant kunnen vouwen. Ze geeft ieder een A4'tje. Wie kan er een vierkant vouwen? Een meisje vouwt het vel over de lengte doormidden. Mia: 'Nee, we willen een zo groot mogelijk vierkant. Hoe moet dat nu?' Ongemerkt zijn ook de begeleiders gaan meepraten. Een jongen uit het groepje vouwt een vierkant 'op het oog'. We kijken wat wantrouwend. Hoe kun je nu weten of dit een vierkant is? Wat weet je van een vierkant? Nee, geen liniaal gebruiken. Niet nodig! Iemand gaat met z'n vingergesmeten. Dat vinden we niet nauwkeurig genoeg. Wij kijken elkaar aan, want er treedt een impasse in. Wat nu? Dan pakt professor Freudenthal zijn zakdoek en vouwt die op tafel uit. Is dit een vierkant? Hoe weet je dat zo zeker? Een meisje doet waar Freudenthal op zit te wachten. Ze vouwt de zakdoek over de diagonaal, zodat de zijden op elkaar vallen. Kan iemand nu ook nog vouwen, zodat je kunt zien dat alle vier de zijden gelijk zijn?

Veerbalans.

In maart bezoeken we de oefenschool in Werkendam. Student Kees heeft zich voorbereid om met een groepje kinderen te praten over het ordenen van gewichten op de getallenlijn. Hij heeft drie luciferdoosjes van verschillend gewicht geprepareerd, er liggen twee liniaaltjes op de tafel en een brievenweger. Het ordenen van de doosjes naar gewicht levert geen problemen op, hoewel Kees het wegen op de weegschaal zelf voor zijn rekening neemt. Maar als Kees vraagt de doosjes naar gewicht op een getallenlijn te ordenen, is het eerste probleem geboren.

Hoever moeten die gewichten uit elkaar geplaatst worden? Op aftrekken komen de leerlingen niet spontaan. Achteraf wijst Freudenthal op het nut van een veerbalans. De verwantschap van de schaal aanduiding op de veerbalans met de getallenlijn is helder en kan kinderen op ideeën brengen.

Taal en wiskunde

Op zekere dag wordt in de Wiskobasvergadering bekend gemaakt dat de kinderen van de Dr. W. Dreesschool in Arnhem, de 'ontwerpschool' van Wiskobas, het op de Cito-toets voor rekenen niet minder hadden gedaan dan de gemiddelde leerling in Nederland, én dat ze voor taal veel beter dan het gemiddelde hadden gescoord. Professor Freudenthal toonde zich hierover opmerkelijk verheugd. Zijn herhaalde uitspraken over het feit dat met het Wiskobasmateriaal voor rekenen-wiskunde ook veel aan taalontwikkeling werd gedaan werd nu bewaarheid. Het magere resultaat op het onderdeel rekenen was voor hem niet bijzonder interessant. De toets behandelde immers alleen het 'oude' rekenen. Freudenthals belangstelling voor taal kwam op verschillende momenten in zijn PA-jaar in beeld.

Meetkundetaal

Eind september 1976 worden de PA-studenten voor de eerste keer geconfronteerd met het nieuwe meetkunde-blok met de titel 'Kijken, doen, denken en zien' (Goffree & Jansen, 1976). Freudenthals ideeën over de didactische fenomenologie, genoteerd in hoofdstukken van het boek 'Didactical Phenomenology of Mathematical Structures' dat in 1983 zal verschijnen, waren de Wiskobasmedewerkers al bekend. Met regelmatige tussenpozen vinden zij eerste versies van die hoofdstukken in hun postvakje.

De titel 'Kijken, doen, denken en zien' laat zien dat meetkunde in zekere zin fenomenologisch is, dat wil zeggen als een verschijnsel in de wereld rondom ons. De eerste les gaat over een koster die zijn kerk - een blokkenbouwsel op een veld met ruitjes weergegeven - moet beschrijven. In de nabespreking ziet Freudenthal een taalprobleem: dagelijks leventaal, bouwtaal of wiskundige taal? Daarop verdergaand adviseert hij de volgende keer de ruitjesstructuur weg te laten. Het lijkt hem ook nuttig de studenten eerst de kans te geven iets te vertellen over de ervaringen die ze al met meetkunde hebben opgedaan.

Niveaus van taalgebruik.

De meetkundeles over 'de koster en de kerk' heeft in de PA-klas een vrij chaotisch karakter gekregen. De studenten hadden de vrijheid met voorstellen voor het beschrijven van de kerk te komen. In de nabespreking van de les blijkt het moeilijk grip te krijgen op dit gebeuren.

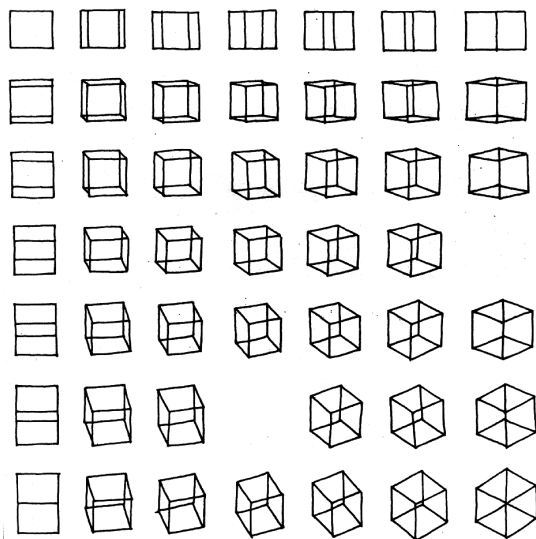
Achteraf, als we in het Piazza Centrum weer eens onder ons zijn, meent Freudenthal dat het bespreken fundamen-

teler had gekund. We hadden moeten wijzen op de verschillende niveaus van taalgebruik. Op het meest elementaire niveau werd 'demonstratieve taal' gebruikt. Er werd 'gewezen' en gebruikgemaakt van aanwijzende voor-naamwoorden: dat blokje daar, ... nee, meer daarheen, ... De gebrekkigheid van dit taalgebruik werd duidelijk toen de koster daar niets mee kon. Niveauverhoging treedt op als men een meer relatief taalgebruik gaat hanteren: links van dat blokje, het blokje rechts voor, ... Ook dit taalgebruik heeft een nadeel: de beschrijver en de toehoorder hebben namelijk verschillende posities waardoor misverstanden kunnen ontstaan. Inleven in de ander is nodig bij communicatie, maar bij gebruik van de coördinatentaal zijn alle subjectieve elementen verdwenen. Er moeten afspraken worden gemaakt over 'oriëntatie' ... Later komt Freudenthal op de PA vaak terug op het taalaspect in de wiskunde.

De taal van de draaiende kubus

Oktober 1976. Op de PA is de vierde les uit het meetkundeblok 'Kijken, doen, denken en zien' aan de orde geweest. We hebben geen goed gevoel als we in het Piazza Centrum napraten. Er gebeurde te weinig, de respons van de studenten was gering en ze werden onzeker als er woorden als 'loodrecht', 'diagonaal' en 'evenwijdig' genoemd werden.

Op een van de werkbladen (naar een vondst van E. de Moor) staan 48 verschillende kubusprojecties, systematisch gerangschikt in zeven rijen en zeven kolommen. Ergens in het midden ontbreekt een kubusprojectie. Gevraagd wordt die te tekenen (fig.4).



figuur 4: de draaiende kubus

Wie goed de opbouw in de rijen en kolommen volgt, ziet dat de kubus in twee richtingen gekanteld wordt. In de kolommen een draaiing om verticale as, in de rijen horizontaal.

Freudenthal komt terug op de geringe respons. Hij wijst

op het wiskundige taaltje dat nodig is om de stand van de kubus te beschrijven met woorden als 'as', 'draairichting' en 'hoek'. Het wordt duidelijk dat de studenten (fig.5) niet beschikken over deze taal, in elk geval kunnen ze deze niet toepassen in de context van de dagelijkse dingen.



figuur 5: Gorcumse PA-studenten 1976-'77

Didactische fenomenologie

Freudenthals boek 'Didactical Phenomenology of Mathematical Structures' kwam uit in 1983. De eerste zinnen van 'A look backward and a look forward', een soort woord vooraf op de plaats van een voorwoord, luiden:

Men die, systems last. Immortality is assured to those who built their name into a system. Although even immortality is not what it used to be any more, and I did not crave for it, I once a day set my mind on writing my first systematic work, after a few that can rightly be called chaotic. The result has been the most chaotic of all - so chaotic that when the reader expects a preface he has to wait for Chapter 6 ...

En hij eindigt dit voorafje met een uitleg van het begrip fenomenologie en een verwijzing naar zijn instituut in de jaren zeventig:

The didactical scope of mental objects and activities and of onset of conscious conceptualisations, if didactically possible, is the main theme of this phenomenology. It was written in the stimulating working atmosphere of the IOWO ...

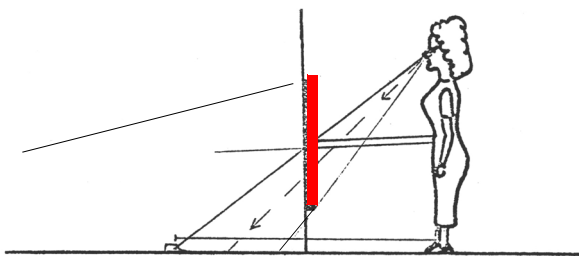
Mentale objecten en handelingen behoren eveneens tot de *big ideas* van Freudenthal. In zijn eerste hoofdstuk geeft hij een voorbeeld: de grootheid lengte. Zijn verwijzing naar de tijd van het IOWO roept gelijk herinneringen op. Zo af en toe ontvingen alle IOWO-medewerkers een hoofdstuk van de 'Didactische Fenomenologie' (in het Nederlands) in hun postvakje. Het waren moeilijke teksten, niet omdat we ze chaotisch vonden, maar omdat elk hoofdstuk (Natuurlijke Getallen, Verzamelingen, Breuken, Verhoudingen, Meetkundige Structuren, In de Meetkundige Context, enzovoort) begon met een moeilijke wiskundige analyse van het te bespreken fenomeen. Na verschijning van het boek kon Freudenthal (1989, 1990a en b) er in veel eenvoudiger taal over schrijven.

De hoofdstukken in de ‘Didactische fenomenologie’ maakten voldoende indruk om de auteur te vragen hoofdstukken voor de PA-blokken te schrijven. Het werden er twee: ‘Meten vanuit wiskundig standpunt’ (1977) en ‘Verhoudingen als verschijnsel’ (1979).

Natuurlijk kwam de fenomenologische benadering van de wiskunde ook in en om de PA te Gorinchem ter sprake. Een paar herinneringen.

Met meetkundige bril

Freudenthal is tussen de bedrijven door bezig aan zijn boek over de ‘Didactische fenomenologie van wiskundige structuren’. In onze meetkundelessen kunnen we daar gebruik van maken. Vooral de manier van kijken spreekt ons aan. We gaan de wereld rondom ons steeds meer zien door een meetkundige bril. De studenten hebben tijdens een proefwerk geworsteld met het probleem of de dame vóór de passpiegel haar voeten in de spiegel kan zien (fig.6)?



figuur 6: de passpiegel van Wouter

Student Wouter heeft de fout gemaakt de viseerlijn (vertrekt uit het oog naar een voorwerp en geeft dus de kijkrichting aan) en de lichtstraal (wordt van een voorwerp weerspiegeld naar het oog) te verwarren. De ‘straal’ uit het oog van het meisje werd door de spiegel teruggekaatst, meent hij.

Het geeft ons aanleiding de meetkundige ‘rechte lijn’ fenomenologisch te beschouwen: viseerlijn, lichtstraal, (vouwlijn) snijlijn van twee vlakken, verbinding tussen twee punten (hemelsbreed), knijlijn, constructielijn, verlengde van een lijnstuk, ...

Nieuw licht op oppervlakte en inhoud

We overdenken de blokkenberg op het werkblad voor een gesprek met kinderen uit klas 5. Wij denken aan de moeilijkheid die sommige kinderen hebben bij het bekijken van de tekening en in het blokkenbouwsel geen diepte zien. Voor- en zijvlakken lijken voor hen in eenzelfde vlak te liggen. Dit wordt zichtbaar als blijkt dat ze niet in staat zijn het aantal blokjes te tellen. Freudenthal plaatst daar twee interessante en tegelijk praktische opmerkingen bij en doet ook een voorstel: Laat de kinderen zich voorstellen dat zonlicht op het bouwsel valt en ze dan laten tekenen op welke vlakjes het licht valt en welke in de schaduw liggen.

Het blijkt een goede opstap om voor het berekenen van oppervlakte waarnaar gevraagd wordt, het bouwsel te verven en de prijs daarvan te bepalen. Toen kwam ook de grootheid ‘inhoud’ aan bod. Daar valt niets bij te schilderen en dit is voor de studenten niet direct duidelijk. Freudenthal bedenkt iets om het berekenen van de inhoud een praktische betekenis te geven: ‘De blokkenberg is een huis. Het meeste wat in een huis zit is lucht. Wat kun je met die lucht doen? Verwarmen bijvoorbeeld!’

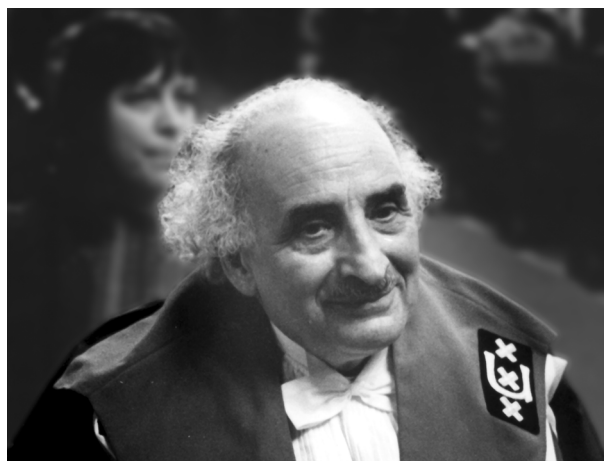
Gesprekken met kinderen

Toen Freudenthal als hoogleraar-directeur van het IOWO bij zijn entree in de wekelijkse Wiskobasbijeenkomst op bescheiden wijze liet merken dat hij zichzelf wilde beschouwen als lerende in het team, wist hij tenminste één ding zeker. Om het leren van kinderen beter te leren kennen en te begrijpen, moet je met ze praten. Net zoals Piaget het deed in zijn klinische gesprekken met kinderen. ‘Wandelingen met Bastiaan’ (1975), een serie artikeltjes in ‘Pedomorfose’, waarvan zijn vrouw, S. Freudenthal, de redactie voerde, tonen hoe hij die gesprekken voerde en hoe hij ervan leerde.

Dergelijke leeromgevingen had Freudenthal ook voor ogen voor de PA-studenten. ‘Gesprekken met kinderen’ werd een vast onderdeel van het stageprogramma van eerstejaars. Als eerstejaarsdocent woonde hij gesprekken van studenten met leerlingen bij, besprak ze achteraf met ze en gaf ook regelmatig het voorbeeld. Hij genoot ervan en de kinderen niet minder onder leiding van die ‘echte’ professor. Hier een paar herinneringen.

Twee broers: Freudenthal speelt in

Het is woensdag medio januari 1977. Twee dagen na de uitreiking van het eredoctoraat aan Freudenthal aan de Universiteit van Amsterdam (fig.7).¹

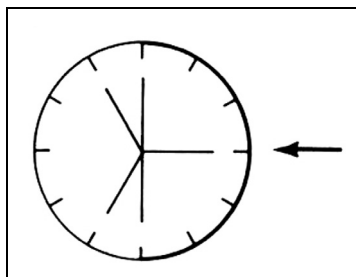


figuur 7

We zijn in Arkel en middenin de zesde klas staat een tafel klaar voor hem en drie leerlingen. De andere kinderen zitten eromheen. Zij moeten aantekeningen maken van het

gebeuren aan tafel. Freudenthal vertelt het probleem ‘van de twee broers’. Ze gaan naar dezelfde school, maar de ene is sneller dan de andere. De langzame broer gaat vijf minuten eerder weg en komt ook vijf minuten later op school dan zijn broer. De snelle broer doet er dertig minuten over. Waar haalt hij zijn broer in? Na verkenning van het probleem moet aan de oplossing begonnen worden.

Maar de kinderen zeggen niets en Freudenthal moet wat bedenken. Laten we eens wat tekenen, zegt hij. Tot ieders verrassing tekent een jongen uit het groepje een klok. Nu moet Freudenthal daarop inspelen. En dit doet hij alsof hij jarenlang ervaring in klas 6 heeft. De klok, of beter een wijzerplaat met streepjes op elke vijf minuten, staat op het papier. Geen getallen. Hoe lang doet de snelle broer erover? Op de wijzerplaat komt een verticale middenlijn. Je kunt denken van twaalf uur naar zes uur. Wanneer vertrekt de ander? Er komt een ‘wijzer’ naar het punt van elf uur. En wanneer komt hij op school aan? Nu komt er een ‘wijzer’ naar het punt van zeven uur. Er staat nu een mooie symmetrische tekening, de symmetrie springt in het oog. Een meisje ziet het meteen. Ze tekent een pijl naar het punt van drie uur. ‘Dáár!’, zegt ze (fig.8).



figuur 8: twee broers

Gulliver: Freudenthal geeft hints

In maart zit Freudenthal in een groepje vijfdeklassers, met studente Elly, die met de leerlingen over ‘Gulliver’ praat. Op de PA zijn we inmiddels begonnen met het nieuwe blok ‘Verhoudingen’, waarin Freudenthal onder meer het hoofdstuk ‘Verhoudingen als Verschijnsel’ voor zijn rekening heeft genomen.

Het blok begint met het verhaal van Gulliver in het land van de Lilliputters en een schaal van 1 op 12. De verhoudingsproblematiek spitst zich toe op het probleem hoe de Lilliputters hun eigen zakdoek moeten vergroten om er een voor Gulliver te maken. Elly heeft in het blok ook een stageopdracht in dit kader gevonden en is daarmee aan de slag gegaan.

Terug in de auto naar Utrecht doet Freudenthal verslag van het gesprek met de leerlingen. Hij vond wat Elly deed veel te abstract. Ze gebruikte geen echte zakdoek, ze sprak van schaal 1 : 12 in plaats van twaalf keer zo groot, ze nam kubussen in plaats van mensen en sprak over ‘warmteopname’ in plaats van ‘warmte die een mens nodig heeft’. Freudenthal vertelt dat hij op de punten, waar

concretisering nodig was, heeft ingegrepen. Wij denken met enig medelijden aan Elly en zien haar in gedachten aan tafel zitten met haar leerlingen. Maar Freudenthal heeft leerzame dingen voorgesteld aan de leerlingen en vooral ook aan Elly: ‘Neem er eens een echte zakdoek bij’; ‘Doe de zakdoek voor je gezicht, hoe groot is een gezicht?’; ‘Denk eens aan Gulliver als Lilliputter’ en ‘Tekenen een gewoon mens en een Lilliputter’.

6 Tot slot

Freudenthal heeft niet alleen tijdens en na afloop van zijn bezoeken aan de Gorcumse PA over de opleiding van leraren en het leren van studenten als toekomstige leraren, nagedacht. In ‘Schrijf dat op, Hans’ (1987) lezen we dat hij al eerder een pleidooi hield voor de invoering van practica in de universitaire opleidingen wis- en natuurkunde. Ook bij oprichting van de Nieuwe Lerarenopleidingen in het begin van de jaren zeventig heeft hij zich nadrukkelijk met het opleidingsprogramma voor toekomstige leraren wiskunde bemoeid.

Het basisonderwijs en dus ook de onderwijzersopleiding krijgt zijn aandacht als hij zelf kinderen krijgt, dus vader en nog weer later ook grootvader wordt. Maar nadenken over leren en onderwijzen deed Freudenthal al veel eerder. In zijn autobiografie valt te lezen dat hij al bijles gaf toen hij nog maar dertien jaar oud was. Maar, voegt hij daaraan toe: ‘Mijn hele leven ben ik een slecht leermeester geweest en om daar het beste van te maken ben ik al vroeg over onderwijs gaan nadenken’. Freudenthal heeft over het reken-wiskundeonderwijs bijna zijn hele leven nagedacht. De resultaten van dit denkwerk heeft hij beschreven in artikelen en boeken en laten horen tijdens nationale en internationale conferenties en andere bijeenkomsten. Maar Freudenthal deed meer dan nadenken, schrijven en soms op scherpe wijze kritiek leveren op het bestaande, vastgeroeste rekenonderwijs en de soms starre opvattingen van onderwijskundigen.

In de nog steeds goed leesbare en leerzame bundel artikelen van zijn hand ‘Appels en peren - wiskunde en psychologie’ richt Freudenthal (1984) de aandacht op zaken die nog steeds van belang zijn voor de opleidingen leraar basisonderwijs. We noemden er al enkele: het belang van rijke contexten bij het leren en onderwijzen, de relatie tussen moedertaal en wiskundetaal, cognitieve ontwikkeling, visualiseren, oplossen van problemen en het observeren van kinderen. Ook PA-studenten wilde Freudenthal leren observeren en aan het oplossen van problemen zetten. In dit geval het oplossen van en het discussiëren over mathematisch-didactische problemen.

Zijn bundel ‘Appels en peren’ wordt afgesloten met een vijftiental voorbeelden van mathematisch-didactische probleempjes onder de titel ‘Studentenhaver’.

Omdat hij dat vast leuk gevonden zou hebben, besluiten wij dit artikel met zo'n probleem:

Ik vraag Monica (9): Een moeder en haar dochtertje zijn samen 21 jaar oud. Hoe oud is elk afzonderlijk?
De broer (twee jaar ouder), moeder en vader zitten erbij.
Schrijf een treurspel in één akte over wat er toen gebeurd zou kunnen zijn.

Noot

- 1 Illustratie van Ronald Sweering (1977).

Literatuur

- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Freudenthal, H. (1975). Wandelingen met Bastiaan. *Pedagogische tijdschrift*, 25, 51-64.
- Freudenthal, H. (1978). *Weeding and Sowing*. Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Kluwer Academic

- Publishers.
- Freudenthal, H. (1984). *Appels en peren - wiskunde en psychologie*. Apeldoorn: Van Walraven.
- Freudenthal, H. (1987). *Schrijf dat op, Hans. Knipsels uit een leven*. Amsterdam: Meulenhoff.
- Freudenthal, H. (1989). Wiskunde fenomenologisch. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 8(2), 33-40.
- Freudenthal, H. (1990a). Wiskunde fenomenologisch (2). *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 8(3), 11-20.
- Freudenthal, H. (1990b). Wiskunde fenomenologisch (3). *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 8(4), 51-61.
- Goffree, F. & H. Jansen (1976). *Kijken, doen, denken en zien*. Utrecht: IOWO.
- Goffree, F., H. Jansen & H. Freudenthal (1979). *Verhoudingen. Wiskunde & Didactiek in de onderwijzersopleiding*. Utrecht: IOWO.
- Jansen, H., F. Goffree & J. Keijne-mans (1977). *Metten. Wiskunde & Didactiek in de onderwijzersopleiding*. Utrecht: IOWO.

It is the year 1976. Professor Freudenthal has been professor-director for five years, and, as he put it himself, employee of IOWO, when he becomes interested in development work for Dutch Teacher Colleges. Being interested soon turns into participation and commitment.

Together with H. Jansen and F. Goffree he travels from Utrecht to Gorinchem: on Tuesday visiting the PA, on Wednesday participating in the student teachers' fieldwork. He holds discussions with student teachers during the 'Mathematics & Didactics' lessons, and with the teachers and their students as well. Often he talks with the children at school, following the Socratic approach. Following these activities on the 'shopfloor' of a Teacher College, they are analysed and discussed over lunch and on the way back to Utrecht.

Professor Freudenthal is a newcomer in the world of Teacher Colleges, but he feels right at home from the very beginning. He likes to present the results of his thinking about mathematics education to students, student teachers, teachers, teacher educators and curriculum developers, both in practice and on a theoretical level.

Wandelingen met Bastiaan

Bastiaan (6,1). Na een reeks zonnedagen ziet hij wolken en zegt: 'Het gaat regenen.' 'Neen', zeg ik, 'dit zijn heel hoge wolken, daar komt geen regen van; regenwolken zijn laag en donker.' Hij: 'Hoe hoog zijn die wolken?' Ik (overdrijvend): 'Tienduizend meter.' Hij: 'En hoe hoog zijn regenwolken?' Ik: 'Duizend meter.' Hij: 'Dus (met de hand op de grond) als wij hier zijn en de regenwolken zó hoog (wijst ongeveer 30 cm boven de grond), dan zijn dat (wijst ongeveer 1 meter boven de grond), geen regenwolken.'

(Appels en peren / wiskunde en psychologie. Apeldoorn: Van Walraven, 71)