



## Twee ‘didactikids’ over de lege getallenlijn

- Freudenthals observaties als inspiratiebron -

Marja van den Heuvel-Panhuizen  
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

*In Nederland wordt de inbreng van kinderen bij de ontwikkeling van reken-wiskundeonderwijs als erg belangrijk gezien. Freudenthal heeft daarvoor met de observaties van zijn kinderen en kleinkinderen een basis gelegd. Zijn doel was vooral om via spontane waarnemingen grip te krijgen op de cognitieve ontwikkeling van kinderen en om zo aanwijzingen te genereren voor het onderwijs. Dit laatste is ook het doel van het onderzoek dat onderwerp is van dit artikel. De beoogde aanwijzingen worden hierbij wel op een andere manier verkregen. In plaats van de betrokken kinderen te observeren, worden ze direct op hun didactische expertise aangesproken. Ze krijgen vragen voorgelegd over hoe zij denken over bepaalde onderwijskwesties en hoe zij het onderwijs zouden aanpakken. Van deze leerlingconsultaties valt veel te leren. In dit artikel vertellen twee kinderen wat zij vinden van de lege getallenlijn. Als didactisch model zijn ze er niet erg tevreden over. De getallenlijn was voor hen duidelijk een remmende factor. Bij doorvragen blijkt dat het onderwijs hierbij een grote rol heeft gespeeld. Later stellen ze hun mening echter bij. Het voorstel waar deze ‘didactikids’ aan het eind van het interview mee komen, zou tot de didactische bagage van iedere (toekomstige) leraar moeten behoren.*

### 1 Inleiding

Didactikids? Ja, ze bestaan echt. Het zijn kinderen die van nature een soort onderwijsaanleg hebben of die deze aanleg hebben ontwikkeld doordat ze bijvoorbeeld een vader of moeder of ander naast familielid in het onderwijs hebben. Het zijn ware didactische experts van wie leraren, onderzoekers en ontwikkelaars van reken-wiskundeonderwijs veel kunnen leren.

In dit artikel wil ik twee van deze didactikids aan het woord laten. Uit het materiaal dat ik door gesprekken met deze kinderen heb verzameld, heb ik voor dit artikel één onderwerp gekozen: het werken op de lege getallenlijn. Ik heb de kinderen over dit onderwerp geïnterviewd, omdat ik van hun vader had gehoord dat ze hierover zo hun gedachten hadden. Op z'n zachtst gezegd komt hun opvatting erop neer dat ze het door veel reken-wiskunde-didactici vertolkte enthousiasme voor de lege getallenlijn als didactisch model bepaald niet delen. Het interview maakt duidelijk waarom dit zo is. Het bevat een aantal belangrijke lessen voor het gebruik van de lege getallenlijn en met name voor de implementatie ervan via methoden en de opleiding en nascholing van leraren.

Voordat ik op het interview zelf in ga, vertel ik eerst iets over de kinderen en de opzet van het onderzoek. Maar ik wil het artikel beginnen met een korte algemene beschouwing over kinderen als bron van inzicht in het leren en onderwijzen van rekenen-wiskunde. Het voorbeeld dat Freudenthal in deze heeft gegeven, krijgt in het hier beschreven onderzoek wel een andere uitwerking.

### 2 Kinderen als bron van inzicht

#### De Wiskobastraditie van het observeren van kinderen

Sinds Wiskobas hebben kinderen altijd een grote inbreng gehad bij de ontwikkeling van het Nederlandse reken-wiskundeonderwijs. Het waren Freudenthals observaties van zijn kinderen en vooral zijn kleinkinderen die hiervoor een basis hebben gelegd. Zijn voorbeeld deed volgen. We kennen niet alleen Bastiaan, die liet zien hoe hoog de wolken zitten die op een zonnige dag aan de hemel staan in vergelijking tot wolken die aankondigen dat het gaat regenen, maar ook Streeflands zoon Coen, die vond dat de walvis op de poster veel te groot was afgebeeld - om maar twee van het grote aantal observaties te noemen van Freudenthal en zijn collega's uit de Wiskobastijd. Bij de 75<sup>ste</sup> verjaardag van Freudenthal sprak Van den Brink (1980) dan ook over ‘onderwijzende kinderen’.

Behalve dat Freudenthal het voorbeeld heeft gegeven voor het maken van deze - zoals hij het noemt (Freudenthal, 1984a, pag.101) - ‘terloopse’ observaties, heeft hij ook aangegeven waar het bij deze waarnemingen om te doen was: ‘wat (in echte leerprocessen) telt, zijn de discontinuïteiten, de sprongen’ (ibid., pag.103). Het zijn de ontdekkingen van kinderen die de sprongen in hun ontwikkeling markeren. Om deze ontdekkingen op het spoor te komen, moeten we volgens Freudenthal naar het individuele kind kijken.

Neem je het gemiddelde over zoveel kinderen, dan vlak je die sprongen uit. Het gemiddelde kind vertoont inderdaad een continue ontwikkeling. Maar kijk je scherper, naar de enkeling, dan neem je de sprongen waar, en wat mij betreft, zijn zij het enige waar het op aankomt (ibid.)

In samenhang met het voorgaande heeft Freudenthal tegen de heersende norm van het empirisch-analytisch sociaal-wetenschappelijk onderzoek in, de (bewijs)kracht van kwalitatief  $n = 1$  onderzoek blootgelegd; voorbeelden hiervan zijn te vinden in zijn voordracht voor de Amerikaanse 'National Council of Teachers of Mathematics' (Freudenthal, 1979). Bovendien vond hij hiervoor bevestiging in de exacte wetenschappen: 'Eén slinger van Foucault was voldoende om de wenteling van de aarde te demonstreren' (Freudenthal, 1984a, pag.101). Elders benadrukte hij nog eens: 'Eén goede observatie kan meer waard zijn dan honderden metingen of interviews' (Freudenthal, 1984b, pag.19).

Zo hebben de hierboven beschreven observaties van Bastiaan en Coen ons de ogen geopend voor de kwalitatieve ingangen van verhoudingen, de relatie met het meten en de visuele wortels van verhoudingen; allemaal zaken die erg belangrijk zijn om het begrip verhoudingen te onderwijzen en allemaal didactische ontdekkingen die ten tijde van het mechanistische reken-wiskundeonderwijs niet zo vanzelfsprekend waren. Toch waren er echter geen herhaalde metingen voor nodig om ze toe te voegen aan het geheel van theoretische noties die in samenhang met elkaar de domeinspecifieke realistische onderwijstheorie vormen voor het vak rekenen-wiskunde.

Bij Freudenthal bestond het onderzoek vooral uit terloopse observaties. Bewust experimenteren deed hij zelden (Freudenthal, 1984a, pag.101) en van opiniepeilingen en het afnemen van vragenlijsten bij leraren en leerlingen moest hij helemaal niets hebben (Freudenthal, 1978, 1988). Ze leverden volgens hem alleen maar zinloze, onbetrouwbare of voorspelbare reacties op. Ofschoon ik van de ene kant zijn scepsis wel kan delen, denk ik toch dat Freudenthal hierover anders geoordeeld zou hebben als hij kinderen had geïnterviewd *over* onderwijs. Op dit direct aanspreken van kinderen op hun deskundigheid op het gebied van onderwijs ga ik in het volgende in.

### **Kinderen bevragen als didactische experts**

Kinderen om raad vragen over onderwijskwesties is in onderwijsonderzoek een zeldzaamheid. Dat was in de tijd van Wiskobas zo en dat is het nu nog. Maar als we over de Nederlandse grens heengaan en ons niet beperken tot reken-wiskundeonderwijs zijn er wel voorbeelden van te geven. Deze voorbeelden gaan vooral over de zienswijzen van kinderen op wat er in de klas gebeurt. Verschillende onderzoeken laten zien dat leerlingen andere ideeën kunnen hebben over wat zich in de klas afspeelt

dan leraren. Soms zijn deze verschillen nogal schrijnend. Leraren kunnen bijvoorbeeld vinden dat ze veel aan groepswork doen en dat ze de leerlingen actief bij de lessen betrekken, terwijl de leerlingen zelf het tegendeel ervaren (Hagborg, 1994). Ook kunnen leraren en leerlingen verschillend oordelen over wat een belangrijk moment in de les is geweest (Shimizu, 2002). Verder is uit onderzoek gebleken, dat kinderen zelfs op jonge leeftijd in staat zijn de onderwijsaanpak te doorgronden. Kleuters hebben bijvoorbeeld erg goed door dat er 'gewerkt' moet worden, ook al suggereert de leraar dat ze een 'spelletje' gaan doen (Wing, 1995). Onderzoekers als Wing benadrukken dan ook dat leraren hierover een open gesprek met hun leerlingen zouden moeten hebben en dat ze hun leerlingen meer moeten betrekken bij didactische beslissingen. Dahlberg, Moss & Pence (1999, pag.49) zeggen het als volgt:

Children have a voice of their own, and should be listened to as a means of taking them seriously, involving them in democratic dialogue and decision-making and understanding childhood.

Spratt (1999) onderstreept bovendien dat leerlingen een belangrijke rol kunnen spelen bij het ontwerpen van lesmateriaal. Denk hierbij ook aan het werk van Van den Brink (1987), die kinderen rekenboeken liet maken, en aan het in het onderwijs gebruiken van door kinderen bedachte opgaven (zie bijvoorbeeld Van den Heuvel-Panhuizen, Middleton & Streefland, 1995).

Ofschoon deze laatste voorbeelden laten zien dat we in Nederland de kinderen hebben aangesproken op hun didactische kwaliteiten, zijn we - bij mijn weten - toch nooit zover gegaan dat we kinderen om advies hebben gevraagd. Eigenlijk is dit wel een ommissie, zeker als je uitgaat van een onderwijstheorie die bij het onderwijsleerproces een grote inbreng toekent aan kinderen en die een actieve leerlingparticipatie hoog in het vaandel heeft staan. Met de nu uitgevoerde leerlingconsultatie wil ik een begin maken om iets aan dit tekort te doen.

## **3 Opzet van het leerlingconsultatieonderzoek**

### **De geraadpleegde kinderen**

Zoals gezegd, beperk ik me in dit artikel tot de ideeën die kinderen hebben over het gebruik van de lege getallenlijn. Deze gegevens zijn ontleend aan een consultatieonderzoek waarbij aan twee kinderen advies is gevraagd over een aantal zaken die spelen bij reken-wiskundeonderwijs.

De kinderen zijn de tweelingzusjes Ylja en Joni. Ze zijn elf jaar oud, zitten op dezelfde school, allebei in groep 7, maar niet bij elkaar in de klas. Ze krijgen les met de

methode 'Pluspunt'. Hun trotse vader is een collega van mij op het Freudenthal Instituut. Ofschoon Ylja en Joni een identieke tweeling zijn, is gemakkelijk te zien wie Ylja is en wie Joni is. Ylja (links) draagt het liefste blauwe kleren en Joni (rechts) heeft een voorkeur voor rood (fig.1).



figuur 1: Ylja en Joni wijzen in 'Pluspunt' aan welke opgaven ze leuk vinden en welke niet

De reden dat Ylja and Joni zijn gevraagd om mee te doen aan dit onderzoek is, dat bij een eerder onderzoek hun belangstelling voor onderwijs naar voren was gekomen. Dat eerdere onderzoek omvatte de *try-out* van een aantal opgaven waarmee onderzocht zou worden hoe goed goede rekenaars zijn in het oplossen van puzzelachtige rekenproblemen. Ylja en Joni vonden het niet alleen leuk om deze opgaven te maken en hun oplossingsstrategieën uit te leggen, ze gaven meteen ook allerlei suggesties voor hoe het onderwijs aan knappe leerlingen het beste kan worden aangepakt.

Natuurlijk zijn Ylja en Joni geen doorsnee leerlingen, maar dat betekent nog niet dat ze ongeschikt zijn voor onderzoek. Natuurlijk bestaan er legio onderwijsonderzoeken waarbij de data gezuiverd moeten worden van dit soort leerlingen, omdat men algemene patronen en mechanismen wil identificeren. Het doel van dit leerlingconsultatieonderzoek is echter niet het trekken van geldige, algemene conclusies over wat kinderen denken over reken-wiskundeonderwijs, maar het leren en onderwijzen van rekenen-wiskunde beter te doorgronden door te luisteren naar wat kinderen over de onderwijspraktijk te zeggen hebben.

In totaal zijn Ylja en Joni voor dit leerling-consultatieonderzoek twee keer geïnterviewd.

In maart 2005 heeft een oriënterend interview plaatsgevonden. In mei 2005 is dit gevolgd door een uitgebreider interview waarbij aan de tweeling een aantal prangende kwesties op het gebied van reken-wiskundeonderwijs of onderwijs in het algemeen is voorgelegd. Hieronder bevonden zich een aantal recente onderzoeksresultaten en/of nieuwsberichten over onderwijs.

### Het eerste interview

Het eerste interview duurde anderhalf uur en was bedoeld ter oriëntering. Ylja en Joni konden vrij praten over hun ervaringen met reken-wiskundeonderwijs. Als introductie heb ik ze verteld dat ik een onderzoeker van onderwijs ben. Ik heb ze uitgelegd dat ik graag te weten wil komen wat de beste manier is om kinderen rekenen-wiskunde te leren en dat ik er achter wil komen hoe we het reken-wiskundeonderwijs kunnen verbeteren. Onderwijs onderzoeken houdt meestal in dat gegevens worden verzameld over leraren en leerlingen, maar bij het onderzoek waarvoor ik Ylja en Joni heb gevraagd is de aanpak wat anders. Ik ga Ylja en Joni niet vragen om een test te maken, ik ga ze ook niet in de klas observeren, maar ik ga ze interviewen als deskundigen op het gebied van onderwijs.

De manier waarop Ylja en Joni op deze introductie reageerden was al zeer opmerkelijk, maar helemaal in overeenstemming met de wijze waarop ik ze aansprak. Ze werden er niet door in verlegenheid gebracht. Er werd niet gegiecheld. Ik behandelde ze als deskundigen en zij voelden zich deskundig. Sterker nog, ze zijn het.

Het eerst interview is niet op video vastgelegd. Ik heb alleen enkele foto's genomen en aantekeningen gemaakt. Deze aantekeningen vormen echter geen woordelijk verslag. Een onderwerp dat tijdens dit eerste interview nogal centraal stond, was of Ylja en Joni rekenen-wiskunde een leuk vak vinden en waarom ze dit vinden. Het volgende geeft een indruk van wat hierbij naar voren kwam. De reacties van Ylja en Joni zijn op basis van de aantekeningen gereconstrueerd.

### Rekenen-wiskunde: een leuk vak of niet

Ofschoon Ylja en Joni tamelijk goed zijn in rekenen-wiskunde, houden ze allebei niet erg van het vak.

Ylja: Wat niet leuk is in de rekenles is, dat je steeds dezelfde sommen moet doen. Bijvoorbeeld  $84 \times 62$ . Wat ook niet leuk is, is dat wanneer kinderen bepaalde sommen niet begrijpen dat de leraar dan de sommen aan de hele klas gaat uitleggen. Dan hoor je vaak de kinderen zuchten. Er zijn altijd kinderen die iets niet begrijpen. Dat is niet erg. Iedereen vindt wel bepaalde dingen moeilijk.

Joni: Er zou eigenlijk een bepaalde regeling moeten zijn. Wie het snapt mag zelfstandig gaan werken. Wie het niet snapt, krijgt uitleg. Nu krijgt vaak de hele klas uitleg.

Een andere reden waarom Ylja en Joni rekenen-wiskunde niet leuk vinden is dat het voor hen niet uitdagend genoeg is. Ze hebben vooral een hekel aan het feit dat ze veel dingen moeten opschrijven.

Ylja: Ik ben blij dat er afkortingen bestaan!

Ook vinden ze het vervelend dat ze zoveel sommen moeten uitrekenen. De sommen moeten niet te lang duren. Denken over sommen vinden ze wel leuk. Als een reactie hierop komt Joni met het volgende.

Joni: De leraar zegt vaak alleen hoe je het moet doen, maar niet waarom iets zo is.

Ylja: Je kunt niet alles bewijzen. Bijvoorbeeld  $1 + 1 = 2$ . Ik heb in de 'Rekenduivel' hierover gelezen.

Joni: Je kunt het wel laten zien.

Ylja: De kinderen vragen vaak aan elkaar waarom een bepaalde manier niet mag of ook goed is.

Als ik vraag waarom ze dit aan elkaar vragen en niet aan de leraar, moeten ze het antwoord schuldig blijven.

Ylja: Dit is een heel moeilijke vraag.

Aan het eind van het interview maken we een afspraak voor een volgend interview. Omdat Ylja en Joni me graag hun mening over 'Pluspunt' willen vertellen, spreken we af dat dit een van de onderwerpen zal zijn van het volgende interview.

### Het tweede interview

Het tweede interview is gehouden in mei 2005. Het was een gestructureerd interview waarbij de kinderen is gevraagd wat ze denken van een aantal zaken die momenteel in het reken-wiskundeonderwijs spelen of in het onderwijs in het algemeen spelen. De onderwerpen waren ontleend aan recente onderzoeksresultaten en nieuwsberichten over onderwijs.

- 1 Wat is de beste manier om zwakke rekenaars te leren rekenen?
- 2 Kun je iets leren terwijl je slaapt?
- 3 Kauwgom kauwen bij een rekentoets, helpt dat?
- 4 Een vakantieschool. Wat vinden jullie daarvan?
- 5 Hoe moet een leraar werken met 'Pluspunt'?
- 6 Zelf een school beginnen. Hoe zou die er dan uit zien?
- 7 Is reken-wiskunde een leuk vak?  
En waarom is dit zo of niet zo?
- 8 Hoe denk je over oefenen?
- 9 Helpt de lege getallenlijn bij het rekenen?
- 10 Hoe denk je over reken-wiskundelessen?  
Wat zou je anders doen?

figuur 2: de onderwerpen die in het tweede interview aan bod zijn gekomen

In totaal omvatte de leerlingconsultatie tien onderwerpen. De tien onderwerpen zijn aan de kinderen voorgelegd aan de hand van een Powerpoint-presentatie. Aan elke vraag ging een korte toelichting vooraf waarbij de kinderen een foto of tekening met wat uitleg te zien kregen. Het volle-

dige interview duurde ongeveer twee uur en is op video opgenomen. Van deze videoregistratie is een woordelijk verslag gemaakt.

## 4 Ylja's en Joni's opvattingen over de lege getallenlijn

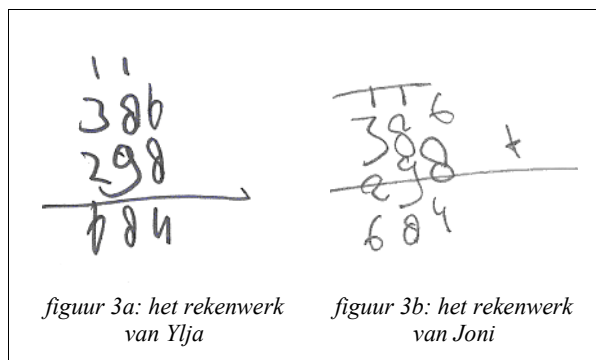
Van de tien onderwerpen die bij dit tweede interview aan bod zijn gekomen, wordt in dit artikel alleen ingegaan op de kwestie van de lege getallenlijn.

### De lege getallenlijn als didactische model - een korte beschouwing vooraf

De lege getallenlijn is een van de belangrijkste didactische vindingen van realistisch reken-wiskundeonderwijs voor het rekenen tot 100 en 1000. Dit model heeft in Nederland in korte tijd in brede kring ingang gevonden. Zowel leraren als ontwikkelaars, onderzoekers en lerarenopleiders onderschrijven het belang ervan. Ook is de getallenlijn in alle nieuwe versies van de reken-wiskundemethoden terug te vinden. Wel moet hierbij opgemerkt worden dat de manier waarop de getallenlijn in de methoden wordt gebruikt niet altijd overeenkomt met de manier zoals deze bedoeld is: een flexibel denkmodel dat het optellen en aftrekken ondersteunt in plaats van een meetlijn waarop de precieze uitkomsten van bewerkingen zijn af te lezen.

### Vraag 9 van het interview

Als introductie krijgen Ylja en Joni de volgende opgave te zien:  $386 + 298 =$ . De opgave wordt in de horizontale schrijfwijze gepresenteerd. De kinderen krijgen de opdracht de som uit te rekenen. Ze krijgen geen aanwijzingen over de manier waarop ze de som moeten maken of opschrijven. Zonder aarzeling gaan ze echter allebei cijferen (fig.3a en 3b).



Als ik daarna vraag of het ook nog op een andere manier kan, komen ze met een oplossing waarbij kolomsgewijs wordt gerekend. Dit houdt in dat ze de getallen als hele getallen verwerken in plaats van als cijfers (fig.4). Ylja en

Joni beschouwen dit als een oplossing die gemakkelijker is dan cijferen.

$$\begin{array}{r}
 386 \\
 + 298 \\
 \hline
 14 \\
 170 \\
 \hline
 500 \\
 184 \\
 \hline
 684
 \end{array}$$

figuur 4: kolomsgewijze oplossing

Als ze vervolgens de vraag krijgen voorgelegd of deze som ook met de lege getallenlijn op te lossen is, barst de frustratie los. Hier volgt het woordelijke verslag. Tussen rechte haken staan mijn toevoegingen. Met ‘(...)’ is aangegeven dat een stuk tekst is weggelaten of dat er tekst ontbreekt doordat deze onverstaanbaar was.

- (interviewer:) Zou het helpen om hierbij de lege getallenlijn te gebruiken?
- Joni: Het zal helpen, als je al die andere manieren die [in tijd gezien] ervoor zijn niet zou begrijpen.
- Ylja: Van alle jaren eigenlijk, qua rekenen vind ik het stomste jaar eigenlijk groep 4, want dan blijf je altijd maar die getallenlijn ...
- Joni: Alles moet je met de getallenlijn doen zo’n beetje.
- Ylja: Je mag geen andere manier gebruiken. Het moet per se met de getallenlijn.
- Joni: Terwijl de getallenlijn volgens mij juist bedoeld is voor de kinderen die het niet zo goed kunnen.
- Ylja: Kijk, voor die is het heel makkelijk, zo’n getallenlijn, om stap voor stap iets uit te rekenen.
- Joni: (...) Maar (...) voor sommige kinderen gaat de getallenlijn sneller als het onder elkaar uitrekenen, simpelweg omdat ze het onder elkaar uitrekenen gewoon niet snappen. (...)
- I: Maar kijk eens naar die twee getallen.

De poging om ze op het idee te brengen een handige strategie toe te passen werkt niet. Joni en Ylja gaan uitleggen hoe het leertraject er globaal uitziet.

- Joni: (...) wij leren zeg maar eerst de getallenlijn. In groep 5 leren we tussen streepjes. [Bedoeld wordt het werken met positielijnen waarbij de eenheden, de tientallen en de honderdtallen van elkaar gescheiden worden.] In groep 6 leren we op deze manier onder elkaar. [Bedoeld wordt het kolomsgewijs rekenen.] In groep 7 leren we op deze manier onder elkaar. (Bedoeld wordt het cijferen.) Dat zou voor mij best sneller kunnen (...).
- Ylja: In groep 5 moet je dus per se of tussen streepjes - ik weet niet meer hoe het gaat; ik kan het dus niet laten zien - of met zo’n getallenlijn doen (...).

Vervolgens wordt nog een poging gewaagd om ze op het spoor van een handige strategie te zetten.

- I: (...) Kijk eens naar die twee getallen. Wat is er bijzonder aan die twee getallen? (...) Als je nou een

schatting zou moeten maken van de uitkomst van deze optelling ...

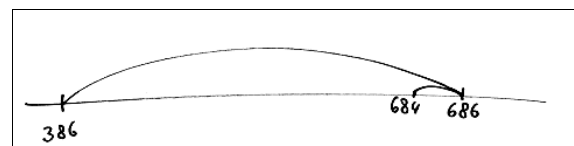
- Joni: Dan zou ik driehonderd plus driehonderd ...
- I: Maar je mag ook die 386 ook heel laten en dan zeggen van nou ...
- Joni: Dat doe ik ook, dat doe ik ook, maar dan wordt het opeens veel makkelijker, dan wordt het gewoon 686 min 2.
- Joni: (...) in groep 6, als kinderen willen gaan goochelen met nullen, bijvoorbeeld met optelsommen, nee met keersommen, of met gedeeld-door sommen, [dan zegt de juffrouw] ‘nu leer je hoe het moet’ (...) en in groep 7 leer je trucjes om het kloppend te krijgen.

- (...)
- Joni: En dit is bijvoorbeeld zo’n trucje.
- (...)
- I: Is dat een trucje?
- Ylja: Ja, nou, je kunt het makkelijker uitrekenen met een trucje eigenlijk.
- Joni: Makkelijker uitrekenen. Alleen wij leren - dit trucje dat hebben sommige kinderen al wel bedacht, dat gebruiken ze ook al wel in hun hoofd - maar wij leren eerst andere dingen.
- Ylja: Wij leren dit niet echt op school.
- I: Jullie leren dit niet.
- Ylja: De kinderen, veel kinderen gebruiken het wel, maar het wordt niet uitgelegd. Dus de kinderen die, waarbij het niet in hun opkomt, kunnen deze snelle, makkelijke manier niet gebruiken (...).
- I: Dus als ik jullie vraag ‘reken het sommetje uit’ dan gaan jullie bijna automatisch het onder elkaar zetten en uitrekenen?
- (...)
- Ylja: Ja, maar ik had nou niet goed naar de som gekeken. Maar meestal kijk ik wel even: ‘Oh wacht, zo gaat het sneller.’
- Joni: Vaak staat er een ... Soms staat er ‘reken uit’ en soms staat er ‘reken handig uit’.
- (...)
- Ylja: En dan zet je toch een knopje om, als er staat ‘reken handig uit’ dan ga je meteen kijken hoe kan ik het het makkelijkste doen.

Maar Joni is nog niet overtuigd van de handigheid om de getallenlijn te gebruiken.

- Joni: Hij kan best helpen, hij kan zelfs heel goed helpen, maar voor de kinderen die andere dingen ook goed kunnen, is een getallenlijn alleen maar tijd rekken, onhandigheid.

Dan laat de interviewer de volgende oplossing met de getallenlijn zien (fig.5).



figuur 5: oplossing op de lege getallenlijn

- I: (...) je maakt een grote stap van driehonderd, en twee terug.

- Ylja: Ja, maar zo hebben wij de getallenlijn niet geleerd. Wij hebben echt geleerd van dan doe je eerst tweehonderd erbij, dan negentig erbij en dan acht.
- Joni: Wij hebben niet ...
- Ylja: Deze manier ...
- Joni: Die hebben wij echt niet veel doen, gebruikt. Heel af en toe misschien.
- Ylja: Tegen de tijd dat wij dit, deze manier, zeg maar, door- kregen, deden wij deze stappen al uit ons hoofd.

Er wordt nog eens teruggekomen op de frustraties die Ylja en Joni met de getallenlijn hebben opgelopen.

- I: Maar jullie hebben er niet zo'n beste herinnering aan?  
Beide kinderen: Nee.
- I: Kun je mij uitleggen, eh, waardoor dat komt?
- Ylja: Omdat je het altijd moest doen, altijd maar (...). Dan zag je een som voor je, en dan werd er gezegd: 'Je moet het met de getallenlijn doen.'
- Joni: En er zat zo weinig afwisseling in. Het wordt gewoon bijna, altijd als we een plussom of een minsom, gewoon rijtjes hadden, moesten we het altijd.
- (...)
- I: Dus dat zouden jullie liever anders gehad hebben?
- Ylja: Ja.
- (...)
- Ylja: (...) Want die getallenlijn is op zich heel handig. Die getallenlijn is voor sommige kinderen heel duidelijk, (...) maar zo gauw jij een andere manier kent om die getallen, om zulke sommen uit te rekenen, is die getallenlijn niet meer nodig. Want er zijn zoveel andere manieren om dat te doen ...
- Joni: En die sneller gaan.
- I: ... snel is ook, als je de getallenlijn niet meer hoeft te tekenen, maar dat als je hem als het ware in je hoofd hebt.
- Beide kinderen: Jaaa ...
- Joni: Maar dan gebruik je hem nog steeds.
- (...)
- Ylja: Dus, zeg maar, eerst de getallenlijn leren. Dan het uit je hoofd leren, en dan, zeg maar, kunnen gaan uitleggen van wat je nu uit je hoofd hebt gedaan. Is eigenlijk hetzelfde als de getallenlijn. En zo gauw kinderen dat snappen, dan wordt er ergens een knop omgezet: 'hé, ik ken de getallenlijn uit mijn hoofd', en zo gauw ze weten van: 'hé ik ken de getallenlijn uit mijn hoofd' gebruiken ze die getallenlijn in het hoofd.

### Een terugblik op vraag 9 van het interview

Het eerste wat opvalt bij de vraag over de lege getallenlijn is hoe professioneel Ylja en Joni over reken-wiskundededidactiek kunnen praten. Soms denk je gewoon met volleerde leraren van doen te hebben. Alsof het niets is, kunnen de twee kinderen zomaar even het leertraject schetsen voor het rekenen met hele getallen. Leraren in functie gaat dit niet altijd zo gemakkelijk af. Bij de laatste PPON medio-peiling gaf zo'n 20 procent van de onder- vraagde leraren van groep 4 en 5 aan niet te weten wan- neer het kolomsgewijs rekenen of het cijferen wordt aan- geleerd (zie Kraemer et al., 2005).

Het antwoord op interviewvraag 9 is ook erg onthullend over het handig rekenen: dit valt kennelijk onder de cate- gorie 'trucjes', het lijkt op school niet te worden geleerd en er wordt alleen handig gerekend als het vermeld staat bij de opgave. Om handig te gaan rekenen is het nodig dat de kinderen even op het spoor van handig rekenen worden gezet. Bij dit laatste dient men zich dan ook nog te realiseren dat het hier om twee knappe rekenaars gaat, die best zoveel getalkennis en inzicht in operaties hebben dat ze handig kunnen rekenen, maar die deze vaardigheid in het onderwijs kennelijk niet ontwikkeld hebben. Het doet me denken aan de resultaten van het al eerder genoemde onderzoek naar het oplossen van puzzelachtige problemen door leerlingen van groep 6 die op een leerlingvolgsysteem hoge scores halen bij het onderdeel rekenen. Ook bij dit onderzoek kwam naar voren dat onze goede rekenaars niet op alle punten zo goed zijn als we denken dat ze zijn (Van den Heuvel-Panhuizen & Bodin- Baarends, 2004). We weten natuurlijk niet welke rol het onderwijs speelt bij het niet spontaan toepassen van han- dige rekenstrategieën, maar Ylja's en Joni's visie op de getallenlijn geeft daarover wel enige aanwijzingen.

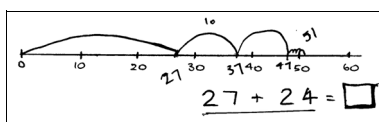
Uit de reactie van Ylja en Joni wordt duidelijk hoe knel- lend de lege getallenlijn voor hen was. Dit is nogal opmerkelijk omdat de lege getallenlijn toch bedoeld is als een flexibel model dat leerlingen juist veel vrijheid geeft - en dit geldt zowel voor de manier van noteren als voor de sprongen die ze maken om opgaven op te lossen. Ylja en Joni hebben deze vrijheid echter niet ondervonden. In groep 4 moesten ze per se de getallenlijn gebruiken. Daar hadden ze een hartgrondige hekel aan. Het rekenen op de getallenlijn betekende dat er stap-voor-stap gerekend moest worden, verkortingen waren niet toegestaan. Frap- pant is ook dat Ylja en Joni helemaal niet beseften dat die verkortingen op de getallenlijn mogelijk waren. Ze weken uit naar het cijferend rekenen onder elkaar, want dat ging sneller. Dat het vinden van de oplossing nog sneller gaat door een grote sprong voorwaarts te maken en een klein stapje terug, kwam in eerste instantie niet bij hen op. Ook hier kan weer de vraag naar de invloed van het onderwijs worden gesteld.

Sinds de getallenlijn aan het eind van de jaren tachtig in het Nederlandse reken-wiskundeonderwijs zijn intrede heeft gedaan, werd dit model zowel voorschrijvend als niet-voorschrijvend onderwezen (Menne, 2001). Treffers is - in navolging van Whitney (1985) - een voorstander van het laatste, hetgeen ook de aanpak is die door de meeste reken-wiskundededidactici wordt onderschreven. Van 'Pluspunt' is bekend dat de eerste versie van deze methode de voorkeur gaf aan de decimale splitsmethode in plaats van aan de aan de getallenlijn gelieerde rijgme- thode (Menne, 2001). Dit is ook precies herkenbaar in de cijferende manier waarop Ylja en Joni de opgave  $386 + 298$  oplosten. Daar staat echter weer tegenover dat in de nieuwe versie van 'Pluspunt' de didactische positie van

de lege getallenlijn is versterkt (ibid.). Voor Ylja en Joni heeft dit niet erg geholpen.

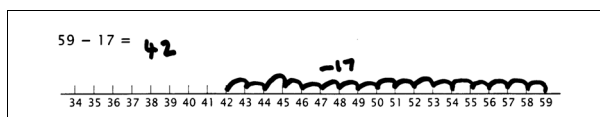
## 5 Een Australische ervaring

Dat niet alleen Nederland zijn didactikids heeft, maar ook Australië, leerde ik toen ik onlangs in Melbourne was voor de MERGA- en PME-conferentie. Janette Bobis vertelde me over het artikel dat ze had geschreven... samen met haar dochter Emily (Bobis & Bobis, 2005). Bovendien ging dit artikel ook nog over de lege getallenlijn. Evenals Ylja en Joni vertelde Emily over haar negatieve ervaringen met het werken op de lege getallenlijn. In Year 3, vergelijkbaar met onze groep 4, moest Emily werken op voorgestructureerde getallenlijnen waarop de nul en de tientallen waren aangegeven. Deze aanpak leidde ertoe dat Emily dacht dat haar leraar wilde dat ze bij de nul moest beginnen, het eerste getal dat op de lijn gemarkeerd was (fig. 6).



figuur 6: bij de nul beginnen

In Year 4 kwamen nog meer verwarrende situaties voor. Voorgestructureerde getallenlijnen in de methode met intervallen van 1 zorgden ervoor dat Emily terugviel op een telstrategie (fig. 7).



figuur 7: een voorgestructureerde getallenlijn die een telstrategie uitlokt

De conclusie van Bobis en Bobis (2005) was dat een rigide en fout begrepen didactisch model schadelijk kan zijn voor de ontwikkeling van de rekenvaardigheid van kinderen.

## 6 Tot besluit

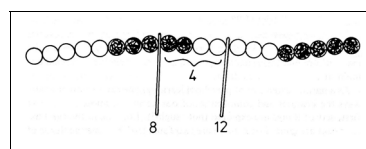
### Nogmaals de lege getallenlijn

De inzet van didactische modellen in het onderwijs luistert nauw. Een fout gebruik ervan kan een averechts gevolg hebben en in de ware zin van het woord 'anti-didactisch' zijn. Ook Freudenthal (1973) gebruikte met recht dit woord toen hij zo'n dertig jaar geleden de omkering aan de kaak stelde van een wiskundeonderwijs dat zich liet leiden door de wetenschappelijk structuur van de discipline en kinderen confronteerde met kant-en-klare

wiskunde in plaats van hun de mogelijkheid te geven om zelf wiskundige begrippen en middelen te ontwikkelen. Maar anti-didactische inversies bedreigen niet alleen het reken-wiskundeonderwijs op macroniveau, ze doen dit ook op micro-niveau. Van dit laatste is bijvoorbeeld sprake als een reken-wiskundemethode eerst het decimaal splitsen 'aanleert' als basis voor het optellen en aftrekken, en vervolgens de kinderen laat werken op de getallenlijn. Een dergelijke volgorde druist in tegen de didactische structuur voor het rekenen tot honderd waarin de lege getallenlijn als didactisch model is ingebed.

Kenmerkend voor deze didactische structuur is dat er een onderscheid wordt gemaakt in drie basisstrategieën: de rijg-, splits- en variamethode (zoals beschreven in de TAL-leerlijnen; zie Treffers et al., 1999; Van den Heuvel-Panhuizen et al., 2001). Behalve dat deze strategieën samenhangen met de getallen waarmee gerekend moet worden, hebben ze ook een zekere sequencerings in zich. Het rijgen ontstaat vanuit het tellen en gaat vooraf aan het splitsen en het toepassen van een handige compensatiestrategie. Wie de lege getallenlijn als didactisch model gebruikt los van de bijbehorende didactische structuur kan gemakkelijk didactisch in de fout gaan.

Didactische fouten en verwarring voor de kinderen liggen ook op de loer als leraren geen duidelijk onderscheid maken tussen een meetlijn (met continue grootheden) en een telllijn (met discrete grootheden). Het bijzondere van de door Treffers overgenomen ontdekking van Whitney (1985) die beide met elkaar verbond (fig. 8), lijkt aan hen te zijn voorbijgegaan.



figuur 8: Whitney's kralenketting met de tandenstokers (Whitney, 1985, pag.134)

Ten slotte kan door het los van de didactische structuur gebruiken van de lege getallenlijn nog gemakkelijk een 'vermethodieking' optreden: het rekenen met behulp van de lege getallenlijn is dan aan allerlei strikte voorschriften gebonden variërend van hoe de lijn getekend moet worden tot hoe de getallen, pijlen en boogjes moeten worden geplaatst. Het aanleren van deze 'didactische ballast' (Van den Heuvel-Panhuizen, 1986) is behalve erg tijdroverend vooral anti-didactisch, omdat het kinderen elke mogelijkheid ontnemt om te mathematiseren en ze hindert om zelf verkortingen toe te passen.

### Nogmaals de didactische expertise van kinderen

Ofschoon andere onderzoekers al eerder tot de conclusie zijn gekomen dat bij ontwikkeling en onderzoek van



onderwijs de expertise van kinderen serieus moet worden genomen, was dit leerlingconsultatieonderzoek in menig opzicht verrassend. Het interview met Ylja en Joni maakte duidelijk, dat we bij onderwijsonderzoek vaker en explicieter van de didactische kwaliteiten van kinderen gebruik moeten maken. Vooral kinderen die het onderwijs niet simpelweg ondergaan, maar oog hebben voor hoe een leraar iets uitlegt, de leerstof opbouwt, de klas organiseert, omgaat met verschillen, hulp biedt aan zwakke leerlingen en gebruik maakt van de methode, kunnen voor onderzoekers en ontwikkelaars van grote waarde zijn. Het extra perspectief dat kinderen bieden, kan ons inzicht vergroten in wat er in de klas gebeurt en ons helpen om het onderwijs te verbeteren. Wat Freudenthal (1984a, pag.106) ons voorhield ten aanzien van het observeren van de ontwikkeling van kinderen, geldt volgens mij evenzeer voor het consulteren van kinderen. Van de kennis die we hierbij opdoen kunnen we eveneens 'profiteren' bij de ontwikkeling van onderwijs. Bovendien - en ook hierin trek ik de parallel met het observeren.

Het is niet iets dat we voor de ontwikkelaar en onderzoeker willen reserveren. We propageren dit [consulteren van kinderen, *toevoeging MvdHP*] bij anderen, bij onderwijsgeevenden, bij opleiders en bij hen die opgeleid worden en we bieden hun materiaal aan, dat deze mentaliteit moet bevorderen.

Ik hoop dat ik dit met dit artikel heb gedaan.

## Literatuur

- Brink, J. van den (1980). Onderwijzende kinderen. In: IOWO. *Kijk op Hans*. Utrecht, 6-8.
- Brink, J. van den (1987). Children as arithmetic book authors. *For the Learning of mathematics*, 7, 44-48.
- Bobis, J. & E. Bobis (2005). The empty numberline: Making children's thinking visible. In: M. Coupland, J. Anderson & T. Spencer (eds.). *Making mathematics vital: Proceedings of the 20th biennial conference of the Australian Association of Mathematics Teachers*. Sydney: AAMT, 66-72.
- Dahlberg, G., P. Moss & A. Pence (1999). *Beyond quality in early childhood education and care: postmodern perspectives*. London: Falmer.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Freudenthal, H. (1979). *Learning processes*. Lecture at Presentation of the NCTM meeting in Boston, 18 April (niet gepubliceerd).
- Freudenthal, H. (1984a). *Appels en peren / wiskunde en psycho-*

- logie*. Apeldoorn: Van Walraven.
- Freudenthal, H.F. (1984b). Onderzoek van onderwijs - voorbeelden en voorwaarden. In: P.G. Vos, K. Koster & J. Kingma (red.). *Rekenen. Balans van standpunten in theorievorming en empirisch onderzoek*. Lisse: Swets & Zeitlinger.
- Freudenthal, H. (1988). Ontwikkelingsonderzoek. In: K. Gravemeijer & K. Koster (red.). *Onderzoek, ontwikkeling en ontwikkelingsonderzoek*. Utrecht: Vakgroep Onderzoek Wiskundeonderwijs & Onderwijs Computercentrum, Rijksuniversiteit Utrecht.
- Hagborg, W.J. (1994). Student and teacher perceptions of classroom instructional methods and evaluation procedures. *Evaluation and Program Planning*, 17(3), 257-260.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den (1986). Het rekenonderwijs op de lom-school opnieuw ter discussie. *Tijdschrift voor orthopedagogiek*, 25(3), 137-145.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den, J.A. Middleton & L. Streefland (1995). Student-generated problems: easy and difficult problems on percentage. *For the learning of mathematics*, 15(3), 21-27.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den, K. Buys & A. Treffers (red.) (2001). *Kinderen leren rekenen. Tussendoelen annex leerlijnen. Hele getallen bovenbouw basisschool*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den & C. Bodin-Baarends (2004). Alles of niets. Probleem oplossen door goede rekenaars. *Volgens Bartjens...*, 24(2), 12-14.
- Menne, J.J.M. (2001). *Met sprongen vooruit. Een productief oefenprogramma voor zwakke rekenaars in het getallengebied tot 100 - een onderwijsexperiment*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
- Kraemer, J.-M., J. Janssen, F. van der Schoot & B. Hemker (2005). *Balans [31] van het reken-wiskundeonderwijs halverwege de basisschool 4*. Arnhem: Cito.
- Shimizu, Y. (2002). *Discrepancies in perceptions of lesson structure between the teacher and the students in the mathematics classroom*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, April 1-5.
- Spratt, M. (1999). How good are we at knowing what learners like? *System*, 27, 141-155.
- Treffers, A., M. van den Heuvel-Panhuizen & K. Buys (red.) (1999). *Jonge kinderen leren rekenen. Tussendoelen annex leerlijnen. Hele getallen onderbouw basisschool*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
- Whitney, H. (1985). Taking responsibility in school mathematics education. In: L. Streefland (ed.). *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. II. Utrecht: OW&OC, Utrecht University, 123-141.
- Wing, L.A. (1995). Play is Not the Work of the Child: Young Children's Perceptions of Work and Play. *Early Childhood Research Quarterly*, 10, 223-247.

*In the Netherlands, children's contributions to the development of mathematics education are highly valued. Through his observations of his grandchildren Freudenthal has laid the foundation for this appreciation. His goal was to build up knowledge about children's cognitive development and generate indications for education through spontaneous observations of children. Creating didactical knowledge is also the aim of the study that is the topic of this article. However, the intended indications on how to teach mathematics are acquired in a different way now. Instead of observing children, they are questioned directly about their didactical expertise. The two children involved in this study are asked how they think about particular teaching issues and which approach they would choose when teaching children. Much can be learned from these student consultants. In the article, the children explain their ideas about the empty number line. They are not very satisfied with it as a didactical model. For them the number line was clearly a restraining factor. After further questioning it turned out that the way in which the number line was taught to these children might have caused their negative ideas about the usefulness of the number line. Later, these 'didactikids' revised their opinion. The children's proposal at the end of the interview should belong to the didactical baggage of each (future) teacher.*