



# Stilstaan bij enkele grondgedachten uit Freudenthals laatste werk

- een recensie in revisie -

Jo Nelissen

Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

## 1 Inleiding

In het begin van de jaren negentig besprak ik voor het tijdschrift 'Pedagogische Studiën' Freudenthals allertlaatste boek, waarvoor hij een opmerkelijke titel had gekozen, namelijk 'Revisiting Mathematics Education. China Lectures'. *Revisiting* dacht ik toen, zou misschien iets te maken kunnen hebben met 'visie' en met 'Revisiting Mathematics Education' kan dan bedoeld zijn dat de auteur meent dat de tijd rijp is om zijn eigen ideeën over reken-wiskundeonderwijs te herzien. Freudenthal had met deze titel echter iets anders op het oog. Namelijk een kritische terugblik op zijn werk, zijn ideeën en de wijze waarop die tot stand waren gekomen. Die ideeën worden niet zozeer *herzien* (al gebeurt dat soms ook wel) maar vooral *bezien*. Freudenthal onderwerpt fundamentele vraagstukken aan een grondige analyse en fileert daarbij zijn eigen wetenschappelijke denken.

Dit artikel is een bewerking van de recensie die bijna vijftien jaar geleden werd geschreven. Hier en daar is het echter ook een revisie, al hebben de destijds geentleerde ideeën, geloof ik, doorgaans niet dramatisch schipbreuk geleden.

## 2 Common sense

In het leven van een mens begint wiskunde altijd als *common sense*, zo luidt een van Freudenthals eerste grondgedachten. Het wiskundeonderwijs moet bij die *common sense* aansluiten:

In general I believe that in instruction it would be more recommendable to start with common sense ideas rather than to reject them as outdated and better being suppressed. (pag.6)

Zo is het kunnen opzeggen van de getallenrij - het allereerste algoritme met een wiskundig karakter dat een kind verwerft - een *common sense* algoritme dat voortkomt uit *means of common language*. Met *common sense* is niet bedoeld, al pleit Freudenthal krachtig voor nauwe banden met de realiteit, dat de kennisverwerving slechts op de

dagelijkse ervaring (op de empirie) moet berusten. Wanneer dat laatste wel gebeurt, kunnen gemakkelijk misverstanden ontstaan, zoals blijkt uit analyses van pre-concepties op het gebied van de natuurkunde. Het idee 'ijzer is kouder dan hout' of 'water verdwijnt als het verdampt' komt voort uit ervaringen waarop kinderen (en ook soms volwassenen) spontaan hun begripsvorming stoelen.

Het idee dat leren vooral een kwestie is van *ervaring* opdoen in situaties of contexten die voor de leerlingen zinvol en leuk zijn, is evenmin wat Freudenthal bedoelt als hij zegt dat het onderwijs moet starten bij *common sense*. Het begrip 'context' wordt, waarschijnlijk onder invloed van publicaties over het 'Nieuwe Leren' (dat tussen haakjes niet nieuw is en meestal niét over leren gaat), steeds meer gezien als 'context *als motivatie*'. Natuurlijk mogen (en moeten) contexten leerlingen motiveren, maar contexten zijn vooral bedoeld om een functie *als model* te vervullen. Dat betekent in het reken-wiskundeonderwijs dat contexten structuur moeten bevatten die door leerlingen geëxploiteerd moet worden. Met 'context als motivatie' bedoelt men de zin in rekenen te bevorderen (leren moet immers vooral 'leuk' zijn), bij 'context als model' gaat het om het stimuleren van cognitieve processen. En die moeten als zodanig voor leerlingen motiverend zijn of worden.

Soms denk ik, maar ik las dat bij Freudenthal niet, dat *common* mag staan voor gemeenschappelijk en dat *sense* opgevat mag worden als betekenis of zin. *Common sense* zou dan kunnen betekenen al datgene wat voor een kengemeenschap (van wiskundigen en ook van degenen die rekenen-wiskunde leren), in gemeenschappelijk, onderling overleg betekenis krijgt of misschien kan krijgen. Hierin kan men een pleidooi zien voor interactief onderwijs, waarin 'onderhandeld' wordt over 'betekenissen', in de woorden van Bruner *negotiation of meaning*. Ik zou wel willen weten of Freudenthal zich in zo'n interpretatie had kunnen vinden.

*Common sense* betekent bij Freudenthal dus méér dan ervaring opdoen en voor leerlingen leuke contexten bedenken. Het reken-wiskundeonderwijs moet weliswaar starten bij *common sense*, maar dit moet door reflectie op een hoger niveau worden gebracht. Transformatie en for-

malisering zijn daarbij de funderende processen. Op hoger niveau wordt het denken dan weer (opnieuw) *common sense*. Deze hogere niveaus worden niet bereikt als regels van bovenaf worden opgelegd:

But having be imposed they never had a real chance to develop into common sense of a higher order. (pag.8).

*Common sense* treffen we dus aan op verschillende niveaus, in elk geval in de wiskunde. Het is dan ook niet toevallig, zegt Freudenthal, dat de ontwikkeling van de wiskunde zich onderscheidt van bijvoorbeeld de ontwikkeling van de natuurwetenschap. De natuurkunde ontwikkelde zich sprongsgewijs en werd gekenmerkt door revoluties. De wiskunde evolueerde tegelijkertijd op verschillende plaatsen in verschillende culturen.

Common sense' in order to become genuine mathematics and in order to progress, had to be systematised and organised. (pag.9).

Met andere woorden, de *common sense* transformeerde in regels en die regels werden vervolgens weer *common sense*, maar nu van een hogere orde. Modellen functioneren in dit proces als intermediair. Vaak zijn dat modellen die de structuur van een context kenmerken, ze ordenen de werkelijkheid en maken formalisering mogelijk.

### 3 Guided reinvention

*Guided reinvention* is een ander sleutelbegrip in de theorie van Freudenthal. Hij zet dit begrip graag af tegen - door hem als modieus ervaren - begrippen als *discovery learning*: 'uncovering what was covered up by somebody else - hidden eastern eggs'. Het gaat in die gevallen meer om problemen die de onderzoeker in zijn hoofd had dan om de zoekprocessen van de lerende zelf. *Reinvention* dus, maar wát moet dan opnieuw uitgevonden worden: de wiskunde, de zoektochten van onze voorouders, de verrassende vondsten die men deed, maar ook de dwaalwegen en doodlopende straten waarin men per abuis terecht kwam, al de dilemma's waar men over ruziede en waar men niet uitkwam? Nee, zegt Freudenthal, want het gaat om *geleid her*-uitvinden. Waarheen moeten de kinderen dan wel *geleid* worden? Niet zozeer naar de wiskunde zelf, maar eerder naar het mathematiseren. Naar het abstraheren eerder dan abstracties, naar het schematiseren eerder dan naar schema's, naar het formaliseren eerder dan naar formules.

Is Freudenthal met deze stellingname een 'Nieuwe Leerder *avant la lettre*'? Hij keert zich er immers tegen dat leraren hun leerlingen kennis en regels opleggen (*having be imposed*) en hij bepleit dat leerlingen zelf hun wiskunde maken en hun denkprocessen construeren. Nee, een 'Nieuwe Leerder *avant la lettre*' is Freudenthal

niet en hij zou dat ook nooit zijn geworden. Het gaat hem immers om het *heruitvinden* van *wiskundige* activiteiten en wiskundige processen die ertoe doen en die niet volstrekt arbitrair zijn. Het is dan ook de verantwoordelijkheid van de leraar dat de leerlingen kennis maken met dit rijke erfgoed. Processen van abstraheren, formaliseren, schematiseren en reflecteren komen de leerlingen niet aanwaaien, die vragen om interactieve instructie en simultane interactie, als ik het in mijn eigen woorden mag zeggen.

## 4 Reflecteren

Welke leerprocessen zijn het eigenlijk die in het rekenwiskundeonderwijs van belang zijn? Freudenthal gaat op die vraag uitvoerig in. Hij bespreekt de betekenis van observeren van het handelen van anderen, zelfobservatie, observatie van het leren in groepen, blikwisseling (*change of perspective*) en het gedachtenexperiment. In het voetspoor van Van Hiele onderscheidt hij niveaus in het leerproces. Het leerproces vertoont dus sprongen van het ene niveau naar het andere en dat idee stemt overeen met de opvatting van Freudenthal dat leerprocessen *discontinu* verlopen. Het bereiken van hogere niveaus verloopt in sprongen en funderend daarvoor is: *Being made conscious and subjected to reflection* (curs. Freudenthal). Deze opvatting vinden we overigens ook bij Piaget, die dit proces van niveauverhoging en de coördinerende handelingen die zich daarbij ontwikkelen typeert als *processus réflexissante* en als *abstraction réflexissante* (Piaget 1977). Volgens Freudenthal (en ook Piaget) stimuleert reflectie de niveauverhoging:

... reflection on the higher level on one's activities of the lower one. (pag.101)

Maar wat is reflectie en reflecteren eigenlijk? Freudenthal zoekt (terminologisch en ook qua idee) geen aansluiting bij de meta(cognitie)golf van de jaren tachtig (metacognition, meta-memory, meta-problemsolving, meta-cognitive knowledge). Hij ziet reflecteren als:

... mirroring oneself in someone else in order to look through his skin, to explore him, to take him in. (pag.104).

Reflectie is dus van oorsprong sociaal en velen zullen hierin de opvatting van Vygotskij herkennen dat hogere psychische processen (zoals taal en denken) altijd eerst sociale processen zijn. Ik zou het zo willen zeggen: de dialoog met de ander gaat geleidelijk over in dialoog met jezelf. Freudenthal rekent het verplaatsen in het standpunt van een ander als zodánig al tot reflectie. Ik denk dat hier eerder sprake is van een proces waar reflectie uit voortkomt. Ik zou het begrip reflectie dan ook willen reserveren voor het analyseren van het *eigen* handelen, maar daarin wordt als het ware het standpunt van de ander weerspiegeld.

## 5 Leertheorieën

Hoe leren kinderen wiskunde? Hoe kinderen leren, is in allerlei theorieën beschreven. Met algemene leertheorieën heeft Freudenthal echter niet veel op. Sterker nog: 'I strongly distrust general learning theories'. Gal'perin is zo'n leerpsycholoog met wie hij graag de degens kruist, hetgeen echter niet heeft verhinderd dat elementen uit Gal'perins theorie het ontwikkelingswerk van Wiskobas hebben kunnen beïnvloeden. Gal'perin meent, zegt Freudenthal, dat alles gematerialiseerd kan worden. Ook tekens zouden tot de materiële wereld behoren. Wellicht, maar Gal'perin zélf heeft de betekenis van tekens (en symboolgebruik) vaak betwijfeld en op dit punt zelfs Vygotskij bestreden. Bovendien is 'gematerialiseerd' en 'materieel' bij Gal'perin niet van dezelfde *learning level*, zoals Freudenthal meent. Het gematerialiseerde bevat namelijk altijd al niet-materiële, mentale elementen. Het probleem met de theorie van Gal'perin is eerder, zou ik zeggen, dat op instructie dermate veel nadruk wordt gelegd, dat de constructie door kinderen (zeg maar de *common sense*) te weinig ruimte krijgt. Een Nieuwe Leerder avant la lettre was Gal'perin, zij het om heel andere redenen dan Freudenthal, dus helemaal niet. Gal'perin was allesbehalve constructivist, maar is Freudenthal dat dan wel?

In elk geval betwijfelt de laatste ernstig of de discussie, onder filosofen, over de vraag of en in hoeverre een individu zijn eigen wereldbeeld construeert, wel enige zin heeft. Hij geeft de voorkeur aan het begrip *re*-constructie. Tja, ik vraag me af of het er allemaal zoveel toedoet. In wezen gaat het er toch om, denk ik, dat een kind ruimte wordt geboden zijn eigen ideeën (constructies) te vormen en daarover met anderen van gedachten te wisselen (simultane interactie). Door de reflectie die de dialoog met anderen uitlokt, worden de eigen constructies op hoger niveau gebracht, soms bijgesteld, soms verworpen. Hoeveel ruimte een individueel kind moet en kan worden geboden, zal per kind en per situatie verschillen. Daarover zijn geen algemene uitspraken mogelijk.

## 6 Onderwijsonderzoek

Het hele gecompliceerde proces van onderwijzen en leren, van reflectie en niveauverhoging, van constructie en instructie moet steeds op basis van onderzoek worden gevolgd. Hoe doe je dat echter en aan welke eisen moet

wetenschappelijk onderzoek voldoen?

Freudenthal heeft een uitgesproken visie op 'onderwijs-onderzoek'. In die visie staat het begrip 'validiteit' centraal. Het streven om via steeds geavanceerder wiskundig-statistische technieken de betrouwbaarheid te verhogen, gaat vaak ten koste van de kwaliteit van het onderzoek. De meetprocedures zijn weliswaar uiterst verfijnd, maar de onderzoekers weten soms nauwelijks wat ze eigenlijk onderzoeken. Dat komt doordat ze zich onvoldoende voorbereid wagen op een voor hen onbekend terrein van het reken-wiskundeonderwijs. Het misbruik van wiskundige procedures is Freudenthal dan ook een gruwel, evenals misinterpretaties van onderzoeksgegevens.

Wat voor onderzoek deed Freudenthal dan zelf? Ik moest, er eerlijk gezegd, toch even over nadenken hoe ik die vraag kon beantwoorden. Freudenthal deed, geloof ik, op twee fronten onderzoek. Ten eerste verrichte hij voortdurend conceptuele analyses ten behoeve van de theorievorming en het hier besproken boek is daar een mooi voorbeeld van. Voortdurend prikkelde hij vakgenoten, voor- en tegenstanders tot reactie op zijn theorievorming. Deze theorie is een basis geweest tot veel onderzoek verricht door medewerkers van het naar hem genoemde instituut. Ten tweede verrijkte hij de gedachte- en theorievorming voortdurend met systematische observaties van leer- en denkprocessen van (zijn klein)kinderen en met de kwalitatieve analyses van zijn bevindingen.

## 7 Besluit

'Revisiting Mathematics Education' is een rijk boek waarin maar weinig thema's die het denken over reken-wiskundeonderwijs raken, onbesproken blijven. Het boek is bovendien nog steeds verrassend actueel. Vele nieuwe ontwikkelingen van heden ten dage (zowel in de theorie, de gedachtevorming als in de praktijk) kunnen gespiegeld worden aan Freudenthals vrijmoedige denkbeelden, zijn scherpe analyses en zijn directe betoogtrant. Daardoor roept hij ook wel weer tegenspraak en discussie op, maar dat is niet alleen leerzaam en verfrissend, maar bovendien het mooiste wat men van een wetenschappelijk publicatie mag verwachten.

En dat krijgt men dan ook.

### Literatuur

Piaget, J. (1977) *Recherches sur l'abstraction réfléchissante*. Paris: Presses Universitaire de France.