‘Common sense’ rekenen-wiskunde

Marjolein Peltenburg
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Aansluiting zoeken bij de common sense reality *van kinderen is het idee van Freudenthal dat in dit artikel wordt toegelicht. Aan de hand van een lessenserie uit het project ‘Speciaal Rekenen’ van het Freudenthal Instituut wordt beschreven hoe leerlingen uit het speciaal (basis)onderwijs tot een efficiënte aanpak kwamen voor het tellen van ongestructureerde hoeveelheden. De ontdekking van het voordeel van structuur speelt hierbij een cruciale rol.*
Juist die eigen ontdekking maakt dat aansluiting wordt gevonden bij de common sense reality *van kinderen. Zo ervaren zij rekenen-wiskunde als een betekenisvolle activiteit.*

1 Inleiding

> I prefer to apply the term ‘reality’ to that which at a certain stage common sense experiences as real.
> ‘Real’ is not intended here to be understood ontologically (whatever ontology may mean), therefore neither metaphysically (Plato) nor physically (Aristotle); not even, I would even say, psychologically, but instead commonsensically as when one uses is meant by the one who uses the term unreflectingly. It is not bound to the space-time world. It includes mental objects and mental activities. (pag.17)

Freudenthal (1991) legt uit dat wiskunde zich spontaan ontwikkelt bij het jonge kind. Wiskunde maakt al vroeg deel uit van de *common sense reality* en de wiskundige taal van de *common language of everyday life*. In het reken-wiskundeonderwijs zou daarom moeten worden aangesloten bij de *common sense reality* van kinderen. Freudenthal spreekt in dit verband over ‘Mathematics starting and staying in reality’.
Het idee van aansluiting zoeken bij de *common sense reality* van kinderen is voor mij gaan leven door ervaringen die zijn opgedaan in het project ‘Speciaal Rekenen’ van het Freudenthal Instituut (in samenwerking met de KPC- en CED-groep). In dit project staat de invoering van het realistisch reken-wiskundeonderwijs in het speciaal (basis)onderwijs, afgekort S(B)O, centraal.

Sinds 1998 wordt een onderscheid gemaakt in speciaal onderwijs en speciaal basisonderwijs. Het speciaal onderwijs wordt bezocht door lichamelijk, zintuigelijk of verstandelijk gehandicapte leerlingen en leerlingen met gedragsstoornissen. Het voormalige LOM- en MLK-onderwijs is gefuseerd tot speciaal basisonderwijs.[1]
De leerling uit het LOM-onderwijs (Leer- en Opvoedingsmoeilijkheden) heeft in principe een normale intelligentie, maar de prestaties blijven achter bij het potentieel. De oorzaken hiervan liggen met name in de pedagogische en sociaal-emotionele sfeer. Het gaat bijvoorbeeld om leerlingen met licht hersenletsel (ADHD), of problematische thuisomstandigheden. De MLK-leerling (Moeilijk Lerend Kind) heeft een lage intelligentie, wat leidt tot achterblijvende resultaten. Het werktempo van deze leerlingen ligt doorgaans aanzienlijk lager dan dat van de gemiddelde leerling (Boswinkel & Moerlands, 2001).[2]
De opvatting dat leerlingen baat hebben bij een eenduidige aanpak, waarbij de leerstof wordt opgedeeld in kleine stapjes, is in het S(B)O nog steeds actueel. Bovendien wordt in het reken-wiskundeonderwijs relatief veel tijd en energie gestoken in het maken van opgaven en relatief weinig in het opdoen van kennis en ervaringen die nodig zijn om deze formele bewerkingen met begrip te kunnen oplossen (Boswinkel & Moerlands, 2001). De invoering van een realistische reken-wiskunde*methode* betekent dus niet per direct een garantie voor de invoering van realistisch reken-wiskunde*onderwijs*.

Het project Speciaal Rekenen stelt zich tot doel een bijdrage te leveren aan de implementatie van het realistisch reken-wiskundeonderwijs in het S(B)O. Hiertoe worden door medewerkers van het project lesexperimenten uitgevoerd. Deze lesexperimenten dienen als kapstok voor wat er met deze leerlingen bereikt kan worden. Uit de experimenten blijkt dat ook - of misschien wel juist - leerlingen in dit type onderwijs gebaat zijn bij realistisch reken-wiskundeonderwijs. Het onderwijs komt immers dichterbij de dagelijkse realiteit te staan, in plaats van dat er een discrepantie blijft bestaan tussen de schoolse en de thuissituatie. Over de scheiding tussen rekenen-wiskunde op school en daarbuiten zegt Freudenthal (1991) het volgende:

> The specific relation between content and form - the emphasis on form, reinforced by the existence of a particu-

larly efficient language - favours the growth of watertight membranes between mathematical and ‘outside’ contents, between mathematical language and everyday life of more technical languages. And this takes place in spite of the fact that mathematics could be an outstanding example of broad-minded integration into reality. (pag.18)

Het behoud van rekenen-wiskunde als onderdeel van de *common sense reality*, zoals die zich zo spontaan bij jonge kinderen ontwikkelt, heeft als voordeel dat het geleerde op school ook praktische gebruikswaarde krijgt. Juist zwakke leerlingen kunnen hiervan profiteren, want dit zijn vaak de leerlingen die moeite hebben met het leggen van verbanden. Bovendien wordt door de aansluiting bij de *common sense reality* bevestigd dat leerlingen rekenen-wiskunde op school als betekenisvolle activiteit ervaren.

2 Realistisch reken-wiskundeonderwijs in het S(B)O

Nadat de meeste basisscholen zijn overgegaan op het gebruik van een realistische reken-wiskundemethode volgen nu ook de S(B)O-scholen. Het gaat daarbij om de invoering van een realistische basisschoolmethode, aangezien er geen realistische methode voor het S(B)O is ontwikkeld.
Uit een vooronderzoek van het project Speciaal Rekenen is gebleken dat de realistische reken-wiskundemethoden, die zijn ontwikkeld voor het regulier basisonderwijs, redelijk goed bruikbaar zijn binnen het S(B)O. Het gebruik van contexten, de betere aansluiting op de belevingswereld van kinderen en de grotere praktijkgerichtheid worden door leerkrachten erg gewaardeerd. De geconstateerde knelpunten betreffen met name het gebrek aan overzicht op leerlijnen in de methode, een te hoog tempo of een te groot abstractieniveau van de methode (Boswinkel & Moerlands, 2003).

Het project Speciaal Rekenen biedt ondersteuning bij de invoering van het realistisch reken-wiskundeonderwijs door in te spelen op de resultaten uit het vooronderzoek. Dit krijgt gestalte door het in kaart brengen van de leerlijnen uit de drie meest gebruikte realistische reken-wiskundemethoden in het S(B)O. Hiertoe worden zogenoemde leerlijnoverzichten ontwikkeld.

Naast deze leerlijnoverzichten worden extra lessenseries ontwikkeld. Enerzijds gaat het om lessenseries als aanvulling op de methoden, anderzijds betreft het lessenseries als alternatief voor onderdelen uit de reken-wiskundemethoden die problemen opleveren voor S(B)O-leerlingen. De lessenseries worden ontwikkeld op basis van lesexperimenten. Hierbij vindt een nauwe samenwerking plaats met leerkrachten uit het S(B)O.

3 Ontdek het voordeel van structuur

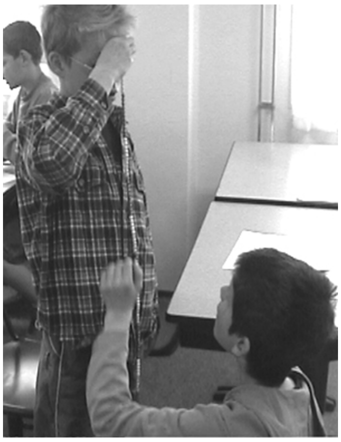
Een van de onderwerpen waarop het project Speciaal Rekenen zich richt, is het structureren en in het bijzonder het ontdekken van de voordelen van structuur. Een lessenserie die is ontwikkeld rond dit onderwerp is getiteld ‘Ontdek het voordeel van structuur in de kralenlessen’ (Moerlands & Peltenburg, 2004).[3] Deze lessenserie is gemaakt om leerlingen zelf het voordeel van structuur te laten ontdekken. Met deze eigen ontdekking van de voordelen van structuur wordt gewerkt aan: (1) de ontwikkeling van het getalbegrip, (2) het met inzicht leren rekenen tot honderd, en (3) het loskomen van het één voor één tellen. Hoewel de eerstgenoemde doelstellingen kunnen worden beschouwd als doelstellingen die over een langere termijn worden gerealiseerd, kan de laatstgenoemde worden opgevat als concreet en direct na te streven doel van de lessenserie. Loskomen van het één voor één tellen is voor veel leerlingen niet eenvoudig. Er zijn verschillende redenen om één voor één te blijven tellen:

- Eén voor één tellen biedt garantie op een antwoord en in veel gevallen zal dat antwoord correct zijn. De leerlingen houden vast aan een (schijn)zekerheid.
- Sommige leerlingen tellen zo snel, dat er geen noodzaak is om over te gaan op een andere strategie.
- Om verkort te kunnen tellen is het nodig om structuren te herkennen. Sommige leerlingen hebben hier geen oog voor.
- Er zijn leerlingen die wel structuur herkennen, bijvoorbeeld in de vorm van vingerbeelden, maar zij zien niet in hoe deze kan worden gebruikt bij het oplossen van een rekenprobleem (Boswinkel & Moerlands, 2003).

In de lessenserie ‘Ontdek het voordeel van structuur in de kralenlessen’ wordt een situatie gecreëerd waarin leerlingen worden gestimuleerd om na te denken over een efficiënte aanpak voor het tellen van ongestructureerde hoeveelheden.

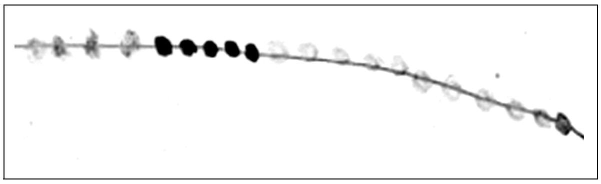
figuur 1: de kralenketting als meetinstrument

Eerst krijgen de leerlingen de opdracht om in tweetallen een kralenketting te rijgen die zij gaan gebruiken als meetinstrument (fig.1). De leerlingen zijn vrij in het ontwerp dat zij kiezen. Wanneer de kralenketting af is, gaan zij er voorwerpen mee opmeten. Dat wil zeggen dat de leerlingen van enkele voorwerpen bepalen hoeveel kralen lang deze zijn en de aantallen kralen noteren. Door het meten van diverse voorwerpen worden de leerlingen geconfronteerd met de *sterkte* van hun ontwerp, ofwel met de mate waarin zij structuur in hun kralenketting hebben aangebracht (fig.2).



figuur 2: structuur in de kralenketting

De ervaring met het steeds weer tellen van alle kralen draagt bij aan de ontdekking dat structuur voordeel met zich meebrengt. Immers, het keer op keer tellen van de kralen is een tijdrovende zaak, zeker wanneer je wordt afgeleid en je opnieuw moet beginnen. Hierdoor kunnen leerlingen zich gaan afvragen of het tellen van de kralen op een efficiëntere manier mogelijk is.
Om deze reflectieve houding te stimuleren worden de leerlingen uitgedaagd om opnieuw een kralenketting te rijgen, die zij nog beter geschikt vinden om te bepalen hoeveel kralen lang iets is. Om het maken van bewuste overwegingen te prikkelen, werken de leerlingen eerst aan een ontwerptekening van hun nieuwe kralenketting (fig.3).



figuur 3: ontwerptekening van een kralenketting

Alvorens het ontwerp uit te voeren krijgen klasgenoten de gelegenheid om (kritische) vragen te stellen, zodat het ontwerp eventueel nog bijgesteld kan worden. Wanneer de nieuwe kralenketting is geregen kan de proef op de som worden genomen: Hoe goed werkt de nieuwe kralenketting als meetinstrument? Kan er handig mee worden bepaald hoeveel kralen lang een voorwerp is?
De lessenserie wordt afgerond met een klassikale bespreking waarin de kralenkettingen van de leerlingen en de manier waarop ermee is gemeten, centraal staan. Leerlingen kunnen laten zien hoe zij gebruikmaken van structuur tijdens het meten. Zij tellen bijvoorbeeld met sprongen van vijf of tien (fig.4). Ook lichten de leerlingen hun keuzen toe.
Zo was er in een van de lesexperimenten een tweetal dat hun keuze voor een kralenketting met vijfstructuur als volgt beargumenteerde: ‘Omdat dat makkelijk tellen is’.

figuur 4: tellen met sprongen

Na afronding van de lessenserie is het uiteraard van belang om als leerkracht regelmatig terug te verwijzen naar de lessen. De ontdekking van het voordeel van structuur kan later nog goed van pas komen.

4 Structureren

In het onderwijs wordt veel gebruikgemaakt van didactische modellen die een zekere structuur bevatten, zoals het rekenrek met zijn vijf- en tienstructuur. De structuur in de gebruikte modellen is echter niet door de leerling zelf ontworpen. Leerlingen worden geconfronteerd met de modellen vanuit de veronderstelling (van volwassenen) dat de aangebrachte structuur handig is bij het tellen en het latere rekenen ermee.
Voor leerlingen hoeft het niet vanzelfsprekend te zijn dat de voorgeschreven structuur voordeel[4] heeft. Zo blijven zij soms één voor één tellen, ook al is er een zekere structuur in de te tellen objecten aanwezig. Deze aanpak is *top-down* te noemen, aangezien het uitgangspunt voor het onderwijs wordt gevormd door de formele wiskundige kennis van de expert die in een model is gevat.

Gravemeijer (1994) zegt over het inzetten van dergelijke modellen dat er geen expliciet verband wordt gelegd met de *informal situated knowledge* van de leerling. Ook wanneer dit verband wel wordt aangebracht, bevatten de betreffende modellen een *top-down* element: de formele kennis wordt als gegeven beschouwd en het intermediaire model is een afgeleide van die formele wiskundige kennis. In het realistisch reken-wiskundeonderwijs wordt juist meer een *bottom-up* aanpak nagestreefd. Dit houdt in dat leerlingen hun eigen modellen construeren die de basis vormen voor niveauverhoging. Het gaat daarbij om meer formele niveaus van wiskunde bedrijven. De vraag is nu of leerlingen in het speciaal basisonderwijs in staat zijn om zelf modellen te ontwikkelen, om deze in te zetten en daarvan te profiteren.

Met de lesexperimenten die zijn uitgevoerd rond de lessenserie 'Ontdek het voordeel van structuur in de kralenlessen' is aangetoond dat leerlingen in het speciaal basisonderwijs in staat zijn om zelf structuur aan te brengen in een ongeordende hoeveelheid, niet omdat dat moet, maar omdat zij zelf het voordeel ervan al ontdekkend ervaren. Door het tellen van ongestructureerde hoeveelheden kralen worden de leerlingen bewust van de gemakken van structuur, en met name van de vijf- en tienstructuur. Leerlingen ontwikkelen zodoende een eigen model, een model met een zekere structuur voor het snel en efficiënt bepalen van een hoeveelheid. In eerste instantie heeft het gebruik van dit model alleen betrekking op de contextspecifieke situatie van het meten met de kralenketting. Later kan dat model uitgroeien tot een model voor wiskundig redeneren op een meer formeel niveau (Gravemeijer, 1994).

5 Structureren, organiseren en ordenen

Het aanbrengen van structuur is een methode om te organiseren, wat kenmerkend is voor rekenen-wiskunde. Freudenthal (1991) legt het als volgt uit:

> … in no other field does organising display itself in such purity, impose with such force and infiltrate so profoundly as it does in mathematics. Mathematics grows, by its self-organising momentum. (pag.15)

In de visie van Freudenthal (1983) zouden leerlingen met die verschijnselen in aanraking moeten worden gebracht die om een zeker ordeningsmiddel vragen, zodat zij van daaruit het ordeningsmiddel leren hanteren. Om dit mogelijk te maken, kan een beroep worden gedaan op de 'didactische fenomenologie'.
In de didactische fenomenologie van 'lengte' en 'getal' bevinden zich de verschijnselen die door 'lengte' en 'getal' geordend worden.
Stel dat de leerkracht 'structuur' wil onderwijzen, dan gaat het er niet om dat het begrip structuur wordt geconcretiseerd, maar dat er wordt gezocht naar verschijnselen die leerlingen ertoe aanzetten het mentale begrip structuur te vormen. Freudenthal spreekt hier niet over begripsverwerving, maar over de constitutie van mentale objecten. Hij benadrukt dat het werken met mentale objecten aan het expliceren in begrippen voorafgaat.

In een didactische fenomenologie worden leerlingen geconfronteerd met bepaalde verschijnselen die om een zekere ordening vragen. Realistisch reken-wiskundeonderwijs heeft op die manier een probleemoplossend karakter. Door het aanbieden van mooi gekozen contextproblemen krijgen leerlingen de gelegenheid om de wiskunde als het ware opnieuw uit te vinden. In dit proces van 'geleid heruitvinden' (ook wel *guided reinvention* genoemd) hebben leerlingen een actieve rol. Gravemeijer (1997) merkt hierover op dat het niet zozeer gaat om het aanbieden van authentieke, uit het alledaagse leven afgeleide problemen. Waar het om gaat, is dat de context waarin het probleem is gegoten door leerlingen als 'echt' wordt ervaren, zodat 'they can immediately act intelligently within this context'. Daarmee is gezegd dat 'realistisch' in realistisch reken-wiskundeonderwijs niet noodzakelijkerwijs gelijk staat aan *real-life* (pag.31).

Het geleid heruitvinden heeft een bottom-up karakter. De besproken lessenserie waarin leerlingen zelf het structureren leren herontdekken als middel om grip te krijgen op een onoverzichtelijke hoeveelheid kralen is hier een voorbeeld van. In het proces van heruitvinden gaan leerlingen uit zichzelf ordenen (structureren) en leren op deze manier het ordeningsmiddel (vijf- en tienstructuur) te hanteren.

6 Terugblik

Uit de lesexperimenten rond de genoemde lessenserie wordt duidelijk dat de leerlingen de gelegenheid kregen voor eigen constructies, of beter gezegd: 'co-constructies' op basis van een probleem dat zij ondervinden. Het voorvoegsel 'co' duidt op het gezamenlijk uitvoeren van mathematische activiteiten. Er werd gediscussieerd en de kinderen werden aangespoord hun ideeën te verdedigen. Leerlingen kozen hun eigen bewoordingen in een betoog of uitleg. Vragen van de leerkracht over handige en efficiënte manieren van tellen en meten, lokten bij de leerlingen een kritische houding uit. Naar aanleiding van discussies in de klas en met de kritiek en ervaringen van andere leerlingen werden hun gedachten en ideeën door 'reflectie' op een hoger niveau gebracht. Immers, in de dialoog worden leerlingen gestimuleerd om elkaars ideeën en aanpakken van commentaar te voorzien. Daardoor leren zij te anticiperen op de kritiek van anderen (Nelissen & Tomic, 1996).
De overgang naar een hoger wiskundig niveau wordt, behalve door reflectie, ook bevorderd door uit te gaan van betekenisgeving door leerlingen.

Reflectie en betekenisgeving kunnen beide worden bestempeld als activiteiten van de leerlingen zelf. Het geven van betekenis aan iets om daarmee op een hoger niveau te komen, vereist echter wel dat in het onderwijs van meet af aan wordt begonnen met rekenen-wiskunde dat betekenisvol is voor het kind.

In dit artikel werd uitgelegd dat het door leerlingen zelf laten ontwikkelen van modellen en het kiezen van problemen die vragen om een zekere ordening ertoe bijdragen dat rekenen-wiskunde op school als betekenisvol worden ervaren. In navolging van Freudenthal wordt zo begonnen met rekenen-wiskunde als onderdeel van de *common sense reality* (*starting at reality*) waarmee dit artikel werd ingeleid. Vanuit dat startpunt kan naar meer formele niveaus van rekenen-wiskunde worden toegewerkt, maar blijft de wiskunde onderdeel uitmaken van de *common sense reality* (*staying within reality*).

7 Tot slot

Zoals uit het voorgaande blijkt, is het idee van *common sense* rekenen-wiskunde anno 2005 nog steeds actueel. Misschien moet daarom in plaats van over dé idee worden gesproken over dé idee, dat volgens Van Dale 'het veronderstelde eeuwige en volmaakte grond- of voorbeeld van iets' betekent.

Noten

1 www.minocw.nl/rugzakje/speciaal.html
2 De ervaringen die in dit artikel worden beschreven hebben betrekking op het speciaal basisonderwijs.
3 De kralenlessen zijn een ontwerp van F. Moerlands.
4 De in deze alinea uitgelegde subjectieve lading van het begrip 'didactische modellen' geldt eveneens voor het woord 'voordeel'.

Literatuur

Boswinkel, N. & F.J. Moerlands (2001). Speciaal Rekenen. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 19*(3), 3-14.

Boswinkel, N. & F. J. Moerlands (2003). Het topje van de ijsberg. In: K. Groenewegen (red.). *Nationale Rekendagen 2002 - een praktische terugblik.* Utrecht: Freudenthal Instituut, 103-114.

Boswinkel, N. & F.J. Moerlands (2003). Rekenen tot 20, getalverkenning tot 100. Realistisch rekenen in het speciaal (basis)onderwijs. *Speciaal Rekenen groep 3, najaar 2003*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing realistic mathematics education.* Utrecht: CD-ß Press (proefschrift).

Gravemeijer, K.P.E. (1997). Instructional design for reform in mathematics education. In: M. Beishuizen, K.P.E. Gravemeijer & E.C.D.M. van Lieshout (eds.) *The Role of Contexts and Models in the Development of Mathematical Strategies and Procedures*. Utrecht: CD-ß Press, 13-34.

Moerlands, F. & M.C. Peltenburg (2004). Ontdek het voordeel van structuur in de kralenlessen. Speciaal Rekenen. Groep 4-5. *Optellen en aftrekken tot 100 en tot 1000*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Nelissen, J.M.C. & W. Tomic (1996). Reflection in Russian Educational Psychology. *Educational Foundations, 25,* 35-56.

Connecting to children's common sense reality is the idea of Freudenthal that will be looked at in this article. A description of a lesson series from the project 'Speciaal Rekenen' of the Freudenthal Institute clarifies how students in special education schools come to an efficient approach for counting unstructured amounts. They discover by themselves how structure can be very convenient to determine a certain amount.
By that very personal discovery a connection is made to the common sense reality of children. In this way, they experience mathematics as a meaningful activity.