

Begripsproblemen bij kubisch vergroten

Het adequaat omgaan met situaties waar sprake is van kubisch vergroten blijkt telkens een belangrijk struikelblok voor studenten aan de lerarenopleiding basisonderwijs. Dit komt in ieder geval naar voren uit analyses van resultaten van de landelijke kennisbasistoets. We gingen na wat het kubisch vergroten voor studenten moeilijk maakt. We vonden dat er moeilijkheden liggen in het interpreteren van de context, het gebruik van referentiematen, het gebruik van vaktaal en het misinterpreteren van de rekenregel voor het bepalen van de inhoud van een blok.

INLEIDING

In 2009 werd de Kennisbasis rekenen-wiskunde voor de lerarenopleiding basisonderwijs gepubliceerd (Van Zanten, Barth, Faarts, Van Gool, & Keijzer, 2009). Deze kennisbasis beschrijft de professionele gecijferdheid van de aanstaande leraar, waarbij het gaat om zowel vakdidactische kennis van de leraar als kennis van het vak zelf. Vanaf 2013 wordt de vakkennis, zoals beschreven in de kennisbasis landelijk getoetst (Vakcommissie rekenen-wiskunde, 2013). Het gaat hierbij om een landelijke toets die sinds 2015 bestaat uit 63 opgaven, die gaan over de domeinen hele getallen, rationale getallen, meten, meetkunde en verbanden. Ieder domein omvat opgaven over de pure wiskunde, over het toepassen van de wiskunde en over wiskundekennis die specifiek is voor leraren (Ball, Thames, & Phelps, 2008). Bij iedere vraag kijken analisten van de toets wat de gemiddelde score is en in welke mate de opgave discrimineert tussen sterke en zwakke rekenaars. Opgaven die discrimineren tussen sterke en zwakke rekenaars zijn goede opgaven, omdat die meer zicht bieden op de rekenvaardigheid van studenten dan opgaven die minder discrimineren. Opgaven met een zeer lage of zeer hoge gemiddelde score worden altijd preciezer bekeken, om na te gaan of de score verklaard kan worden uit kenmerken van de opgave. Hier gaat het bijvoorbeeld om opgaven waarvan achteraf geconcludeerd moet worden dat de formulering onduidelijk is geweest voor studenten, de gekozen getallen bepalend zijn voor de score of het bedoelde wiskundig redeneren voor een overgrote meerderheid van de studenten te hoog gegrepen is of juist erg eenvoudig is. Deze analyses zijn louter gebaseerd op gemiddelde toetsscores en eventueel op het discriminerend karakter van de opgaven. Nadere analyse, bijvoorbeeld van kladpapier van studenten, kan in bepaalde gevallen uitsluitsel geven over hoe studenten werkelijk met opgaven aan de slag gaan en om zo meer zicht te geven op waarom een opgave in het algemeen voor studenten moeilijk of juist makkelijk is (Keijzer & De Vries, 2014).

Een type opgave dat tijdens genoemde analyses telkens weer moeilijk blijkt te zijn voor studenten, zijn opgaven waarbij sprake is van kwadratisch of kubisch vergroten of verkleinen. Bij dergelijke opgaven is stevast de gemiddelde goedscore laag, maar vaak discrimineren deze opgaven wel goed tussen sterke en zwakke rekenaars. Bij zowel kwadratisch als het kubisch vergroten of verkleinen gaat het om het effect van werken op schaal. Neem bijvoorbeeld de schaal 1 : 10. Bij deze schaal zijn werkelijke lengtes tien keer zo groot als die in het schaalmodel. Bij deze schaal zijn de oppervlaktes 10 x 10 ofwel 100 keer zo groot als die in het schaalmodel. Bij deze schaal is de inhoud of het volume 10 x 10 x 10 ofwel 1000 keer zo groot als die in het schaalmodel. Het aldus vergroten van oppervlaktes duiden we aan als kwadratisch vergroten en bij het op deze manier vergroten van inhoud spreken we van kubisch vergroten.

Ronald Keijzer, Wim Brouwer en Jos van den Bergh, Hogeschool iPabo, de Nieuwste Pabo, en Avans Hogeschool¹

Keijzer, R., Brouwer, W., & Van den Bergh, J.W.M. (2018). Begripsproblemen bij kubisch vergroten. *Volgens Bartjens – ontwikkeling en onderzoek*, 38(1), 41-47

¹ De auteurs zijn of waren redactieleden van de landelijke kennisbasistoets rekenen-wiskunde.

Dit artikel beschrijft een klein onderzoek op drie lerarenopleidingen, waarin we door analyse van schriftelijk werk van studenten en gesprekken met studenten nagingen waarom het kubisch vergroten en verkleinen voor zwakke rekenaars zo moeilijk is.

WERKWIJZE

We wilden studenten een opgave voorleggen waar de problemen niet zitten in de keuze van de getallen, maar in het begrijpen van het kubisch vergroten. Een dergelijk probleem vonden we in het 'ijsjesprobleem'. In dit probleem staat een vergroot ijsje voor een ijswinkel centraal (afbeelding 1). We leggen de situatie aan 21 derdejaars studenten voor van twee verschillende lerarenopleidingen basisonderwijs die allemaal minstens één keer zijn gezakt voor de kennisbasistoets. Dit gebeurde tijdens bijeenkomsten die door de opleiding waren georganiseerd om studenten specifiek te ondersteunen bij het voorbereiden voor een herkansing voor de kennisbasistoets. In lijn met dit doel van de bijeenkomst, vragen we de studenten de opgaven individueel te maken. Als de studenten daarmee klaar zijn of wanneer blijkt dat ze niet verder komen met de opgave, wordt die klassikaal besproken. Omdat we geïnteresseerd zijn in het werk van de studenten dat ze zelfstandig maakten, vroegen we hen duidelijk aan te geven welke aantekeningen tijdens de bespreking zijn gemaakt.

We vragen de studenten naar de schaal waarop het grote ijsje gemaakt zou kunnen zijn. Daarnaast geven we aan dat een ijsje dat geschikt is voor consumptie en waar dit een vergroting van is, een volume heeft van 100 ml. We vragen de studenten uit te zoeken wat het volume is van het grote ijsje.



Afbeelding 1. Vergroot ijsje op straat.

We leggen de opgave rond het ijsje op een werkblad voor aan studenten. We vragen hen ook om op het werkblad aan te geven wat er moeilijk is aan deze opgave. We bespreken de reacties van studenten en formuleren voorlopige conclusies over wat dit kubisch vergroten moeilijk maakt. Deze voorlopige conclusies proberen we te bevestigen of te weerleggen in interviews met vier studenten uit deze groep van 21 studenten. Deze studenten werden geselecteerd op beschikbaarheid. In de interviews stellen

we de studenten enkele manieren van uitleggen bij dit probleem voor en vragen ze hierop te reageren. We scherpen hierop onze voorlopige conclusies aan en leggen die voor aan enkele deelnemers, voor het merendeel ervaren lerarenopleiders rekenen-wiskunde, tijdens de 36^e Panama-conferentie (januari 2018). Met deze reacties scherpen we onze conclusies een derde keer aan.

ANALYSE STUDENTENWERK

De aanpakken die de studenten laten zien met betrekking tot het eerste deel van de opdracht, namelijk het bedenken van een passende schaal, lopen uiteen van een beredeneerde en met getallen ondersteunde schatting van de hoogte van een eetbaar ijsje en die van het model voor de deur van de ijswinkel tot het noemen van een getal als 50 dat waarschijnlijk direct de verhouding tussen beide volumes zou moeten representeren. Ofschoon het niet de bedoeling was om het inzetten van meetreferenties de grootste hindernis te laten zijn bij het oplossen, blijkt dat voor minder sterke rekenaars soms toch een probleem te zijn. Het inschatten van de maten van de twee ijsjes leidt bij een van de zwakke rekenaars, naar eigen zeggen, onmiddellijk tot twijfel. Sommige studenten merken op dat voor hen de rekentaalbegrippen 'schaal' en 'verhouding' niet meteen de juiste beelden oproepen. De zinsnede 'de schaal waarop deze vergroting is gemaakt' blijkt voor hen vooral te verwijzen naar een volumevergrotingsfactor. Andere studenten aan wie we de opgave voorleggen durven niet echt gebruik te maken van afgeronde getallen. Zij geven aan het liefst zo dicht mogelijk bij hun eigen 'meting' blijven. Een poging om gebruikmakend van de context de vraag te beantwoorden 'hoe vaak het kleine ijsje in het grote model past', is vanzelfsprekend moeilijk in te schatten.

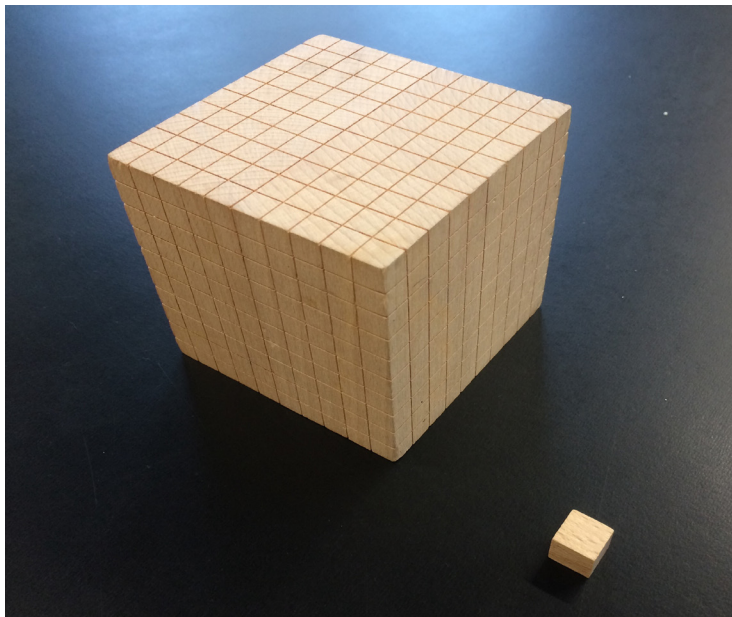
De tweede vraag laat ook een behoorlijke variëteit aan oplossingsaanpakken zien. Sommige studenten hebben eerder met dit bijltje gehakt en hebben de regel onthouden dat 'inhouden k^3 keer zo groot worden'. Toegepast op de 100 ml van een gewoon ijsje leidt die regel vervolgens tot '100 ml x 100 ml x 100 ml = 1000.000 ml³'. Bij het toepassen van de rekenregel wordt het nemen van de derde macht niet toegepast op de vergrotingsfactor maar op het gegeven volume. Studenten rekenen verder met de verhouding die ze vonden bij het beantwoorden van het eerste deel van de opdracht. Die geschatte verhouding varieert van 1 op 6 (15 cm op 90 cm) tot 1 op 10. Dit betekent dat het berekende volume een factor 5 kan verschillen (van ongeveer 20 liter tot 100 liter). De voorstelling die studenten hebben van een inhoud van 20 liter of van 100 liter in de gegeven context van een vergroot ijsje ondersteunt onvoldoende als er moet worden nagegaan of deze antwoorden correct kunnen zijn. Verder zit het de studenten dwars dat zij het berekenen van inhoud louter verbinden met het toepassen van de rekenregel lengte keer breedte keer hoogte. Dat leidt tot problemen, omdat in deze situatie geen sprake is van een blok met duidelijk zichtbare lengte, breedte en hoogte.

Samenvattend vonden we dat het schriftelijk gestelde probleem de studenten voor de volgende problemen stelt:

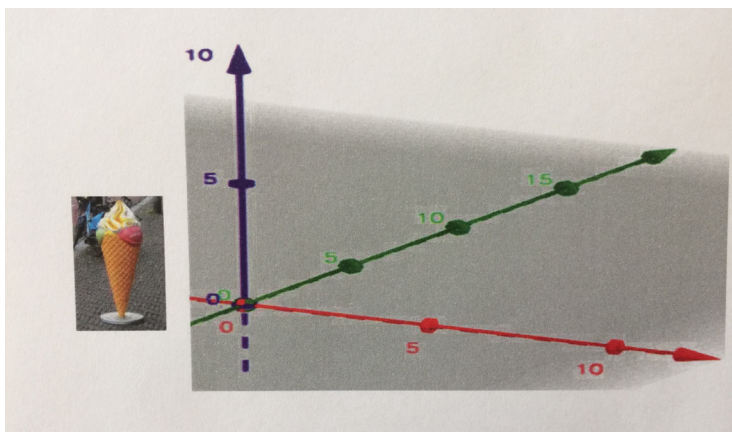
- ze hebben onvoldoende beschikking over meetreferenties,
- ze beheersen de vaktaal onvoldoende,
- ze gaan mis bij het gebruiken van een rekenregel die niet (direct) op het probleem van toepassing is,
- ze durven onvoldoende te rekenen met afgeronde getallen.

INTERVIEWS

We spraken met vier derdejaars studenten van twee verschillende lerarenopleidingen basisonderwijs, die eerder aan het probleem gewerkt hadden. In deze interviews stellen we de student een drietal verschillende manieren van uitleggen voor om het kernprobleem in de ijsjesopdracht te verhelderen, waarbij we overigens verder niet refereerden aan hoe zij het probleem in eerste ronde hadden opgelost. Bij de eerste manier van uitleggen maken we gebruik van een blokje van 1 cm bij 1 cm bij 1 cm en een blok van 10 cm bij 10 cm bij 10 cm. Het kleine blokje stelt het eetbare ijsje voor en het blok van 10 cm bij 10 cm bij 10 cm het grote ijsje voor de ijswinkel (afbeelding 2). Bij de tweede manier van uitleggen stellen we het vergroten voor als uitrekken. We vertellen de studenten daarbij dat je het kleine ijsje kunt voorstellen als een afbeelding op een beeldscherm dat we in drie richtingen uitrekken (afbeelding 3). De derde manier van uitleggen is toegespitst op de fout dat het volume van het kleine ijsje slechts één keer met de schaal-factor vermenigvuldigd wordt. Studenten vinden de schaal 10 staat tot 1 en concluderen dat de inhoud daarom met 10 vermenigvuldigd moet worden. Ze komen zo tot 1000 ml of 1 liter voor het grote ijsje. We concretiseren deze maat door middel van een maatbeker van 1000 milliliter en laten ervaren dat deze maatbeker toch een aanmerkelijk kleinere inhoud heeft dan het grote ijsje voor de deur van de ijswinkel (afbeelding 4).



Afbeelding 2. Ijsjes voorstellen als blok.



Afbeelding 3. Uittrekken in drie richtingen.



Afbeelding 4. Een maatbeker als referentie.

De vier studenten, Femke, Raifa, Gina en Janise, geven aan dat de geboden ondersteuning bij het oplossen van het probleem hen helpt. Ze geven echter niet unaniem de voorkeur aan één van de drie manieren van uitleg. Zo geven Femke, Gina en Janise aan baat te hebben bij de statische representatie met behulp van de blokken waarbij de drie richtingen waarin de vergroting dient te worden uitgevoerd als dit door de docent wordt toegelicht. Femke geeft aan dat met deze uitleg duidelijk is dat je niet één keer met de schaalfactor moet vermenigvuldigen maar drie keer namelijk in alle drie de richtingen: 'Je weet nu wat je moet doen'. Anderszins geeft Raifa aan, na dezelfde uitleg van de docent, het gebruik van de blokken niks nieuws vindt: 'Dat heb je al in je hoofd. Het kleine en grote ijsje is een schaalmodel en dat geldt ook voor de blokken. Maar dat zegt nog niks over: Hoe moet je het berekenen? Het helpt mij niet om tot het antwoord te komen.' De tweede manier van uitleg die de interviewer toelicht waarbij hij met lichaamstaal het uitrekken in de drie richtingen uitbeeldt, ondersteunt Raifa beter. Ze licht toe: 'Hier maak je iets. Je doet. Door zo, zo en zo uit te rekken ben je al bezig met vergroten. Waardoor het toepassen van de vermenigvuldiging in de drie richtingen veel logischer is. Met de blokken laat je iets zien wat er al is'. De derde manier van uitleg waarbij gebruik gemaakt wordt van een maatbeker van 1000 ml en ingezoomd wordt op de fout van slechts één keer vermenigvuldigen met de schaalfactor geeft direct een conflictsituatie omdat direct duidelijk is dat de inhoud van het grote ijsje voor de ijswinkel veel groter is dan de inhoud van de maatbeker. Gina geeft aan: 'Je weet gelijk dat je iets verkeerd gedaan hebt. Dus je moet opzoek naar een andere manier.' Janise voegt hier aan toe, dat de maatbeker je echter niet de weg wijst naar hoe je het wel kunt aanpakken.

Afhankelijk van de voorkeur van student en het handelen van de docent ondersteunen de drie manieren van uitleggen de student in het begrijpen van het kubisch vergroten. Opvallend is dat het verwoorden van het probleem en het verwoorden van het rekenwerk door de studenten, het gebruik van een passende rekentaal, om aandacht vraagt. Verder geven de studenten in de interviews aan dat de rekenregels en de referentiematen geen obstakel zijn, maar het kubisch vergroten lastig blijft.



Afbeelding 5. Miniatuurautootje.

Tot slot is Janise een vergelijkbaar schaalprobleem voorgelegd. We presenteren haar een miniatuur auto van een sportauto. Dit autootje is gemaakt op een schaal van 1 : 40 (afbeelding 5). We vertellen de student dat de inhoud van de benzinetank van de grote auto 80 liter is. We stellen de vervolgvraag: Hoeveel milliliter is de inhoud van de benzinetank van de miniatuurauto?

Janise herkent deze vraag als schaalprobleem en geeft aan dat de tank van de miniatuurauto kleiner is: 'Het is hetzelfde probleem als met het ijsje en de blokken.' Gevolgd door handbewegingen die de drie richtingen aangeven waarin de benzinetank van de grote auto kleiner wordt. Bij het verwoorden van het vermenigvuldigen met de schaalfactor heeft de student bedenktijd nodig en zegt na korte tijd: 'De tank van het miniatuur autootje wordt dan 40 keer zo klein. Dus delen door 40 en dan nogeens delen door 40 en nogeens delen door 40.' Janise blijkt opgelucht dat eenvoudig delen, maar dan wel drie keer achter elkaar, het correcte antwoord geeft. Ze merkt tot slot zelfverzekerd op: 'Dan moet je dat nog uitrekenen en ook de maateenheid controleren.'

Bij het schaalprobleem van het miniatuurautootje blijkt dat het bij het ijsjesprobleem verworven inzicht de student voorbereidt op het kubisch vergroten dat hier bedoeld is. Toch heeft de student even tijd nodig om het kubisch verkleinen adequaat te verwoorden.

De interviews leerden ons dat studenten geholpen zijn bij ondersteuning die het vergroten in drie richtingen voor hen betekenisvol maakt, maar dat persoonlijke voorkeuren maken welke ondersteuning door de student het meest gewaardeerd wordt.

REFLECTIE

Startpunt van de hier beschreven zoektocht was het gegeven dat opgaven waarin het gaat om kubisch vergroten voor studenten moeilijk zijn. We legden daarom een herkenbaar probleem voor aan studenten. We vroegen naar de inhoud van een groot ijsje voor de deur van een ijswinkel. Een van de studenten verzucht als we met haar over dit probleem spreken hoe ogenschijnlijk makkelijk dit ijsjesprobleem is: 'Zo'n ijsje voor de ijswinkel zie je dagelijks op straat, je weet hoe het er uit ziet en dat geldt ook voor een klein ijsje, dat je in je hand houdt.' Maar schijn bedriegt. Het vraagt nogal wat wiskundige vaardigheid en kennis om een passende schatting te maken van de inhoud van een groot ijsje voor de deur van een ijswinkel. Je moet een idee hebben van de maten van het kleine en het grote ijsje en verder moet je doorzien hoe je van het volume van het kleine ijsje naar het volume van het grote ijsje komt, door in drie richtingen te vergroten. Verder moet je deze vergrotingen kunnen vertalen naar vermenigvuldigingen met het volume van het kleine ijsje als startpunt.

We zagen dat studenten nogal wat problemen ondervonden bij het oplossen van het ijsjesprobleem. Een aantal studenten worstelt met het pakken van de wiskundige essentie in de gegeven context, namelijk dat afpassen je iets leert over het lineair vergroten en dat je die lineaire vergroting in drie richtingen moet bedenken. Verschillende studenten ontberen meetreferenties, die nodig zijn om dit probleem goed aan te pakken. Enkele studenten worden gehinderd door onbegrepen rekenregels als lengte keer breedte keer hoogte of weten wanneer en hoe je zou kunnen rekenen met een derde macht. Een paar studenten durft niet te rekenen met afgeronde getallen, waardoor ze het voor zichzelf moeilijker maken dan het probleem feitelijk is. Een aanzienlijk aantal studenten worstelt daarnaast met de wiskundetaal die het doordenken van het probleem zou kunnen ondersteunen.

De beschreven zoektocht leidt tot de conclusie dat de opgave rond het ijsje niet iedere student voor dezelfde problemen stelt, maar dat er wel een kernprobleem is dat feitelijk voor iedere student speelt. Het oplossen van het ijsjesprobleem vraagt om gepast mathematiseren van de situatie. Dit zoeken naar de onderliggende wiskunde, om het probleem daarmee op te lossen, vormt voor iedere student op een of andere manier een struikelblok. Daarom zochten we drie manieren van uitleggen die studenten in dit opzicht op een spoor zetten. In twee van deze aanpakken maakten we het kubisch vergroten zichtbaar, namelijk door dat in een blokstructuur te laten zien en door het vergroten te concretiseren als uitrekken.

We merkten dat beide manieren van uitleggen de studenten verder kan helpen. Dat ligt aan de voorkeur van de student, maar ook in details in het handelen van de docent. Zo sprak de student in een van de interviews haar voorkeur uit voor het oprekken, toen dat eerst uitvoerig door de docent met handbewegingen werd voorgedaan, terwijl in interviews waar het uitrekken minder expliciet werd voorgedaan de studenten gingen voor het vergroten uitgelegd aan de hand van een klein MAB-blokje en een groot MAB-blok dat staat voor 1000 blokjes.

Het gesprek met de studenten over manieren van uitleggen van het ijsjesprobleem deed ze nogmaals nadenken over hoe het nu zit met het vergroten van het ijsje en dat maakte dat ze gingen verwoorden wat de essentie is van kubisch vergroten. Dat zou kunnen betekenen dat opleiders in dit geval studenten niet helpen met het aanbieden van een meest gepaste manier van uitleggen, maar wel door verschillende manieren van uitleggen te bieden en die telkens samen met studenten op hun merites te beoordelen. En als dat een opleidingsstrategie wordt die opleiders ook in andere situaties gebruiken als studenten werken aan de eigen rekenvaardigheid, krijgen studenten niet alleen meer greep op de wiskunde en de bijbehorende vaktaal, maar komt ook de didactiek in zicht.

Literatuur

- Ball, D. L., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59, 389-407.
- Keijzer, R., & De Vries, D. (2014). Leren van de toetsing van de kennisbasis rekenen-wiskunde. *Tijdschrift voor Lerarenopleiders*, 35(2), 5-13.
- Vakcommissie rekenen-wiskunde. (2013). *Toetsgids pabo rekenen-wiskunde*. Den Haag: Vereniging Hogescholen.
- Van Zanten, M. A., Barth, F., Faarts, J., Van Gool, A., & Keijzer, R. (2009). *Kennisbasis Rekenen-Wiskunde voor de lerarenopleiding basisonderwijs*. Den Haag: HBO-raad.

Adequately addressing situations of cubic enlargement time after time appears problematic for prospective primary teachers. This for example follows from analysis of results from the nationwide knowledge base test. We explored why cubic enlargement is that difficult for prospective teachers. We found that they experience problems in interpreting the situation, the use of references in measuring, the use of mathematical language and misinterpreting the formula for calculating a volume of a bloc.

Werkblad

IJSJE



Dit ijsje is een vergroting van een eetbaar ijsje. Het staat voor een ijswinkel in Amsterdam.

1. Bedenk de schaal waarop het deze vergroting is gemaakt.

Het volume van een klein ijsje is ongeveer 100 mL.

2. Wat is het volume van het grote model voor de ijswinkel?