

Practica in de lessen rekenen-wiskunde en didactiek op de pabo

Wanneer we Freudenthal (1991) volgen en het leren van wiskunde beschouwen als een proces van geleide heruitvinding, moeten we dat ook laten zien in de lerarenopleiding. Wij pleiten in dit artikel voor onderzoekstaken voor studenten die hen in staat stellen wiskundige ideeën te ontwikkelen, om hen op die manier voor te bereiden op het ondersteunen van kinderen in een vergelijkbaar proces van geleid heruitvinden.

INLEIDING

Kennis laat zich niet kant en klaar overdragen; wie leert past nieuwe kennis in, in wat hij of zij al weet. Freudenthal (1991) trok daar, voor het vak rekenen-wiskunde, een vrij radicale conclusie uit: leerlingen moeten de wiskunde als het ware zelf heruitvinden. Wanneer we Freudenthal op dit punt volgen, heeft dat consequenties voor het pabo-onderwijs. Het betekent dat studenten moeten ervaren wat het betekent om zelf een stukje wiskunde opnieuw uit te vinden en dat ze moeten leren hoe ze leerlingen kunnen ondersteunen op zo'n ontdekkingsstocht.

In dit artikel bespreken we twee practica uit het boek 'Rekenen met verhoudingen op de basisschool' (Van Galen & Markusse, 2018a). Dit boek is een bewerking van het Talboek 'Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen' (Van Galen et al., 2005). De oorspronkelijke tekst is herschreven en aangevuld met beschouwingen, praktijkvoorbeelden, opdrachten en stagesuggesties, waardoor het een echt pabo-studieboek is geworden. Elk hoofdstuk opent met een practicum. Aan de hand van ervaringen met de practica bespreken we de visie die we willen overdragen met het boek.

We gaan in dit artikel eerst in op wat we beogen met de practica en we lichten toe wat we onder geleid heruitvinden verstaan. Daarna bespreken we twee practica, een practicum rond het begrip 'geleid heruitvinden' zelf, en een practicum rond de principes achter kommagetallen. Aan het eind van het artikel gaan we kort in op de kloof die wij zien tussen het onderwijs op de pabo en de praktijk van het reken-wiskundeonderwijs op veel scholen.

EEN VISIE ONTWIKKELEN

Het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool hoort zich te richten op het ontwikkelen van inzicht. Contextproblemen kunnen daarbij een belangrijke rol spelen, omdat leerlingen zulke problemen kunnen oplossen vanuit de informele kennis die ze al hebben. Door het praten over, en het vergelijken van oplossingsmanieren kan die informele kennis stapje voor stapje meer formele, wiskundige kennis worden. Deze visie op het reken-wiskundeonderwijs zal door de meeste pabodocenten gedeeld worden, hoewel ze ongetwijfeld verschillend zullen denken over de precieze uitwerking.

De studenten die de pabo binnenkomen, hebben zich meestal nog geen duidelijke mening gevormd over het reken-wiskundeonderwijs. Een voor de hand liggende manier om hen te helpen een visie te vormen is om hen zelf min of meer in de positie van een leerling te brengen en hen dan hun eigen leerproces te laten analyseren. Een bekend voorbeeld is het 'Land van

Annette Markusse en
Frans van Galen
Hogeschool iPabo,
Amsterdam/Alkmaar en
Universiteit Utrecht

Markusse, A. & Van
Galen, F. (2018). Practica
in de lessen rekenen-
wiskunde en didactiek
op de pabo. Volgens
Bartjens – ontwikkeling
en onderzoek, 38(2),
47-55

Okt' (Goffree, 1982), waarbij studenten gevraagd worden om te rekenen in het achttallig stelsel, om zo te ervaren dat wat zijzelf inmiddels vanzelfsprekend vinden in het werken met getallen, voor leerlingen helemaal niet zo vanzelfsprekend is.

In het boek 'Rekenen met verhoudingen op de basisschool' zijn practicumopdrachten opgenomen met een vergelijkbaar doel. Naar onze mening kunnen zulke practicumopdrachten een belangrijke rol vervullen in de visieontwikkeling van aanstaande leraren.

GELEID HERUITVINDEN ALS KERN

Centraal in het boek staat het begrip 'geleid heruitvinden' - '*guided reinvention*' in het Engels - van Hans Freudenthal (1991). In het traditionele onderwijs wordt volgens Freudenthal geprobeerd om de kennis die wiskundigen in de loop van vele eeuwen ontwikkeld hebben, kant en klaar over te dragen. Die wiskundige kennis is voor leerlingen echter veel te abstract. In plaats daarvan moeten we, stelt hij, ervoor zorgen dat leerlingen zichzelf min of meer als wiskundigen gaan gedragen. Wiskundigen proberen problemen op te lossen en ontwikkelen al doende een gereedschapskist van ideeën. Op een vergelijkbare manier kunnen leerlingen via het oplossen van problemen en gesprekken daarover, zelf ook een gereedschapskist van wiskundige ideeën verwerven. Leerlingen moeten, zegt Freudenthal, de wiskunde als het ware zelf heruitvinden.

Het woord 'geleid' in 'geleid heruitvinden' is echter cruciaal, want leerlingen hebben in hun leerproces natuurlijk van alle kanten steun nodig. Steun van de leerkracht, maar ook van hun schoolboek, want het startpunt is steeds een probleem dat tot nadenken uitnodigt.

In discussies in Nederland over het reken-wiskundeonderwijs heeft de term 'geleid heruitvinden' nooit een grote rol gespeeld, waarschijnlijk omdat Freudenthal en anderen (Gravemeijer, 1994; Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014) het begrip vooral gebruikten in Engelstalige, wetenschappelijke artikelen. Dat is jammer, omdat de term in onze ogen de kern beschrijft van het realistisch reken-wiskundeonderwijs. De kenmerken van dat onderwijs, zoals geformuleerd door Treffers (1987) volgen min of meer uit het meer algemene principe van geleid heruitvinden. Die kenmerken zijn: (1) onderwijs vanuit betekenisvolle contextsituaties, (2) veel aandacht voor de rol van modellen, schema's en symboliseren, (3) een grote rol voor eigen producties en constructies van kinderen, (4) leren als een interactief proces, en (5) de verwevenheid van leerlijnen.

Het begrip 'geleid heruitvinden' geeft een kader aan deze kenmerken van realistisch reken-wiskundeonderwijs, en scherpt ze ook aan. Betekenisvolle contexten, bijvoorbeeld, zijn geen hulpmiddel bij een uitleg, maar de basis van waaruit leerlingen zelf hun ideeën ontwikkelen. De eigen inbreng van leerlingen staat bij alle genoemde kenmerken voorop.

In Van Galen en Markusse (2018b) bespreken we het begrip 'geleid heruitvinden' aan de hand van een praktijkvoorbeeld waarin leerlingen worden gevraagd om zelf een grafiek te tekenen. Deze activiteit daagt de leerlingen uit om na te denken over de vraag wat een grafiek eigenlijk bruikbaar maakt, waardoor er een discussie ontstaat over fundamentele onderliggende ideeën.

Hoe kunnen we ervoor zorgen dat pabostudenten zich een mening vormen over de rol van geleid heruitvinden in het reken-wiskundeonderwijs dat ze gaan geven? Het allerbelangrijkst zijn de ervaringen die ze zelf opdoen met basisschoolleerlingen. Open, niet triviale problemen, waarbij leerlingen de vrijheid krijgen om hun eigen aanpak te bedenken leiden meestal tot heel verschillende redeneringen. Als studenten ervaren dat alle leerlingen zelfstandig stappen kunnen zetten in de richting van een oplossing - op een heel concreet niveau, of op een veel abstracter niveau - zullen ze waarschijnlijk hun eigen rol anders gaan zien. Ze zullen terughoudender worden in uitleggen en voordoen, en meer gaan vertrouwen op het redeneren van de leerlingen zelf. Op de website bij het boek (Van Galen & Markusse, 2018a) worden voorbeelden gegeven van open problemen.

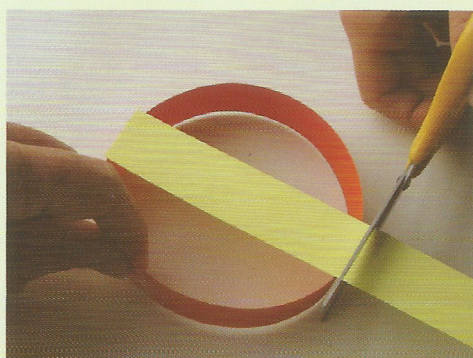
Ook het onderwijs op de pabo zelf moet studenten aan het nadenken zetten over hun visie op het reken-wiskundeonderwijs. Practica kunnen hier een belangrijke rol bij vervullen.

Voorspellen

Deze opdracht kun je het beste met zijn tweeën doen. Je hebt nodig:

- papieren stroken van 10 cm, 20 cm, 30 cm, 40 cm en 60 cm lang (dus geen strook van 50 cm); maak ze ongeveer 2 cm breed;
- stroken van een andere kleur papier;
- een flapover-vel (liefst met ruitjes), pen of stift, schaar, plaksel, liniaal of rolmaat.

Kies een van de vijf afgemeten stroken uit. Een van jullie maakt daar een cirkel van door de twee uiteinden tegen elkaar aan te houden (laat ze niet overlappen!). De ander knipt van het andere papier een strook zo lang als de middellijn van die cirkel. Je weet dus nu hoe lang de middellijn is van die ene cirkel. Je mag hem ook opmeten.



De opdracht waar het om gaat is: voorspel hoe lang de middellijn wordt bij de cirkels van de andere vier stroken. Let op, je mag ze niet opmeten!

Vergelijk jullie redenering met die van andere studenten.

Maak een grafiek

Er is een bepaald verband tussen de omtrek van een cirkel en de lengte van de middellijn, daar zullen jullie het over eens zijn geworden.

Maak nu een grafiek die het verband tussen omtrek en middellijn in beeld brengt. Je mag die grafiek tekenen, maar je mag hem ook maken door stroken op te plakken. Als het nodig is, mag je nu wel de middellijnen van de andere cirkels opmeten.

Vergelijk jullie grafiek met die van andere studenten.

Een vaste verhouding

Waarschijnlijk zijn jullie steeds uitgegaan van een vaste relatie tussen omtrek en middellijn: als de omtrek twee keer zo groot wordt, dan wordt de middellijn ook twee keer zo groot. We zeggen dan dat er een 'evenredig' verband is.

Bedenk een situatie waarbij er wel een verband is tussen twee grootheden, maar geen evenredig verband. Kun je een grafiek schetsen voor die situatie?

Afbeelding 1. De practicumopdrachten bij het hoofdstuk 'Heruitvinden'

PRACTICUM GROTE EN KLEINE CIRKELS

Bij het hoofdstuk over geleid heruitvinden kozen we voor een activiteit waarin het draait om de vaste verhouding tussen de doorsnede en de omtrek van een cirkel, en dus om het getal π . Omdat de studenten π al kennen van het voortgezet onderwijs is er geen sprake van echt heruitvinden, maar de opdrachten zijn zodanig dat studenten niet simpelweg de formules voor omtrek en oppervlakte van een cirkel kunnen toepassen. Bovendien zullen veel studenten onzeker zijn over de precieze vorm van die formules.

We beschrijven hier hoe het practicum verliep in een groep eerstejaars pabostudenten. Docent was Annette Markusse. De opdrachten van het practicum staan beschreven in afbeelding 1, maar de docent kiest ervoor om geen schriftelijke tekst te geven en de opdrachten zelf uit te leggen. Ze heeft zelf al stapeltjes stroken van de gegeven lengtes gemaakt en deelt die uit. De studenten werken samen in twee- of drietallen.

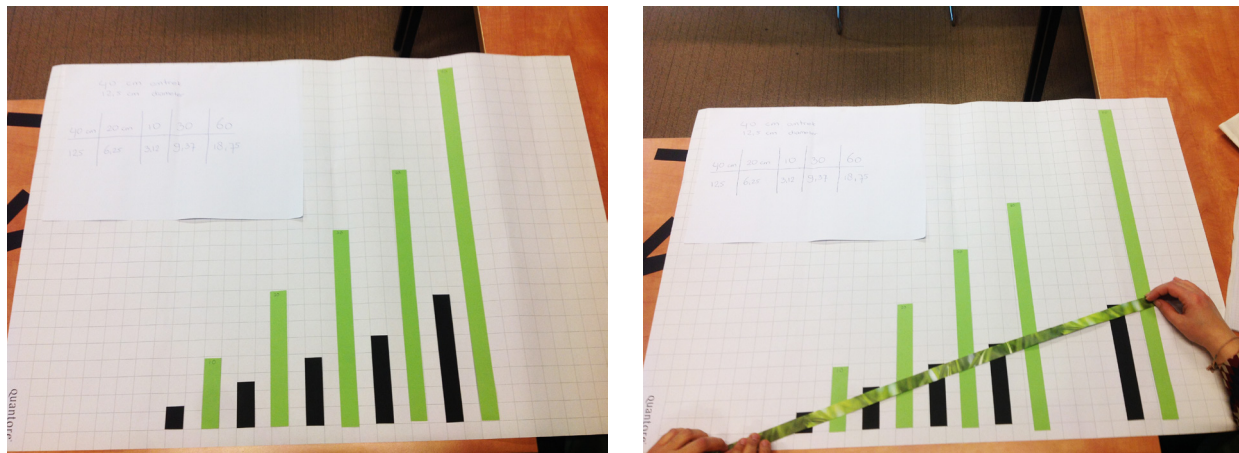
Alle groepjes besluiten direct dat als de omtrek van de cirkel twee keer zo groot wordt, dat dan ook de doorsnede twee keer zo groot zal zijn. Na het opmeten van de doorsnede bij de door hen gekozen cirkel zijn de andere waarden gauw gevonden. Twee studenten geven hun redenering weer in een verhoudingstabel:

40 cm	20 cm	10	30	60
12,5	6,25	3,12	9,37	18,75

Afbeelding 2. Omtrek en doorsnede in een verhoudingstabel

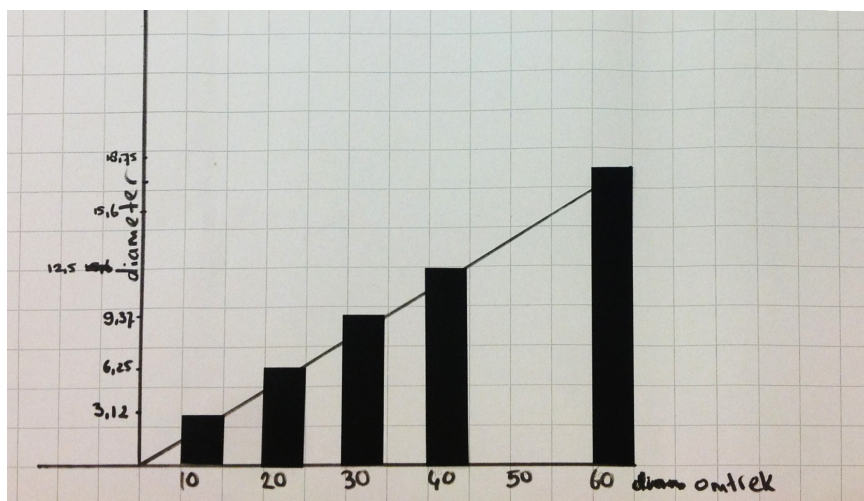
Verschillende groepjes constateren dat de omtrek steeds ongeveer 3 keer groter is dan de doorsnede, maar er is deze keer maar één groepje dat direct ziet dat het in feite om π gaat: de omtrek van een cirkel is π maal de doorsnede.

De volgende opdracht is om een grafiek te maken die het verband tussen doorsnede en omtrek laat zien. De studenten in de groepjes overleggen daarover en maken op papier wat schetsjes, maar komen daar niet echt verder mee. De docent onderbreekt hen en suggereert om het met de gekleurde stroken te doen. Dit brengt de meeste groepjes tot het maken van een staafdiagram.



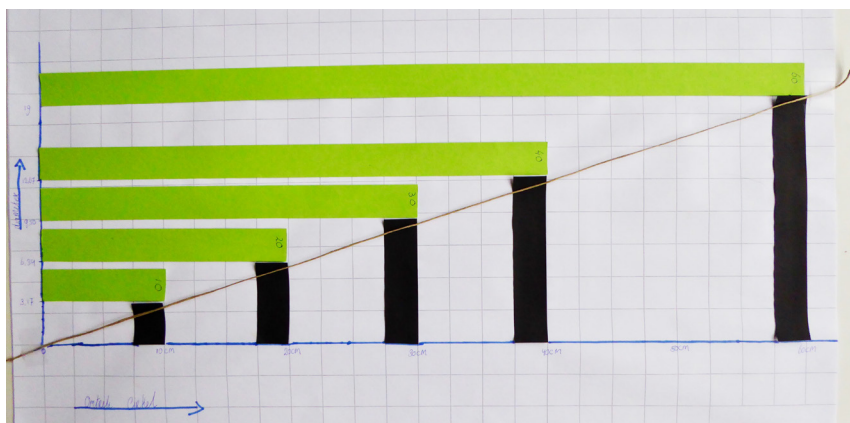
Afbeelding 3. Ruimte overlaten voor de stroken van de 50cm-cirkel.

De twee studenten die de verhoudingstabel gemaakt hadden, maken in eerste instantie de grafiek van de linkerfoto van afbeelding 3, maar dan besluiten ze dat ze de staven van de 60 cm-cirkel niet direct naast die van 40 cm moeten leggen, want er horen nog de staven van 50 cm tussen. Ze laten zien dat je nu een rechte lijn kunt trekken langs de punten van de diameterstaafjes (de rechter foto van afbeelding 3).



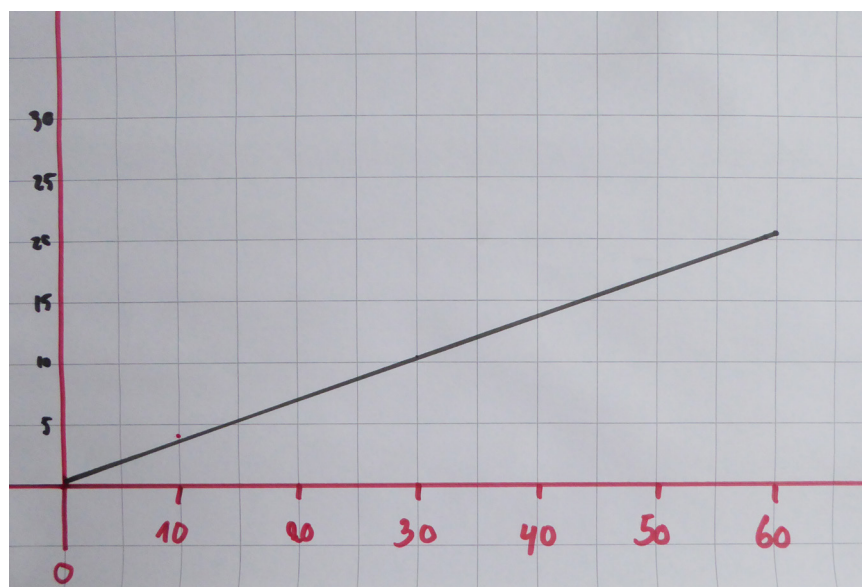
Afbeelding 4. Een grafiek zonder de omtrekstaafjes.

Uiteindelijk tekenen ze een grafiek zonder de omtrekstaafjes (afbeelding 4).



Afbeelding 5. Omtrek ten opzichte van doorsnede.

Een ander tweetal maakt een grafiek waarin ze doorsnede-staafjes rechtop zetten en de omtrekstaafjes horizontaal, zie afbeelding 5. Met een touwtje laten ze zien dat je een rechte lijn kunt trekken tussen de hoekpunten, wat betekent dat er een evenredig verband is tussen omtrek en doorsnede. Dat touwtje werd overigens door de docent aangereikt met de opmerking ‘Kunnen jullie hier nog wat mee?’



Afbeelding 6. Een grafiek zonder de stroken.

Een groepje van drie studenten maakt in feite dezelfde grafiek, maar getekend op papier (afbeelding 6). Interessant is dat dit groepje lang discussieerde omdat een van de studenten een schuine lijn met een hoek van 45 graden wilde tekenen. Hij wilde de waarden op de assen daaraan aanpassen, terwijl de andere twee uitgingen van gelijke afstanden op de x- en de y-as. In principe kun je inderdaad kiezen voor een willekeurige hoek, dus ook een hoek van 45 graden, zolang je er maar voor zorgt dat zowel de horizontale als de verticale as, de verhoudingen tussen de verschillende waarden correct weergeven. Dat wil zeggen dat bijvoorbeeld de afstand tussen 0 en 60 op die as twee keer groter is dan de afstand tussen 0 en 30.

WAT LEERDEN ZE ER VAN?

De vraag is natuurlijk of zo'n practicum studenten aanzet tot nadenken over het leren van henzelf en het leren van kinderen. In deze groep werkte het zeker. In het afsluitende gesprek is iedereen het erover eens dat de opdracht hen beter inzicht heeft gegeven in de relatie tussen doorsnede en omtrek en de rol van π daarbij:

‘Je ontdekt het zelf en dan beklijft het beter, vind ik. Ik in ieder geval, ik vergeet het niet.’

De studenten vonden het nuttig dat ze moesten reconstrueren wat ze ooit geleerd hadden. In het practicum ging het om zaken die op zich niet nieuw waren.

'Het is heel erg je voorkennis ook gebruiken, zeg maar, wat je al weet. Je weet wel enigszins hoe je een cirkel kan berekenen en hoe je een grafiek kan maken, maar dat vergeet je gewoon heel snel. Ik wist het ook niet meer, want ik ging het googelen.' (De student blijkt niet de formules van omtrek en oppervlakte te hebben gegoogeld, maar informatie over grafieken.) 'Ik wist wel wat een grafiek was, hoor, maar ik wist niet meer wat voor soorten je hebt en welke je kan gebruiken. U zegt wel grafieken, maar grafieken zijn heel breed, dus je kan van alles maken.'

Het concrete meten, tekenen, knippen en plakken vonden de studenten zinvol, en ook motiverend:

'Ik werd zo nieuwsgierig toen ik binnen kwam lopen, want er ligt materiaal dat ik niet ken, en ik heb op een of andere manier gewoon zin om ermee te werken.'

De opdracht was bedoeld voor pabostudenten, maar de studenten denken dat een dergelijke aanpak, met veel ruimte voor concreet proberen, ook goed zal werken bij leerlingen van de basisschool.

FUNDAMENTELE VRAGEN

Zo'n practicum is natuurlijk niet meer dan een instap, een manier om de studenten te betrekken bij het betreffende onderwerp. Het is bovendien maar een eenmalig onderzoekje, terwijl Freudenthal met geleid heruitvinden doelde op langlopende leerprocessen. In het hoofdstuk dat volgt op het practicum wordt duidelijk gemaakt dat het onderwijsprincipe van geleid heruitvinden tot fundamentele vragen leidt:

- Wat zijn de wiskundige kernideeën die leerlingen zelf zouden moeten herontdekken?
- Hoe open kan het probleem zijn? Het probleem moet aanleiding geven tot discussie over bepaalde kernideeën, dus de context en de vraag moeten daar op zijn toegespitst.
- Hoe moeilijk mag het probleem zijn? Een te simpel probleem leidt niet tot discussie. Een leerkracht die weet dat ze kan bijsturen, hoeft niet bang te zijn dat een probleem te lastig zal zijn.
- Hoe help je als leerkracht de leerlingen? Je wilt niet toesturen naar een bepaalde oplossing, maar hoe help je leerlingen op weg?
- Hoe belangrijk zijn discussies in de klas? Wat is de rol van de leerkracht in die discussies?
- Welke rol speelt het samenwerken van leerlingen in kleine groepjes?
- Kunnen alle leerlingen meedoen als zo'n open probleem moet worden opgelost?

Het principe van geleid heruitvinden leidt ook tot een specifieke invulling van de rol die modellen spelen in het onderwijs. Streefland (1985) en Gravemeijer (1999) schetsen dat als een proces van 'model-van' naar 'model-voor'. Hier wordt op ingegaan in andere hoofdstukken.

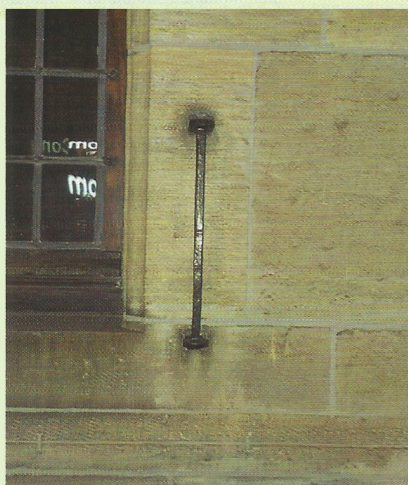
EEN PRACTICUM OVER KOMMAGETALLEN

Een tweede practicum, dat we kort willen bespreken, gaat over de principes achter de kommagetallen. Het systeem van kommagetallen, of tiendelige breuken is elegant en praktisch. Simon Stevin beschreef het in 'De Thiende' (1585) als een alternatief voor de gewone breuken, die als nadeel hebben dat ze niet rechtstreeks in elkaar omgerekend kunnen worden. Om studenten over dat systeem na te laten denken, begint het hoofdstuk over kommagetallen met een uitstapje naar het meten (afbeelding 7). Bij het meten is namelijk dezelfde overgang gemaakt: van maatsystemen waarin bijvoorbeeld een roede gelijk was aan 14 voet en een voet weer gelijk aan 10 duim, naar het huidige systeem waarin elke volgende maat een stap van 10 keer groter of kleiner is.

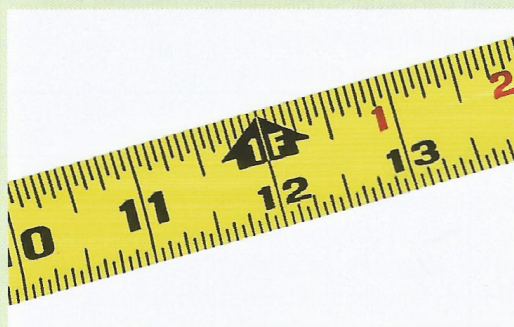
Metten met oude lengtematen

Stel je eens voor dat jij in 1700 leefde en je kreeg de opdracht om een heel nieuw maatsysteem te bedenken. Je liet een strook koper in metselen in de Dom van Utrecht en je noemde dat de 'Nederlandse el'. Hoe zou je daarna verder gaan? Zo'n el van, zeg, 70 cm is een prima maat om bijvoorbeeld de grootte van een tuin op te meten, maar het zou een nogal grove maat zijn voor het opmeten van tafels of kasten. Hoe zou je de verfijning die nodig is, inbouwen in jouw maatsysteem?

- 1 Maak een of meer stroken van een el en meet daar vijf voorwerpen mee op. Schrijf de lengtes die je gevonden hebt op. Waar het om gaat is: wat doe je om preciezer te kunnen meten?
- 2 Denk ook na over de wijze waarop je de gevonden lengtes noteert. Wat is een handige notatie? Welke regels zou je invoeren?
- 3 Vergelijk jouw maatsysteem met dat van anderen. Wat zijn de voordelen en wat zijn de nadelen van de verschillende systemen?



Foot en inch



Foot en inch

- 1 Op het plaatje zie je een stuk van een Amerikaans meetlint. Hoe verhouden foot en inch zich tot elkaar?
- 2 Let op de maatverfijning, een inch wordt niet ingedeeld in 10 stukjes. Is er een overeenkomst met de maatverfijning die je in de eerste opdracht over oude lengtematen bedacht?

Serena en James

Serena Williams en LeBron James zijn in de Verenigde Staten zeer bekende sporters. Serena speelt tennis en is 5 feet en 9 inch lang (5'9"). James is een basketballer en heeft een lengte van 6 feet en 8 inch (6'8"). Dat een mannelijke basketballer veel langer is dan een vrouwelijke tennisspeler zal je niet verbazen. Hoeveel langer is James ongeveer? Reken het eerst uit zoals de Amerikanen of Britten het zouden doen, dus zonder over te stappen naar centimeters. Reken het daarna ook uit binnen ons eigen maatsysteem (1 inch = 2,54 cm). Welke manier vind je handiger?

Afbeelding 7. De practicumopdrachten bij het hoofdstuk over kommagetallen.

Deze practicumopdracht introduceert de docent (A.M.) met een foto op het digibord van de staf die is ingemetseld in de gevel van het stadhuis van Leiden en die de lengte van een 'Rhijnlandse voet' aangeeft. Ze deelt stroken uit van 70 cm en vraagt om een aantal voorwerpen op te meten. Ze stelt de vraag: wat voor maatsysteem zou je voorstellen als de 'el' - de lengte van de strook - daarvan de basis zou moeten zijn? De eerste reactie van een van de studenten is:

'De el gewoon een rond getal maken, gewoon 10 of zo.' (Docent: 'De el is de basis en dan?') 'De rest daarop aanpassen, maar dan wel zo kiezen dat je er makkelijk mee kan rekenen.' (Leg nog eens verder uit.) 'Dat je iets maakt dat bijvoorbeeld de helft is of een derde deel of zo.'

Hoewel de student direct '10' noemt, komt ze uit op het onderverdelen van de el met niet-tiendelige breuken. Dat doen in feite alle studenten in deze tweedejaarsgroep, wat uitgelokt wordt door de papieren strook. Ze vouwen allemaal hun el dubbel en weer dubbel om preciezer te kunnen meten. De conclusie is dat je zou kunnen meten met een halve el, een kwart el, een achtste el, zestiende el, tweëndertigste el, enzovoorts.

De docent laat het hierbij en introduceert daarna de vraag over de Engels-Amerikaanse lengtematen. Een van de studenten heeft een jaar in Engeland gewoond en weet dat zij *6 feet* en *2 inches* is; als ze vertelde dat ze 1 meter 85 was, zei dat niemand iets. Een andere student zoekt op internet de relaties tussen *foot*, *inches* en *yard*. Nadat er met *feet* en *inches* gerekend is, is iedereen het erover eens dat het Engels-Amerikaanse systeem nogal onhandig is en dat de onderverdeling van lengtematen met steeds stappen van 10 het rekenen met die lengtematen veel makkelijker maakt.

Het is iedereen duidelijk dat je een maatsysteem nodig hebt dat verfijning toelaat. Dat verfijning via stappen van 10 handig is, omdat je op die manier aansluit bij ons systeem van hele getallen, kwam in deze groep pas naar voren na de discussie over de Engelse en Amerikaanse maten.

PRACTICA ALS VOORBEELD VOOR LESSEN OP DE BASISCHOOLO

Practica zijn naar onze mening een goede manier om studenten aan het denken te zetten over leerprocessen. Ze zullen echter ook als voorbeeld fungeren voor het lesgeven. Het is goed om expliciet aandacht te besteden aan de overeenkomsten tussen de practicumles en de lessen die studenten zelf geven op hun stagescholen. Kijk na een geslaagd practicum met de studenten terug, bijvoorbeeld met vragen als:

- Wat was jullie rol in deze les?
- Wat was mijn rol als docent? Hoe heb ik me opgesteld?
- Kun je een les beschrijven op je stageschool die vergelijkbaar is met deze practicumles?

Zo'n gesprek kan leiden tot discussies over zaken als:

- Stimuleren tot werken op een concreet niveau, bijvoorbeeld door leerlingen met concreet materiaal te laten werken, of door hen expliciet te vragen om papier te gebruiken voor schetsjes en berekeningen.
- Samenwerken in kleine groepjes.
- Stimuleren dat leerlingen hun oplossing presenteren met heldere argumenten en met berekeningen of tekeningen op het bord.
- De leerkracht als gespreksleider, niet als degene die uitlegt.
- Oplossen en bespreken van een enkel probleem kan al gauw drie kwartier of langer kosten; is die tijd goed besteed?

Onvermijdelijk zal ook ter sprake komen wat er wel en niet op basisscholen mogelijk is. Reken-wiskundemethodes gaan bijvoorbeeld uit van een leergesprek van hooguit 15 tot 20 minuten, terwijl een echt open probleem veel meer tijd vraagt. De opgaven in de reken-wiskundeboeken zijn dan ook meestal vrij rechtoe-rechtaan; het gaat bijvoorbeeld om een breukenopgave of het werken met de verhoudingstabel, maar nooit om een probleem dat zowel met breuken, als met verhoudingen of procenten mag worden opgelost.

Dat brengt ons op een algemener punt: er is een zekere kloof tussen wat door veel pabodocenten geschetst wordt als het gewenste reken-wiskundeonderwijs, en de praktijk van het reken-wiskundeonderwijs op veel scholen. Op de pabo wordt door docenten het nut van open problemen en onderzoekend leren benadrukt, maar op de meeste basisscholen is daar beperkt ruimte voor. Steeds weer is het een uitdaging om op de pabo de juiste balans te vinden tussen het ideaalbeeld en de alledaagse praktijk. Practica, zo is onze ervaring, bieden de mogelijkheid die kloof samen met studenten te onderzoeken en te bespreken. Studenten kunnen tijdens de practica zelf ervaren waarom redeneren, argumenteren en met elkaar in discussie gaan de kern moet zijn van iedere reken-wiskundeles. Inzicht ontwikkel je niet door naar de leerkracht te luisteren; je leert het door zelf actief op onderzoek te gaan, door eigen redeneringen onder woorden te brengen en daar met anderen over te praten. Dit geldt niet alleen voor leerlingen die inzicht in de wiskunde moeten ontwikkelen, maar net zo goed voor pabostudenten die inzicht moeten ontwikkelen in de reken-wiskundendidactiek.

Literatuur

- Freudenthal H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Goffree F. (1982). *Wiskunde & Didactiek. Eerste deel*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
- Gravemeijer K. P. E. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: CD-β Press.
- Gravemeijer K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical thinking and learning*, 1(2), 155-177.
- Streefland L. (1985). Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron (Mathematics as an activity and the reality as a source). *Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs (Nieuwe Wiskrant)*, 5(1), 60-67.
- Stevin S. (1585). De Thiende; Leerende door onghewoorde lichticheyt allen rekeningen onder den Menschen noodich vallende, afveerdighen door heele ghetalen sonder ghebrokenen.
- Treffers A. (1987). Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics education. Dordrecht: Reidel.
- Van den Heuvel-Panhuizen M., Drijvers P. (2014) Realistic Mathematics Education. In: Lerman S. (eds). *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Dordrecht

- Van Galen F. & Markusse A. (2018a). *Rekenen met verhoudingen op de basisschool; Reken-wiskundendidactiek voor de bovenbouw*. Groningen: Noordhoff Uitgevers.
- Van Galen F. & Markusse A. (2018b). Inzicht ontwikkelen; een pleidooi voor geleid heruitvinden. *Volgens Bartjens*, 37(5), 4-8.
- Van Galen F., Feijs E., Figueiredo N., Gravemeijer K., Van Herpen E. & Keijzer, R. (2005). *Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen*. Groningen: Wolters-Noordhoff.

If we follow Freudenthal (1991) and view mathematics learning as a process of guided reinvention, we should incorporate this view in our education of future teachers. We argue for investigative tasks that let student teachers reinvent mathematical ideas, as a way to prepare them for helping children in similar processes.