

Meer dan rekenvaardig

HET KIEZEN VAN EEN METHODE VOOR DE 21^E EEUW

Dit schooljaar komt een aantal uitgeverijen op de NOT met een nieuwe of een vernieuwde rekenmethode. Voor veel scholen is dit ook het jaar dat zij een nieuwe methode overwegen. Kiezen zij voor de nieuwe editie van hun eigen methode, of switchen ze naar een andere methode?

Tekst
Geeke Bruin-Muurling

Zelfstandig vakdidacticus –
eigenaar EDB

Bij de keuze van een methode spelen verschillende aspecten. In dit artikel wil ik vanuit mijn achtergrond en werk ingaan op de keuze van een nieuwe reken-wiskunde methode. Daarin staan twee vragen centraal:

‘Hoe kan de verander(en)de rol van wiskunde in onze gedigitaliseerde en mondiale samenleving vertaald worden naar het onderwijs?’ en ‘Wat zijn de belangrijkste essenties van wiskunde?’

NIEUWE TIJDEN

Met de komst van digitale middelen zijn de rol en de aard van rekenen en wiskunde in ons dagelijks leven veranderd. De discussies over wat dit betekent voor het curriculum zijn nog in volle gang, in Nederland zelf onder andere binnen Curriculum.nu (zie ook pagina 28-29). Toch tekenen zich nationaal en internationaal al een aantal richtingen af. Los van mogelijke wijzigingen in het de komende jaren, is het ook nú al belangrijk om onze leerlingen zo goed mogelijk voor te bereiden op de nieuwe eisen die de maatschappij aan hen gaat stellen.

DIGITALISERING

De digitalisering heeft op verschillende manieren invloed op de reken-wiskundige kennis van toekomstige burgers. Er zijn steeds meer digitale middelen beschikbaar die een deel van het wiskundige werk overnemen. Dat betekent dat bepaalde vaardigheden steeds vaker niet meer op papier worden uitgevoerd. Denk hierbij bijvoorbeeld aan grote berekeningen die je op een rekenmachine uitvoert. En er zijn apps waarmee een foto gemaakt kan worden van een som, waarna de app de som omzet naar een digitale vorm én het antwoord geeft. Maar ook in Excel kan een complex van berekeningen worden uitgerekend, die bovendien hergebruikt kunnen worden. Denk hierbij bijvoorbeeld aan de rekenmodellen voor prijsberekeningen van een salesafdeling. Google maakt al gebruik van wiskundesoftware. Er zijn apps beschikbaar waarmee je bijvoorbeeld een foto maakt van een formule. De computer of je telefoon laat vervolgens een grafiek zien die past bij de formule, maar geeft ook allerlei eigenschappen en afleidingen. Statistische software wordt ook steeds meer gemeengoed. Bijvoorbeeld in het hoger onderwijs waar kwantitatief onderzoek onderdeel van veel studies is. Software neemt op die manier veel van het rekenwerk over dat eerder door mensen zelf werd gedaan. Tegelijkertijd zorgt deze ontwikkeling er ook voor dat meer geavanceerdere wiskunde via diezelfde software beschikbaar is. Om zinvol met deze digitale hulpmiddelen om te gaan wordt vaker een beroep gedaan op het conceptuele begrip van rekenen en van wiskunde.





Er wordt van de burger van de toekomst meer verwacht dan de beheersing van rekenvaardigheden.

HET INFORMATIETIJDPERK

Een andere kant van de digitalisering is dat dit tijdperk ook wel het informatietijdperk wordt genoemd. We leven in een maatschappij waar informatie rijkelijk voor handen is. Daardoor ontstaat soms het beeld dat we alles kunnen opzoeken en dat leidt tot de conclusie dat de rol van eigen kennis minder belangrijk wordt. Daar zou ik graag enige nuance in aan willen brengen. In een groot deel van de informatie die op ons afkomt spelen getallen en wiskunde een belangrijke rol. Om daar verstandig mee om te kunnen gaan is een zekere gecijferdheid nodig en kritisch wiskundig denken. Te vaak worden cijfers als onomstotelijk en objectief beschouwd. Men vergeet voor het gemak dat er in de berekeningen achter die cijfers allerlei keuzes zijn gemaakt. Wat betekent bijvoorbeeld 'de goedkoopste supermarkt'? In het onderzoek van televisieprogramma Kassa is dat de supermarkt waar het door het onderzoeksteam samengestelde boodschappenmandje het goedkoopste is. Als in de supermarkt van een bepaald product (bijvoorbeeld de pindakaas) meerdere alternatieven voor handen waren dan werd tot twee jaar terug het huismerk genomen. De laatste jaren is dat veranderd in het budgetmerk, wat tot gevolg heeft dat de ranking van de supermarkten drastisch veranderd is. De keuze van de onderzoekers voor huismerk of budgetmerk heeft dus een bepalende invloed op de uitkomst van het onderzoek. De ranking is dus niet zondermeer 'waar'. Maar de ranking is ook niet onwaar. De clou zit hem erin dat het alleen betekenis heeft als we de exacte context kennen. Niet alleen de totstandkoming van cijfermatige informatie, maar ook de rapportage daarover verdient een gezonde houding tegenover 'cijfers' en 'cijfermatig bewijs'.

Kortom, als we naar deze ontwikkelingen kijken dan wordt er van de toekomstige burger meer verwacht dan de beheersing van rekenvaardigheden. Van belang zijn dan inzicht in deze bewerkingen en meer conceptueel begrip om met al die digitale hulpmiddelen om te gaan en de uitkomsten te kunnen interpreteren; flexibiliteit, om rekenwiskundige kennis in nieuwe situaties toe te kunnen passen; een kritisch wiskundige houding; inzicht in de kracht van bepaalde technieken en een positief-kritische houding ten opzichte van data. In het basisonderwijs wordt hiervoor de basis gelegd en deze basis is heel belangrijk.

TASK-PROPENSITY

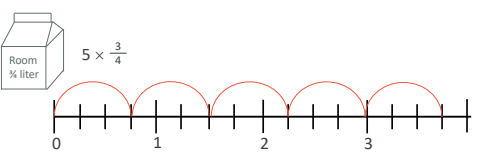
Los van bovenstaande discussie over wat onze leerlingen in de toekomst nodig hebben speelt er in het reken-wiskundeonderwijs ook al jaren een discussie over de kwaliteit van het huidige onderwijs.

Voor mij was dit een aantal jaren geleden aanleiding om nader te bekijken hoe de vaardigheid van leerlingen zich in het domein van breuken ontwikkelde en wat daar onderliggende factoren waren. In dit onderzoek¹ ontdekte ik dat onderwijs dat teveel gericht is op de beheersing van geïsoleerde vaardigheden een negatief effect heeft op inzicht en flexibiliteit, maar ook op de ontwikkeling van de vaardigheid zelf. Dit verschijnsel zagen we ook in andere studies en het staat ook wel bekend onder de term *task-propensity*. Hieronder verstaan we een benadering van het reken-wiskundeonderwijs als een aantal procedures die de leerlingen moeten leren beheersen. Voor leerlingen betekent dit dat ze zodanig gefocust zijn op de kenmerken van een specifieke opgave dat ze niet zien hoe ze die algemener kunnen maken en breder kunnen toepassen. Ze zien als het ware door de bomen het bos niet meer². We zien dit bijvoorbeeld ook bij leerlingen die methodetoetsen heel goed kunnen maken maar bij een methode-onafhankelijke toets (bijvoorbeeld Cito) volledig in het duister tasten. Mijn onderzoek liet zien dat die *task-propensity* ook in lesmethodes en het lesgeven zelf terugkomt. Daarmee hebben ze grote invloed op een 'task propense' houding van leerlingen, bevorderen ze die zelfs. In het onderwijs is er dan vooral aandacht voor oplossingsprocedures die routinematig tot de goede antwoorden leiden, en minder voor de wiskundige essenties of het leggen van een solide begripsbasis voor het vervolg van de doorlopende leerlijn. Later zagen we ditzelfde terug in andere onderzoeken³ over andere onderwerpen binnen het reken-wiskundeonderwijs én wiskundeonderwijs.

VERKOKERING

Bovengenoemd probleem resulteert bijvoorbeeld in wat we 'verkokering' noemen. Van verkokering is sprake wanneer getal- en gevals specifieke procedures apart ingeslepen worden, zonder een duidelijk verband te leggen tussen die verschillende procedures. Bij het vermenigvuldigen van breuken gebeurt bijvoorbeeld het volgende:

Geheel getal × echte breuk



Echte breuk × geheel getal

28

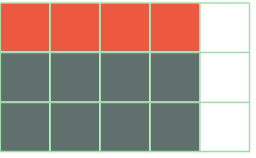
$\frac{1}{4} \times 28$

7 7 7 7

$\frac{3}{4} \times 28$

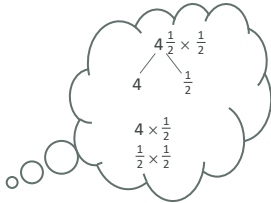
$\frac{3}{4} \times 280$

Echte breuk × echte breuk



$\frac{1}{3} \times \frac{4}{5}$

Gemengd getal × echte breuk



Breuk × breuk

breuk × breuk = $\frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}$

$1 \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{7}{4} \times \frac{2}{5}$

$5 \times \frac{2}{3} = \frac{5}{1} \times \frac{2}{3}$

Verkokering zoals we dat zien bij het vermenigvuldigen van breuken (generalisatie van onderdelen uit de verschillende PO en VO methodes)

Het voorbeeld laat zien wat de nadelen zijn als het onderwijs op deze manier wordt ingericht. De modellen en contexten die worden gebruikt zijn bedoeld om bij te dragen aan het met begrip uitvoeren van de genoemde bewerkingen. Zo worden leerlingen op hun begrip van vermenigvuldigen als herhaald optellen aangesproken door een concrete hoeveelheid te gebruiken (context) en te springen op de getallenlijn (model). Deze inbedding wordt gebruikt als een geheel getal wordt vermenigvuldigd met een echte breuk (bijvoorbeeld $8 \times \frac{3}{4}$). Voor andere situaties zoals een echte breuk maal een geheel getal (bijvoorbeeld $\frac{3}{4} \times 8$) worden andere informele strategieën met bijbehorende contexten en modellen aangeboden. En hier ligt het probleem van **verkokering**. Door de strategieën geïsoleerd en zonder verband met onderliggende of ermee samenhangende kennis aan te bieden, is het voor veel leerlingen moeilijk om (uiteindelijk) de samenhang wel te kunnen zien. In de eerste begripsvorming van wat vermenigvuldigen is en wat breuken zijn, zijn contexten en modellen belangrijk, maar er moet in het onderwijs ook een verband tussen de afzonderlijke gebieden gelegd worden. Door het blijvend geïsoleerd aanbieden van deze strategieën en ze zelfs geïsoleerd in te slijpen, wordt het voor leerlingen lastiger gemaakt om de verschillende strategieën naderhand tot één begrip te verbinden. De strategie die in het VO wordt aangeboden (zie afbeelding) wordt in dit geval voor veel leerlingen

een vijfde strategie. De verkokering leidt ertoe dat leerlingen niet in staat zijn voort te bouwen op hun kennis, hoewel ze wel correcte antwoorden op (kale) sommen kunnen geven. Zij hebben immers geen echt begrip van het vermenigvuldigen met breuken. Daar kunnen zij hinder van ondervinden als zij bijvoorbeeld moeten rekenen met samengestelde eenheden binnen natuurkunde en scheikunde, als ze moeten rekenen met indexcijfers bij economie of bij het oplossen van vergelijkingen bij wiskunde.

En dan hebben we het hier over de leerlingen die de procedures beheersen. Verkokering heeft namelijk een tweede nadeel, het doet een beroep op het herkennen van getal- en gevals-specifieke kenmerken van de opgave om daarbij vervolgens de juiste procedure te kiezen. Dit herkennen is moeilijk, vooral voor zwakkere leerlingen. Bovendien lijken de procedures zo erg op elkaar dat de leerlingen ze makkelijk door elkaar halen. Het is interessant dat we verkokering tegenkomen in zowel lesmateriaal dat een realistische rekenen-wiskunde onderwijsachtergrond heeft als in methodes die meer vanuit een traditionele insteek werken. Dit komt omdat aan *task propensity* vaak onbewust oude overtuigingen over onderwijs ten grondslag liggen. Die staan vaak haaks op de gekozen didactische uitgangspunten, maar komen wel tot uiting in de praktijk. Je kunt dit bijvoorbeeld vergelijken met het maken van fouten. Ook als een leraar zijn best doet een klimaat in



de klas te scheppen waarin fouten maken een natuurlijk onderdeel van het leerproces is, kunnen onbewuste uitspraken of gewoontes – zoals het praten over toetsen – de leerlingen toch een andere boodschap geven.

AANDACHTSPUNTEN

Als het gaat om het toekomstige reken-wiskunde onderwijs dan zijn hierboven twee denkrichtingen aangegeven. De digitalisering zorgt ervoor dat een deel van het rekenwerk door computers wordt overgenomen maar ook dat cijfermatige informatie een belangrijke rol speelt in onze maatschappij. Dit leidt tot het idee dat conceptuele kennis en flexibiliteit steeds belangrijker worden. Het verleden leert ons dat *task-propensity* zoveel mogelijk vermeden zou moeten worden. Dat is mogelijk door bijvoorbeeld het tegenovergestelde, een duidelijke uitwerking van wat onder conceptueel begrip wordt verstaan, als uitgangspunt te nemen. Beide denkrichtingen (toekomst en lessen uit het verleden) vinden elkaar in het streven naar conceptueel begrip en flexibiliteit.

Als we streven naar conceptueel begrip is het een goede ontwikkeling dat leerlingen meer tijd krijgen om zich bepaalde concepten eigen te maken; dat er meer rust komt in het curriculum. *Task-propensity* wordt immers sterker naarmate er meer tijdsdruk op het leerproces ligt. Het is belangrijk om de tijd te nemen om tot de kern van een begrip te komen en niet te snel terug te grijpen

op een onbegrepen procedure die altijd werkt. Het is niet voldoende als een leerling de correcte antwoorden kan geven. Het doorgronden van de wiskundige concepten zorgt ervoor dat ook de volgende leerstof op een goede basis landt. Als een leerling bijvoorbeeld niet voldoende begrijpt dat een tiental een eenheid op zichzelf is, maar ook gezien kan worden als 10 lossen, dan zal zich dat op tal van gebieden wreken. Bijvoorbeeld bij het metriek stelsel, het rekenen met kommagetallen en het optellen van getallen met een 0 daarin. Daarnaast zal er aandacht nodig zijn voor het praktisch inzetten van reken-wiskunde zoals (kritisch) wiskundig denken, een positieve houding ten opzichte van getallen en numerieke informatie en begrijpen wat de impact van wiskunde is. Wiskundig denken is een breed begrip en kan zich op allerlei uiten. Een voorbeeld daarvan is de ontdekking dat je op verschillende plaatsen in de wiskunde bewerkingen tegenkomt die elkaars tegengestelde zijn. Dat de ene operatie als het ware de terug weg van de andere beschrijft: $5 + 3 = 8$ en $8 - 3 = 5$. Daardoor kun je plus en min aan elkaar verbonden zien. Datzelfde zie je ook bij keer en delen, en later bij kwadrateren en wortel-trekken.



Maar ook in bepaalde toepassingen zoals het rekenen met en zonder BTW.

Wiskundig denken heeft ook te maken met wiskundige activiteiten als modelleren en probleemoplossen. Met probleemoplossen bedoel ik de aanpak van niet routinematige wiskundige problemen en niet zozeer wat we wel verstaan onder redactiesommen, waar de nadruk vooral ligt op het herkennen van de te gebruiken oplossingsstrategie. Kritisch wiskundig denken heeft ook te maken met het praten over de rekenen-wiskunde. Wanneer een even getal bijvoorbeeld wordt gedefinieerd als een getal dat je kunt delen door 2, dan kan dit de slimme opmerking oproepen dat je ook 3 kunt delen door 2. Er is een preciezere definitie nodig. Door juist ook hierover met de leerlingen te praten wordt hun begrip van de wiskundige

kernwaardes helderder én ontstaat er een positief kritische houding. Bij die positieve houding ten opzichte van getallen en numerieke informatie hoort het beeld dat achter elke berekening keuzes liggen en dat daardoor het antwoord niet zomaar een objectieve waarheid is. Leerlingen kunnen deze attitude ontwikkelen door in authentieke situaties te redeneren en kritisch te kijken hoe dat toepassen van rekenen in zijn werk gaat én door de ruimte te krijgen daarover in de klas met elkaar van gedachten te kunnen wisselen.

In dit artikel is een aantal punten naar voren gekomen. Als het gaat om de keuze van een nieuwe methode zou u op de volgende punten kunnen letten:

- Wordt er aandacht besteed aan de begripvorming van de basisbewerkingen?
- Worden strategieën pas uitgebreid geoefend als de begrip voldoende ontwikkeld is?
- Zijn de aangeboden strategieën niet té getal- en gevals specifiek?
- Zijn er leerlingdoelen geformuleerd, en in welke mate dragen deze wel of niet bij aan *task-propensity*?
- Is er aandacht voor kritisch wiskundig denken?

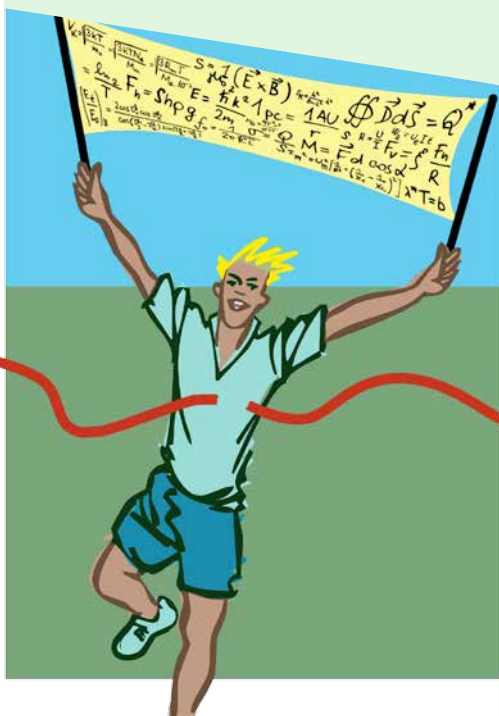
- Ondersteunt de methode de leraar die de leerlingen meer tijd wil kunnen geven als de kwartjes niet direct vallen?
- Gaat de methode over meer dan de beheersing van bepaalde soorten opgaven en procedures?
- Leren leerlingen niet-routinematige problemen oplossen? (Zie het artikel van Marc van Zanten op pagina 22).
- Is er ruimte voor meer wiskundige activiteiten zoals kritisch wiskundig denken, authentiek gebruik van je reken-wiskunde kennis en het controleren van gegevens (factchecking)?

Noten

- 1) Bruin-Muurling, G. (2010) *The development of proficiency in the fraction domain, affordances and constraints in the curriculum*. Promotieonderzoek, TU Eindhoven.
- 2) Meer over Task Propensity op de website Five Twelve Thirteen, van Dylan Kane. <https://fivetwelvethirteen.wordpress.com/2017/09/26/task-propensity-the-follow-up-task/>
- 3) Gravemeijer, K., Bruin-Muurling, G., Kraemer, J.-M., & van Stiphout, I. (2016). Shortcomings of mathematics education reform in The Netherlands: A paradigm case? *Mathematical Thinking and Learning*, 18(1), 25–44

Bewijs uit het gerijmde

Jaap van Lakerveld



Illustratie: Marjolijn Brouwer

Berekenend

Waarom heeft *berekenend* zo'n slechte connotatie
 Alsof je door berekenen het rechte pad verlaat
 Langs curves en langs krommes je eigen route gaat
 Van scherpe analyses en sluwe calculatie

De sporter die berekenend zijn opponent verslaat
 Staat in veel minder aanzien dan wie op eigen kracht
 Zijn krachten en talenten vertaalt in overmacht
 En zo zichzelf verbazend voor het hoogste gaat

Berekenend betekent op eigen voordeel uit
 Weten wat je doet om doelen te bereiken
 Weten wat er nodig is om met de winst te strijken
 En op de hoogte zijn van de omvang van de buit

Zelf denk ik dat berekenen sterk te verkiezen is
 Boven telkens merken hoe akelig verliezen is