

Ruim 50 jaar ontwikkeling reken-wiskundeonderwijs

De ontwikkeling van het reken-wiskundeonderwijs is een product van de tijd. Dat gold voor de periode kort na de tweede wereldoorlog en dat geldt op dit moment. In dit artikel geven we een overzicht van de ontwikkeling van het reken-wiskundeonderwijs tussen de jaren vijftig van de vorige eeuw en nu.

We richten ons daarbij vooral op het realistisch reken-wiskundeonderwijs, omdat dat in de afgelopen ruim 50 jaar de meest kenmerkende ontwikkeling was. We geven aan welke overwegingen en mechanismen bij het ontwikkelen hiervan een rol speelden. We laten zien hoe het realistisch reken-wiskundeonderwijs op dit moment ter discussie staat. We analyseren daarbij gebruikte argumenten en laten zien welk beeld die oproepen.

Inleiding

Het reken-wiskundeonderwijs is de afgelopen jaren onderwerp van discussie geweest. Een van de argumenten die telkens in deze discussie naar voren komt is dat de terugloop van de opbrengsten van het Nederlandse reken-wiskundeonderwijs veroorzaakt wordt door de invoering van het realistisch reken-wiskundeonderwijs. In argumenten die gewisseld worden over het realistisch reken-wiskundeonderwijs, blijkt dat uitgangspunten van dat onderwijs vaak verkeerd begrepen worden. Dat is in onze ogen reden voor verheldering; die geven wij in dit artikel met een schets van hoe het reken-wiskundeonderwijs zich vanaf kort na de Tweede Wereldoorlog ontwikkeld heeft. Het betreft een persoonlijke reconstructie, waarin we nagaan hoe ontwikkelingen vanaf de jaren vijftig van de vorige eeuw verklaard kunnen worden. We putten daarbij uit onze eigen herinneringen en uit bronnen over het realistisch reken-wiskundeonderwijs. Deze bronnen en herinneringen vulden we aan met de herinneringen en aantekeningen van Edu Wijdeveld, die lange tijd een sleutelrol vervulde in de onderwijsvernieuwingen die vanaf begin jaren 70 werden ingezet. Wij interviewden Wijdeveld eind 2018. We laten zien hoe zijn uitspraken ons hielpen bij de reconstructie van het recente verleden van het reken-wiskundeonderwijs. In dit artikel gaan we in op hoe ideeën over onderwijsvernieuwingen ontstonden die later zouden

Ronald Keijzer, Hogeschool iPabo, Amsterdam en Wil Oonk, Universiteit Utrecht

Keijzer, R. & Oonk, W. (2020). Ruim 50 jaar ontwikkeling reken-wiskundeonderwijs. *Volgens Bartjens – ontwikkeling en onderzoek*, 39(3), 47-65

leiden tot het realistische reken-wiskundeonderwijs. We beschrijven vervolgens hoe deze nieuwe ideeën werden uitgewerkt tot globale en lokale onderwijstheorieën. Daarna zoeken we in de ontwikkeling aanwijzingen voor argumenten van de ontstane tegenbeweging tegen realistisch reken-wiskundeonderwijs, die rond de eeuwwisseling ontstond. We stellen in de afsluiting vast dat de ontwikkeling van het reken-wiskundeonderwijs voort gaat en dat kritische vragen stellen bij de huidige stand van zaken daarbij nuttig is en blijft.

Dit betekent dat we in dit artikel een ordening in de tijd volgen, waarbij we grofweg telkens ingaan op perioden van ongeveer 20 jaar. Dit zijn:

- de maatschappij die vraagt om nieuw reken-wiskundeonderwijs (1945 - 1960),
- dat nieuwe onderwijs wordt ontwikkeld en krijgt vorm als realistisch reken-wiskundeonderwijs (1960 - 1980),
- het nieuw ontwikkelde onderwijs vindt ingang in vrijwel alle basisscholen (1980 - 2000),
- er ontstaat weerstand tegen realistisch reken-wiskundeonderwijs en er worden alternatieven voorgesteld (2000 - 2020).

In de beschrijving van de verschillende perioden volgen we de kern van de ontwikkeling. Dit maakt dat de beschrijvingen verschillen van periode tot periode.

1945 – 1960: De roep om nieuw wiskundeonderwijs

Spoetnik en Royaumont

Na de tweede wereldoorlog ontstond een roep om onderwijsvernieuwing. Aanvankelijk waren de discussies daarover van algemene aard, met onderwerpen als gelijke kansen voor iedereen, betere doorstromingsmogelijkheden en differentiatie. Een bijzondere gebeurtenis maakte echter dat de aandacht zich sterk ging richten op de modernisering van het wiskundeonderwijs. In 1958 lanceerde de Sovjet Unie de eerste kunstmaan, de Spoetnik. De Verenigde Staten en in hun voetspoor Europa, werden door deze voorsprong wakker geschud en zich bewust van de achterstand in onderwijs en wetenschap. De Verenigde Staten wilden op technologisch gebied een inhaalslag maken en zetten een rigoureuze vernieuwing in, ook van de wiskunde en het wiskundeonderwijs.

Cruciaal, want richtinggevend voor de vernieuwingen in Europa, waren de opbrengsten van een seminarium 'New Thinking in School Mathematics' op initiatief van de 'Organisation for European Economic Cooperation' (een voorloper van de EU) in Royaumont (Frankrijk, 1959). Het seminarium stelde zich ten doel om op basis van de modernste ideeën over het wiskundeleerplan en over opleiden van leraren en onderzoek van wiskundeonderwijs, een specificatie te geven van gewenste veranderingen en een visie op het realiseren daarvan. Onder andere de volgende elementen achtten de deelnemers wat betreft de inhoud en vormgeving van de vernieuwing onmisbaar:

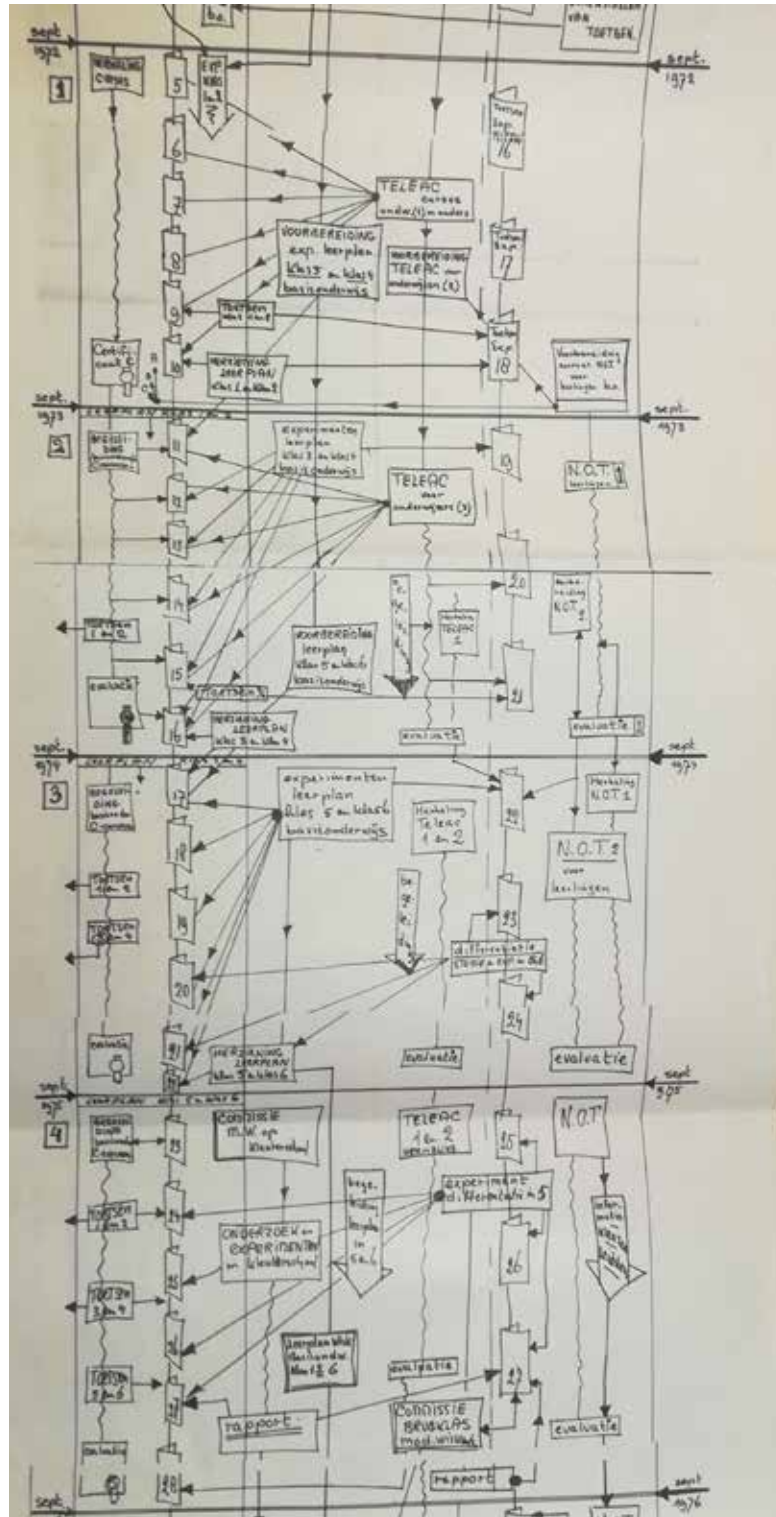
- herziening van het wiskundeonderwijs in een doorgaande ontwikkeling voor leerlingen van 5-18 jaar, 'from bottom to top' in een verticale planning, gedifferentieerd naar belangstelling, aanleg en tempo en in dienst van creatief en kritisch denken;
- die ontwikkeling moet gaan van een concrete werkelijkheid tot een abstracte structuur;
- de ontwikkeling van inzicht in die structuur van de wiskunde gaat vooraf aan een technische verdieping van zijn onderdelen;
- daarbij is een geleidelijke ontwikkeling nodig van een uniforme taal en symboliek;
- coördinatie van wiskundeonderwijs met science-vakken;
- de ontwikkeling wordt begeleid door theoretisch en praktisch onderzoek;
- leraren worden adequaat voorbereid op de nieuwe ontwikkelingen, zowel inhoudelijk als onderwijskundig;
- die voorbereiding wordt begeleid door onderzoek van teams van wiskundigen en onderwijskundigen (Wijdeveld, 1975).

Tot op de dag van vandaag zijn genoemde overwegingen en principes herkenbaar in het denken over de vernieuwing van het reken- en wiskundeonderwijs in Nederland. In Europa gingen de ontwikkelingen met betrekking tot het voortgezet onderwijs, ondanks het tegenstreven van tientallen wetenschappers echter in eerste instantie vooral in de richting van het uit de VS overgewaaid, abstracte 'New Math' (First Summer Study Group in Theoretical and Applied Mechanics Curricula, 1962; Treffers, 2005).

CMLW

In Nederland werd kort na 'Royaumont' de Commissie Modernisering Wiskunde Onderwijs geïnstalleerd (CMLW, 1961-1973)¹. Vanaf 1969 was Hans Freudenthal voorzitter van de CMLW en Edu Wijdeveld secretaris. Bij de installatie in 1961 kreeg de commissie een beperkte taak mee, namelijk het ontwikkelen van een nieuw leerplan voor de bovenbouw van het voortgezet onderwijs (vhmo), met de opdracht de leerplanontwikkeling tot stand te brengen via schoolexperimenten in nauwe relatie met de heroriëntering van leraren. In 1967 leidde een initiatief van de secretaris van de CMLW tot een subcommissie van het CMLW, waar Edu Wijdeveld, Fred Goffree en Adri Treffers deel van uitmaakten, die de vernieuwing van het rekenonderwijs op de basisschool moest organiseren en begeleiden.

► Afbeelding 1. Deel van het 10 jarenplan (Wijdeveld, 1975, p. 269)



Deze commissie ontwikkelde een 10-jarenplan plan dat voorzag in een organisatiestructuur voor de herziening van het leerplan rekenen (afbeelding 1). In zijn boekwerk over de historie van het CMLW schrijft Wijdeveld (1975) over leerplanontwikkeling en innovatie het volgende:

‘Wat onmiddellijk opvalt bij analyse van het 10-jarenplan, nu 6 jaar later (anno 1974; red.), is het logisch-constructieve karakter van het plan:

- eerst kadervorming en werkplan Pedagogische Academie (1968-1971),
- dan kadervorming en heroriëntering onderwijzers (1970-1972)
- vervolgens de successieve ontwikkeling van het leerplan bo (klas 1 en 2 -> klas 3 en 4 -> klas 5 en 6 -> revisie, in de periode 1972 - 1978, begeleid door de Pedagogische Academies, school TV en het tijdschrift (Wiskobas Bulletin)’ (p. 270)

Verder noteert Wijdeveld over het 10-jarenplan:

‘In die zin is het typisch een bureau-ontwerp, dat naast naïviteit en optimisme, getuigt van een zekere gedrevenheid, moed en overtuiging. Als indrukwekkend uitgangspunt (letterlijk en figuurlijk) voor wat al gauw een ‘beweging’ (Wiskobas) zou worden, heeft het een onschatbare waarde gehad. Als nuchter plan bekeken, was het volkomen onhaalbaar! Het geheel overziend bood het 10-jarenplan-1968 binnen de gegeven context primair een strategie, een procedure die als startpunt diende voor uitwerking in coördinerende besprekingen én in praktijk. Ten aanzien van uitgangspunten en doelstellingen, vorm en inhoud, functie en werkwijze van leerplan en leerplanontwikkeling, valt nog weinig op te merken (...). Men zou zelfs kunnen stellen, dat behoudens de terminologie, het 10-jarenplan (- sec), vrijwel onafhankelijk was van de wiskunde-inhoud. Het had een plan kunnen zijn voor modernisering van bijvoorbeeld het biologieonderwijs! Dat het des ondanks op zoveel instanties zo’n indruk maakte, ligt dan ook voornamelijk aan z’n lengte en fraaie uitvoering (voor wie het niet las) en aan zijn gedurfdheid en impliciete visie (voor wie het wél las)’ (p. 274)

Om het plan te realiseren werd een belangrijke taak toegedacht aan de docenten rekenen-wiskunde en pedagogiek van de Pedagogische Academie (vóór 1968 ‘Kweekschool voor onderwijzers’). Zowel deze groep docenten als veel leraren in het basisonderwijs vonden dat het traditionele, mechanistische rekenonderwijs aan vernieuwing toe was. Er werden vijftien regionale PA-werkgroepen georganiseerd die in eerste instantie een plan tot stand moesten brengen voor de herziening van het reken-wiskundeonderwijs voor de Pedagogische Academie. Zij zouden tegelijkertijd de heroriëntering van onderwijzers op zich nemen, die inhoudelijk gevoed moest worden door experimenteren in het lager onderwijs, te beginnen met klas 1 en 2 (nu groep 3 en 4). Later zou dit zich ontwikkelen tot een integrale benadering inclusief het onderwijs voor 4 en 5 jarigen. Ontwerpschool werd de Willem Dreesschool in Arnhem. Een belangrijk moment voor de eerste ontwikkelingen was de Wiskobas-conferentie in 1969, waar gemotiveerde reken-wiskundedocenten en pedagogen van pedagogische academies bijeen kwamen onder leiding van de CMLW-subcommissie.

1960 – 1980: De ontwikkeling van realistisch reken-wiskunde onderwijs

Wiskobas

Al spoedig bleek echter dat de CMLW voor de totale herziening van het wiskundeonderwijs te weinig middelen ter beschikking had. Het was mede te danken aan Hans Freudenthal, dat de overheid uiteindelijk akkoord ging met de oprichting van het Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (IOWO). Gedurende het bestaan van het IOWO (1971-1981) kwam het werk van Wiskobas, onderafdeling van het IOWO ten behoeve van het basisonderwijs, in een stroomversnelling. Op jaarlijkse conferenties met leraren, opleiders, begeleiders, onderzoekers, vertegenwoordigers van de inspectie en uiteraard het organiserende Wiskobasteam werd verantwoording afgelegd en input gevraagd. Het zou het begin worden van een netwerk, dat later is overgegaan in het Panama-netwerk, dat in Nederland ongekend was. In de jaren 1971 tot 1976 lag het accent vooral op exploreren en ontwikkelen:

- onderwijsontwikkeling in samenwerking met het veld met onder andere een ontwerpschool en twee volgscholen,
- kadervorming van docenten rekenen en (toen nog) pedagogiek van Pedagogische Academies, en
- heroriëntering van leraren basisonderwijs.

Van meet af aan kregen alle bij de ontwikkeling betrokken werkers in het veld het 'Wiskobas bulletin' toegestuurd, lijvige tijdschriften met daarin ontwerpwerk, theoretische onderbouwingen, uitdagende 'puzzels' en alle mogelijke andere informatie.

Adri Treffers schrijft in het eerste nummer zijn bijdrage 'Kursusjaar '71-'72 Verleden en heden van Wiskobas'². Hij toont hierin de historische ontwikkeling, maar ook de kritische sfeer die in het veld was ontstaan na de onmogelijke startperiode van vóór de oprichting van het IOWO. Treffers beantwoordt in het stuk drie veel voorkomende standpunten c.q. vragen uit het veld die het Wiskobas-team op zich af krijgt in 1971:

- 'Wij hebben in Nederland een enorme achterstand ten opzichte van onze buurlanden wat de vernieuwing van het (wiskunde)-onderwijs betreft.'
- 'Het wordt tijd, dat Wiskobas een leerplan voor wiskundeonderwijs op de basisschool verstrekt, zodat we aan 't werk kunnen.'
- 'Waarom houdt Wiskobas de verspreiding van moderne wiskundemethoden tegen?' (Treffers, 1971, p. 13)

In de antwoorden op deze vragen wordt onder andere duidelijk dat vertaalde, buitenlandse methoden in die tijd hun invloed begonnen te krijgen en hoe het Wiskobasteam eerst een eigen visie wilde ontwikkelen. Wijdeveld zegt daarover eind 2018:

'Er waren zeker buitenlandse ontwikkelingen die hun invloed hebben gehad, zowel in het voortgezet onderwijs als in de Wiskobasbeweging. Maar later is dat pad verlaten en hebben we een eigen Nederlandse ontwikkeling tot stand gebracht waarvoor ook in het buitenland belangstelling ontstond. Die typische Nederlandse invulling karakteriseerde eigenlijk de wiskunde die ook die invulling aangaf: wiskunde als menselijke activiteit en het centraal stellen van het mathematiseringsproces. Dat was de kern van de Nederlandse benadering.'

Behalve de continue en uitgebreide verslaggeving van de onderwijsontwikkeling in de Wiskobas Bulletins (1971 – 1980), verschijnen vanaf 1975 tot 1980 elf leerplandelen, die mogelijke invulling geven voor nieuwe leerplannen. Het eerste deel, 'De kiekkast van Wiskobas' (Treffers, 1975), beschrijft 'uitgangspunten en doelstellingen van het aanvangs- en vervolgonderwijs in de wiskunde'. Volgens de overtuiging van Wiskobas dient wiskunde te worden opgevat als 'activiteit, die geworteld is in de betekenisvolle realiteit van het kind' (p. 10). De kerngedachte van de acht uitgangspunten wordt omschreven als de essentie van het wiskundeonderwijs die erin bestaat, '(...) dat leerlingen actief en gedifferentieerd werken binnen een verticaal gepland onderwijs, waarin het structuurkarakter, het taalaspect, de toepasbaarheid, de dynamiek en de specifieke benaderingswijze van de wiskunde tot uitdrukking komen.' (p. 29).

Leerplandeel 2 (Wiskobasteam, 1975) met de titel 'Overzicht van wiskundeonderwijs op de basisschool. Een model voor een schoolwerkplan', beschrijft 35 'Taferelen' voor onderbouw, middenbouw en bovenbouw met de volgende leerstofgebieden:

- onderbouw: ordenen (tellen), bewerken, vergelijken (aantallen), vergelijken-maateenheid-samenstellen-techniek, construeren (bouwen), analyseren (lokalisieren);
- midden- en bovenbouw: rekenen, meten, meetkunde, waarschijnlijkheid en statistiek, relaties en functies, taal en logica.

De door Wiskobas ontwikkelde 'Taferelen' staan in het teken van betekenisvolle contexten, zoals het project 'Waterland' voor de onderbouw, 'Sproeteldam' voor de middenbouw en 'Kijk op Kans' voor de bovenbouw.

De inhoud van de leerstofgebieden zijn herkenbaar in huidige voorstellen over de vernieuwing van het reken- en wiskundeonderwijs (Curriculum.nu, 2019). Dat wordt onder andere duidelijk uit sleutelwoorden die toen gebruikt werden, maar ook nu gebezigd worden, zoals niet-lineaire verbanden, coördinaten op de bol, statistiek, onderzoek doen, waarschijnlijkheid bepalen en als... dan-, analogie- en symmetriedeneringen.

In het ontwikkelwerk van Wiskobas worden gaandeweg de accenten in de curriculumontwikkeling verplaatst naar implementatie. In 1977 gebeurde dit aan de hand van Leerplandeel 7 over oppervlakte (Wiskobasteam, 1977). Een belangrijke conclusie van de besprekingen was dat het samenstellen van een leergang (oppervlakte) succesvol kon worden, mits aan een aantal voorwaarden zou zijn voldaan ten aanzien van de kwaliteit van de deelnemende scholen, zoals deskundigheid (heroriëntering), materialen (leerplanpublicaties), deskundige begeleiding en motivatie.

Toen werd ook al gewezen op het belang van een (reken-)coördinator. 'Voor het welslagen van het constructiewerk zal het in ieder geval noodzakelijk zijn dat een coördinator binnen het schoolteam aanwezig is die zowel organisatorisch als vakinhoudelijk in staat is de bezigheden te overzien en te ondersteunen.' (Wiskobasteam, 1977, p. 73)

Met de vernieuwingsimpulsen van 'Royaumont' en de CMLW, kwamen in 1970 ook in Nederland de eerste wiskundig georiënteerde reken-wiskundemethoden op de markt. Het waren grotendeels op buitenlandse methoden geënte uitgaven, door het Wiskobasteam getypeerd in drie categorieën:

- de aritmetische richting, met een formeel wiskundige aanpak met onder andere de verzamelingenleer (Eicholz, et al., Elementair Wiskundig Rekenen, 1970; invloed New Math VS);
- de structurele richting, met het accent op wiskundige structuren en onderwerpen als logica, talstelsels, relaties en waarschijnlijkheid;
- de empirische richting, gekarakteriseerd door het activeren van leerlingen vanuit eigen ervaringen, met veel aandacht voor de didactiek (Brinkman, Van Achter, De Jong, Van Loon, & Nieland, Getal in Beeld, 1974; een mix van de structuralistische richting - invloed Frankrijk³ - en de empirische richting - invloed Engeland⁴).

► Afbeelding 2. Taltaal, rekenboek groep 7, p. 45

Na een uur fietsen kijkt de gele truidrager op zijn kilometerteller.

032.6

Hij heeft 32,6 km gefietst.

32,6 op de abacus

H T E t

dat kun je zo noteren

3T, 2E en 6t
 $30 + 2 + \frac{6}{10} = 32,6$
 $30 + 2 + 0,6 = 32,6$

1. Zet de volgende kilometerstanden op de abacus. Noteer de standen vervolgens op drie manieren.

a **015.4** b **007.9** c **000.8** d **710.5** e **723.0**

2. Schrijf de kilometerstanden uit som 1 in volgorde op. Van klein naar groot.

Drie nieuwe fietsen en drie kilometertellers. Niet bij elke kilometerteller staan de eenheden op dezelfde plaats. Kijk maar.

045.79 van Nicolette **035.7** van Adri **00034.8** van Arwin

3.

a. Wie van deze drie heeft al het meest op zijn nieuwe fiets gereden? En wie het minst?

b. Noteer de standen van de kilometertellers uit som 1 en som 3 – na 0,1 kilometer – na 1 kilometer – na 10 kilometer.

4. Noteer de standen van de kilometertellers uit som 1 en som 3 na 0,5 kilometer na 5 kilometer na 50 kilometer

45

In 1976 verscheen de methode 'Taltaal', die door de Wiskobasbeweging werd omarmd als eerste realistische rekenmethode (Postema, Kuipers, & Haverkort, 1976). De methode had diverse kenmerken van de realistische stroming, zoals gedifferentieerd, verticaal gepland, en wiskundig rijk onderwijs, maar ook kenmerken van de drie hiervoor genoemde stromingen, alsmede van de toen nog heersende, zogenaamde mechanistische methoden (De Jong, 1986, p. 210). De organisatie van het rekenonderwijs in de methode, met een groot aandeel voor 'interactietijd' in de les, bleek, ondanks de aanwijzingen in de handleidingen voor de leraar en voor veel schoolteams echter niet haalbaar. Anno 1985 waren er in Nederland dertien methoden, zeven mechanistische methoden en zes realistische methoden. De twee stromingen hadden toen een ongeveer gelijk marktaandeel (De Jong, 1986, p. 232). In 2004 is het aandeel realistische methoden toegenomen tot vrijwel 100% (KNAW, 2009, p. 13).

Freudenthal

Hiervoor schreven we al over de cruciale rol van Freudenthal in de ontwikkelingen.

We gaan na wat de drijfveren van Hans Freudenthal waren om zich zo met overgave in te zetten voor wiskundeonderwijs, juist ook voor jongere kinderen. De kern van Freudenthals ideeën is dat wiskunde een menselijke activiteit is en daarbij bepleit hij het 'kijken naar kinderen'. Freudenthals ideeën over wiskundeonderwijs zijn voor een deel ontstaan in de tweede wereldoorlog, toen hij niet langer mocht werken als hoogleraar wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam. Hij heeft toen onder andere zijn eigen kinderen geholpen bij het leren van wiskunde (Freudenthal, 1987a).

Najaar 2018 zegt Edu Wijdeveld over Freudenthals affiniteit met onderwijs:

'Die stamt al uit de dertiger jaren, toen hij discussies voerde met de bekende mevrouw Ehrenfest-Afanassjewa, die een totaal nieuwe benadering voorstond van de beginjaren van het voortgezet onderwijs. Ook in de jaren daarna heeft hij zich intensief bemoeid met wat in de vijftiger jaren de wiskunde werkgroep van de WVO was en in later jaren met de CMLW. Hij was ook degene die zei dat de ontwikkeling niet moest beginnen met de bovenbouw van het voortgezet onderwijs, maar van onderop. Vandaar dat hij ook binnen de CMLW mede pleitbezorger was voor het idee om bij het basisonderwijs te beginnen.'

In het werk van Freudenthal is verder zichtbaar dat hij is beïnvloed door zijn vrouw Susanna Johanna Catherina Freudenthal-Lutter; zij was actief in het Jenaplanonderwijs en daarmee pleitbezorger van werken in heterogene groepen. Dat beïnvloedde het nieuwe reken-wiskundeonderwijs dat in de maak was. De Freudenthals kenden daarnaast het echtpaar Van Hiele goed; die werkten aan een niveaustheorie van wiskunde. Freudenthal schrijft daarover: 'I owe the conception of the level structure of learning processes to my collaboration with the Van Hieles, a couple who embodied, as it were, the marriage of theory and practice' (1991, p. 96). In het realistisch reken-wiskundeonderwijs vinden we invloeden daarvan terug in de concepten contextniveau, modelniveau en formeel niveau.

Hoewel internationaal befaamd zuiver wiskundige, was hij als hoogleraar-directeur van het IOWO sterk gericht op het leren en onderwijzen van wiskunde. Bekend zijn bijvoorbeeld zijn observaties van en gesprekken met kinderen, zoals met zijn kleinzoon Bastiaan (Freudenthal, 1975). Verder observeerde Freudenthal pabostudenten, onder andere op de 'experimenteerpab' van het Wiskobasteam, de Pedagogische Academie in Gorkum.

Edu Wijdeveld vertelt najaar 2018 hoe intensief Freudenthal betrokken was bij het werk van de ontwikkelgroep Wiskobas.

'Zelf noemde hij zich de grootvader van Wiskobas. Dat gaf aan hoe hij zich binnen de kring van jeugdige creatievelingen voelde. Maar in zijn gedrag was hij gewoon een van de medewerkers. Buitengewoon gerespecteerd natuurlijk om de bijzonder creatieve ideeën die hij wist in te brengen en door zijn theoretische beschouwingen, die de ontwikkelaars zeer aanspraken.'

Freudenthals niet aflatende schrijffactiviteit blijkt uit de nalatenschap van een groot aantal publicaties, van regelmatig geciteerde wetenschappelijke artikelen en boeken tot columns in het Wiskobas Bulletin en de NRC. Zo werd ook de theorie van de zich ontwikkelende visie op het conceptuele reken-wiskundeonderwijs die de Wiskobasgroep voorstond in eerste instantie door hem vastgelegd. We noemen twee werken die cruciaal waren voor die theorievorming. In de eerste plaats is dat het boek 'De didactische fenomenologie van wiskundige structuren' (Freudenthal, 1984a). Freudenthal legt in het voorwoord uit waarover dit boek gaat: 'Fenomenologie van wiskundige begrippen, structuren, denkbeelden betekent: ze in hun relatie tot de fenomenen te beschrijven waarvoor ze zijn geschapen en waartoe ze uitgebreid werden in het leerproces van de mensheid; en voor zover deze beschrijving met het leerproces van de jonge generatie te maken heeft, wordt zij didactische fenomenologie.' (p. 9). Over de achterliggende fenomenologie van het vermenigvuldigen laat Freudenthal zien hoe hij zelfkritisch zijn ideeën aanscherpt. Het is een theoretisch reflectie vanuit een eigen observatie in wat hij noemt een 'traditionele 3^e klas basisschool':

'(...) In dogmatische vooroordelen t.a.v. het verzamelingtheoretische productmodel bevangen, ben ik pas door het observeren van leerprocessen op mijn eigen ideeën attent gemaakt. Vermenigvuldiging is in eerste instantie herhaalde optelling en deze herhaalde optelling kan bijzonder doelmatig door paarverzameling in het rechthoekmodel – het verzamelingtheoretisch product – worden

gestructureerd, onder meer om aantallen als producten te berekenen. Dit model is echter ontoereikend. Ontoereikend niet in de mathematische zin (...). Wel ontoereikend in didactische zin, omdat een mathematisch voor de hand liggende structureren zich geenszins in leerprocessen – spontaan of gestimuleerd – behoeft voor te doen en, als zij zich wel voordoet, niet voldoende bewust behoeft te worden om waar nodig expliciteerbaar en beschikbaar te zijn.’ (Freudenthal, 1984a, p. 122) Het zijn gedachten en overwegingen waar onder andere Hans ter Heege, ontwikkelaar voor klas 3 en 4, zijn voordeel mee heeft gedaan (Ter Heege, 1978).

In het boek ‘Appels en peren’ (Freudenthal, 1984b) vinden we een negental opstellen. Hierin werkt Freudenthal bijvoorbeeld wiskundig-didactische principes uit, verkent hij de relatie tussen moedertaal en wiskundetaal en laat hij zien hoe belangrijk het is het wiskundig handelen van kinderen te kiezen als aangrijpingspunt voor het ontwikkelen van onderwijs.

Het boek ‘Revisiting mathematics education’ (Freudenthal, 1991) verscheen kort na het overlijden van Freudenthal. In dit werk kijkt hij terug op de theorie die ontwikkeld is. Hij schrijft hier nog eens dat het mathematiseren en wiskunde als menselijke activiteit kernpunten van de ontwikkelde theorie zijn. Door wiskunde als menselijke activiteit te zien kan volgens hem het leren van wiskunde ook meer vanzelfsprekend gebeuren. Lerenden mathematiseren hun omgeving en de rol van leraren is dat proces zodanig te ondersteunen en sturen, dat de lerende de ontwikkeling van de wiskunde als het ware doorloopt zoals het eertijds ontwikkeld werd. Freudenthal duidt dit aan als geleid heruitvinden of guided reinvention. Hier zal hij waarschijnlijk beïnvloed zijn door de pedagoog en filosoof John Dewey, die ervoor pleitte dat kinderen en volwassenen in school samenwerken om te leren hoe zich de cultuur heeft ontwikkeld door als het ware in kort bestek zelf de ontwikkelingsgang door te maken. Het opnieuw ‘uitvinden’ van de wiskunde moet in school redelijk efficiënt gebeuren en daarin zit precies de rol van de leraar.

De hiervoor genoemde publicaties vormen een belangrijke, maar slechts kleine greep uit het werk van Freudenthal. Ze geven wel een impressie van de gevarieerdheid van zijn werk, van globale onderwijstheorie die betrekking heeft op het gehele, nieuw ontwikkelde reken-wiskundeonderwijs, tot lokale theorie die zich richt op specifieke leerstofgebieden. We gaan hierna in op andere studies die in eerste instantie het theoretisch fundament vormden voor het realistisch reken-wiskundeonderwijs.

Globale- en lokale theorievorming

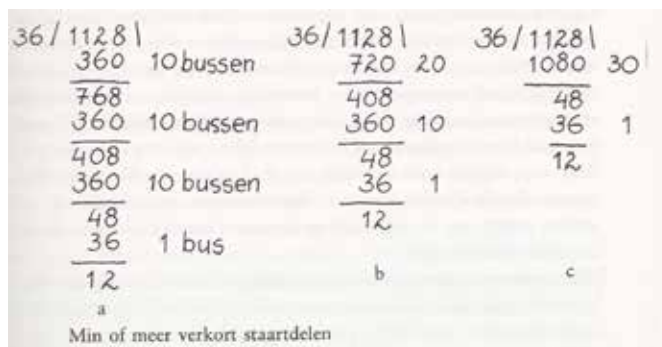
Niet alleen Freudenthal droeg bij aan algemene theorievorming rond het onderwijs dat uiteindelijk bekend zou worden als realistisch reken-wiskundeonderwijs. Bij het mathematiseren, waar Freudenthal in zijn boek uit 1991 over schrijft, maakt hij onderscheid tussen horizontaal mathematiseren en verticaal mathematiseren, iets dat eerder naar voren gebracht was door Adri Treffers in zijn proefschrift ‘Wiskobas doelgericht’ (Treffers, 1978). Zoals de titel aangeeft schrijft hij in zijn proefschrift vooral over nieuwe doelen in het door Wiskobas ontwikkelde reken-wiskundeonderwijs. Hij gaat daarbij in op de manier waarop je die doelen op een conceptuele manier kunt beschrijven. Bij horizontaal mathematiseren gaat het om het vertalen van een situatie naar de wiskunde: ‘De inspanning om het probleem te schematiseren tot een mathematische probleemstelling’ (p. 79). Bij verticaal mathematiseren gaat om het doordenken van de wiskunde zelf: ‘De vervolgactiviteiten, die betrekking hebben op de mathematische verwerking, de probleemoplossing, de generalisatie van de oplossing en de verdergaande formalisering’ (p. 79).

Deze opvattingen over het mathematiseren zien we terug in alle leerplanpublicaties, ook in de uitwerking van het cijferend rekenen volgens Wiskobas. Het leren cijferen wordt in Leerplanpublicatie 10 (Treffers, 1979) beschreven als een proces van progressieve schematisering. Daarbij wordt uitgegaan van betekenisvolle contexten, die leerlingen zelf uitnodigen tot steeds verdergaande verkorting op verschillende niveaus. In afbeelding 3 is een drietal niveaus van schematiseren bij het staartdelen weergegeven.

Het traditionele, mechanistische algoritme voor cijferen wordt door Treffers (1979) aangeduid als progressief compliceren: buiten elke context worden de verschillende rekenstappen systematisch geordend, volgens oplopende grootte van getallen.

Wat betreft het gebruik van de rekenmachine wordt in Leerplandeel 10 gewezen op de mogelijkheid van inzichtelijk en speels oefenen. Ook de latere Ontwikkelgroep ZRM geeft voorbeelden en

► Afbeelding 3. 1128 supporters. Hoeveel bussen met 36 plaatsen? (Treffers, 1979, p. 13)



aanwijzingen in die richting, maar waarschuwt wel voor het zonder rekenkennis gebruiken van de zakrekenmachine (Van den Brink, Ter Heege, Struik, Sweers, & Vermeulen, 1988). Twintig jaar later zou Kees Buijs in zijn studie over leren vermenigvuldigen met meercijferige getallen (2008) wijzen op het belang van efficiënte, notatie-ondersteunde hoofdrekenstrategieën, mede ten behoeve van het toenemend gebruik van (reken-)machines.

Het Wiskobasteam vond, als eerder genoemd, de heroriëntering van leraren cruciaal voor de implementatie van de nieuwe ideeën. Edu Wijdeveld (interview, december 2018) gaf aan dat de lerarenopleiding gezien werd als belangrijk disseminatiekanaal. Van meet af aan werden de Pedagogische Academies in de ontwikkeling betrokken, getuige onder andere de leerstofthema's of zgn. 'blokken' die voor de PA werden ontwikkeld: 'Grafieken', 'Meten', 'Verzamelingen', 'Operaties in N' en 'De Teerling is geworpen' (Goffree & Jansen, 1972). Dit ontwikkelwerk gebeurde uitdrukkelijk in samenwerking met opleiders uit de zgn. 'taakgroep Wiskobas'. En met deze aanpak kwam ook het leren en onderwijzen van (aanstaande) leraren als studie- en ontwikkelingsobject in beeld. Het was Fred Goffree, in de PA-wereld toen al bekend door zijn boek 'Rekenen en Didactiek' (Goffree, Hiddink, & Dijkshoorn, 1966), die het nieuwe leren en onderwijzen 'in de geest van Wiskobas' uitwerkte (Goffree, 1979). Onderliggend idee hierin is dat aanstaande leraren greep krijgen op de didactiek door te reflecteren op wiskundig handelen op eigen niveau en dat zoveel mogelijk vanuit aan de praktijk van de basisschool gerelateerde problemen en thema's. Een redelijk bekend voorbeeld hiervan is het zgn. Land van Okt, waarin aanstaande leraren op eigen niveau leren tellen en rekenen in het achttallige stelsel om te ervaren wat leerlingen ervaren als zij het tientallige stelsel verkennen. In een model 'de mathematisch-didactische oriënteringsbasis', geeft Goffree 'het beeld van een schema, waarin wiskunde en didactiekonderwijs genuanceerd en volledig beschreven kon worden' (1979, p. 313). In de uitgebreide beschrijving van voorgeschiedenis, ontwerp, experimenten en implementatie⁵ is inderdaad de geest van Wiskobas herkenbaar, met als extra dimensie de ontwikkeling van een opleidingsdidactiek van een zoveel mogelijk geïntegreerde aanpak van wiskunde en didactiek⁶.

Twee andere studies die betrekking hebben op globale theorievorming zijn van recenter datum. Dat is allereerst het proefschrift van Koeno Gravemeijer, 'Developing Realistisch Mathematics Education' (Gravemeijer, 1994), waarin hij laat zien dat het ontwikkelen van leergangen die passen bij de nieuwe ideeën rond het reken-wiskundeonderwijs om een specifieke cyclische werkwijze vraagt, die hij aanduidde als ontwikkelingsonderzoek en dat veel trekken heeft van ontwerponderzoek of design research dat inmiddels een courante onderzoeksmethode is geworden (Bakker, 2018). 'Realistisch Mathematics Education' (RME) kreeg daarmee ook internationaal steeds meer aandacht (Streefland, 1991), ook in termen van lokale theorievorming (Gravemeijer, 2004). Marja van den Heuvel-Panhuizen deed fundamenteel onderzoek naar bij het realistisch reken-wiskundeonderwijs passende toetsvormen (Van den Heuvel-Panhuizen, 1996). De uitdaging die zij aanging was toetsing zo te ontwikkelen dat die een werkelijke bijdrage aan het leren van leerlingen zou leveren. Belangrijke conclusies waren dat door het werken met steun biedende contexten en modellen een gelaagdheid in opgaven kon worden aangebracht, waardoor aangrijpingspunten konden ontstaan voor verschillende oplossingsstrategieën alsook oplossingen op verschillende niveaus.

Vanuit de kringen van begeleiders werd theoretische inbreng toegevoegd door onder andere Jo Nelissen met de studie 'Kinderen leren wiskunde' (1987) en Dolly van Eerde met 'Kwantiwijzer'

(1996). Het proefschrift van Nelissen handelt over constructie en reflectie in het basisonderwijs, met de voorwaardelijke rol van taal en interactie. Het proefschrift van Van Eerde beschrijft een studie over de ontwikkeling van een systematiek van handelingsgerichte diagnostiek voor het reken-wiskundeonderwijs.

In de studies die hiervoor de revue passeerden ging het vooral om globale onderwijstheorie. Het Wiskobasteam was vanzelfsprekend ook gericht op het ontwikkelen van lokale onderwijstheorieën, theorie die betrekking heeft op specifieke leerstofgebieden. Deze lokale onderwijstheorieën droegen veel bij aan de ontwikkeling van het nieuwe onderwijs dat de ontwikkelaars voor ogen stond. Ze ondersteunden de voortgang in het denken over onderwijsinhouden en boden ook gereedschap om naar buiten verantwoording af te leggen. Niet in de laatste plaats waren het de fundamenten waarmee methodeschrijvers aan de slag konden gaan. We noemen hierna kort enkele van die studies. Zo richtte Jan van den Brink zich op de onderbouw met zijn ontwikkelingsonderzoek dat leidde tot het proefschrift 'Realistisch onderwijs aan jonge kinderen'. Kenmerkend voor zijn werk is onder andere zijn uitwerking van het fenomeen 'zich realiseren' in een viertal te onderscheiden leerling-activiteiten, namelijk:

- zich een voorstelling maakt naar aanleiding van een gegeven taaluiting (woord, gebaar, opdracht),
- zich daadwerkelijk de uitvoering van een voorstelling, idee of plan realiseert,
- zich een idee als eigendom maakt om het (ooit) op eigen initiatief toe te kunnen passen,
- 'zichzelf realiseert' in de betekenis van individuele mogelijkheden aanboren en tot ontwikkeling brengen' (Van den Brink, 1989, p. 42).

Ook in de huidige methoden zijn nog voorbeelden te vinden van de uitwerking van deze gedachten, zoals de context van in- en uitstappen uit de bus voor het leren optellen en aftrekken met het didactische motto: 'praatje, plaatje, pijlentaal, som'.

Hans ter Heege, de Wiskobasontwerper voor de middenbouw, richtte zich vooral op het ontwikkelen van ideeën voor een leergang vermenigvuldigen. Hij bedacht hoe informele strategieën aangeprezen kunnen worden in het onderwijs (Ter Heege, 1978). Leen Streefland (1988) promoveerde op het onderwerp 'Realistisch breukonderwijs'. De leergang die hij ontwikkelde kenmerkt zich door het denken in niveaus van leerprocessen, van exploreren van situaties tot schematisering, modelvorming en formaliseren. Ed de Moor (1999) beschreef de historie van het meetkundeonderwijs van 'Vormleer' tot realistisch meetkundeonderwijs.

1980 - 2000: Het nieuw ontwikkelde onderwijs vindt ingang

De globale en lokale theorieën werden niet alleen vastgelegd in proefschriften. Het was vooral ook door het Wiskobasbulletin dat de ideeën van Wiskobas verspreid werden in het onderwijsveld. Het tijdschrift fungeerde daarmee in feite als proeftuin voor de globale en lokale theorieën.

In de jaren 1989-1996 werden de vier delen gepubliceerd van 'Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool' (Treffers, De Moor, & Feijs, Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. I. Overzicht einddoelen, 1989). Kort daarna volgde de uitwerking daarvan op de gebieden van de basisvaardigheden en cijferen (Treffers & De Moor, 1990), Breuken (Treffers, Streefland, & De Moor, 1994) en Kommagetallen (Treffers, Streefland, & De Moor, 1996). In 1998 ging op initiatief van het Ministerie van OC&W het TAL-project van start, een verdere, gedetailleerde uitwerking in leerlijnen van de eerder vastgestelde kerndoelen (TAL-team, 1998, 2000).

Bij Wiskobas was er aanvankelijk weinig aandacht voor grote verschillen tussen leerlingen. Er was wel behoefte aan meer kennis en inzicht over hoe om te gaan met zwakke rekenaars. Later werd er een ontwikkelingsgroep geformeerd die zich richtte op het reken-wiskunde onderwijs voor het speciaal onderwijs (Boswinkel & Moerlands, 2004) en is in die behoefte voorzien door het protocol ERWD (Van Groenestijn, Borghouts, & Janssen, 2011).

Lerarenopleiding

Hiervoor memoreerden we al het grote belang dat het Wiskobasteam hechtte aan de opleiding van leraren alsook de visie die Fred Goffree uitwerkte in zijn proefschrift 'Leren onderwijzen met Wiskobas' en later in de serie Wiskunde & Didactiek (Goffree, 1982 e.v.). De serie was in de jaren tachtig en negentig van de vorige eeuw van grote invloed op het opleidingsonderwijs. Gaandeweg

ontstond er behoefte 'de praktijk' meer invloed te geven. In 1987 startte de vakgroep OW&OC in opdracht van het ministerie van Onderwijs en Wetenschappen het project 'Nieuwe media in nascholing rekenen-wiskunde' (Van Galen, et al., 1991). Leraren basisonderwijs, opleiders en begeleiders maakten kennis met de impact van 'narratives' van reken-wiskundeonderwijs, door de op beeldplaat vastgelegde verhalen, zoals de tellende kleuter Rikash, de ouderavond over het leren delen in groep 5 en de interviews over tafelstrategieën van Paul en Necmiye uit groep 5. De hiervoor genoemde Proeve voor de basisschool, de maatschappelijke wens voor een kwaliteitskader (Inspectie van het Onderwijs, 1989) en signalen uit internationaal onderzoek (bijvoorbeeld Tough, 1971; Schön, 1983, 1987; Paulos, 1988) waren aanleiding voor de NVORWO om in 1991 een veldaanvraag bij de SLO te doen voor de totstandkoming een 'Proeve van een nationaal Programma rekenen-wiskunde & didactiek' (Goffree & Dolk, 1995). In de Proeve is een opleidingsconcept uitgewerkt in de vorm van drie pijlers, namelijk dat de opleiding staat voor een socio-constructivistische visie op kennisverwerving, dat zij reflectie ziet als de drijvende kracht achter de professionalisering van leraren en dat zij het concept praktijkkennis interpreteert als een vorm van narratief weten. Kern van de studie vormen achttien standaards voor wiskunde & didactiek met 130 daarvan afgeleide subdoelen. De twee eerste standaards weerspiegelen de onderliggende visie: 'Het onderwijs in wiskunde & didactiek vertoont kenmerken van realistisch reken-wiskunde onderwijs' (p.72) en 'De leerstof van rekenen-wiskunde wordt op eigen niveau bestudeerd en daarbij in een didactisch perspectief geplaatst' (p.73). Een gedachte die in de Proeve werd uitgewerkt en later in de ontwikkeling een belangrijke rol zou gaan spelen, was het denken in termen van een leeromgeving in plaats van louter het denken aan leerstofprogramma's. Wat betreft het leren van studenten stond daarbij het 'narratieve weten' centraal. In het project MILE, dat in 1996 startte op alle lerarenopleidingen basisonderwijs, werd dat idee verder uitgewerkt (Dolk, Faes, Goffree, Hermsen, & Oonk, 1996; Goffree & Oonk, 2001). Opnamen van de 'volle praktijk', inclusief wekelang reken-wiskundeonderwijs, overleg van (duo-)leraren, begeleiders, een ouderavond en meer vormden samen met een zoekmachine de multimediale kern van de leeromgeving. Verwerven van praktijkkennis door studenten en het leren onderzoeken van de praktijk waren de doelen van MILE. De multimediale leeromgeving bleek vooral succesvol als professionaliseringsinstrument voor opleiders. Verder inspireerde MILE tot onderzoek naar de theorie-praktijk relatie voor de opleiding (Oonk, 2009; Keijzer, 2013). Onder andere werd de cruciale rol van de opleider bevestigd. Het gebruik van vakjargon, beschouwd als een samenhangende verzameling kernbegrippen die een lokale theorie representeert, wordt vooral op een hoger niveau gebracht als studenten reflecteren op reële praktijksituaties onder de interactieve leiding van de opleider. Op die manier kunnen studenten hun praktijkkennis verrijken met theorie en kan de kloof tussen theorie en praktijk worden vermeden (Freudenthal, 1987b, p. 14), vooral ook omdat in die kennis alle soorten 'kennis voor de leraar' (Ball, Thames, & Phelps, 2008) zijn verweven. Studenten leren concepten, ideeën en opvattingen gaandeweg generaliseren en objectiveren, niet alleen omdat ze betekenisvol zijn geworteld in de praktijkverhalen, maar ook omdat de verhalen hen in staat stellen zo nodig betekenissen van objecten op te roepen (Oonk, Verloop, & Gravemeijer, 2015, p. 563). Onder leiding van de opleider leren ze (her)ontdekken hoe mathematische denk- en leerprocessen verlopen en hoe ze daarbij leerlingen kunnen begeleiden en stimuleren tot niveauverhoging. De eigen gecijferdheid of wiskundige geletterdheid (Paulos, 1988; Treffers, 1990), wordt daarbij zoveel mogelijk gedurende de hele opleiding in een didactisch perspectief geplaatst van een zich in niveaus ontwikkelende professionele gecijferdheid (Oonk, Van Zanten, & Keijzer, 2007; Keijzer, Van Doornik-Beemer, & Oonk, 2017). In de Kennisbasis Wiskunde voor de Pabo (Van Zanten, Barth, Faarts, Van Gool, & Keijzer, 2009) zijn de landelijke eisen neergelegd die worden gesteld aan de vak- en vakdidactische kennis van de (aanstaande) leraar basisonderwijs.

Onderwijspraktijk

Wiskobas heeft zich, in ieder geval aanvankelijk, niet sterk gericht op het omgaan met verschillen tussen leerlingen. Dat is wel waar veel leraren tegenaan liepen, toen ze met materialen die voortkwamen uit het werk van Wiskobas aan de slag gingen. Die materialen werden vanaf de jaren 80 geïmplementeerd in de eerste serie realistische reken-wiskundemethoden. Implementatievragen rond die methoden, en in het bijzonder vragen van leraren en scholen rond het omgaan met verschillen tussen leerlingen, kwamen vooral terecht bij onderwijsadviseurs. Die bedachten met en voor scholen en leraren hoe het onderwijs met de nieuwe methoden het best georganiseerd kon worden en probeerden zo oplossingen te vinden voor hulp aan de zwakste rekenaars (zie bijvoor-

beeld Keijzer, 2013). Bij het individuele werken, dat gebruikelijk was bij mechanistische methodes als 'Naar Zelfstandig Rekenen' en 'Naar aanleg en Tempo', waren de verschillen ook groot. Het ging daarbij om kinderen die al veel verder of veel minder ver gevorderd waren in het rekenboek dan anderen. In onderwijs waarin ieder zelfstandig werkt, valt dit tempoverschil goed te organiseren. De verschillen tussen kinderen werden bij het werken met de nieuwe methoden nadrukkelijker zichtbaar, omdat deze methoden zich niet als traditionele methodes richtten op het louter individualiseren van het onderwijs, maar ook op het stimuleren van betekenisvolle interacties tussen leerlingen waarin deze rekenaanpakken uitwisselen (Treffers, De Moor, & Feijs, 1989). Vanaf rond de eeuwwisseling werden de zwakke rekenaars, waarvoor rekenen-wiskunde werkelijk een obstakel is, aangeduid als leerlingen met dyscalculie (Van Luit & Ruijsseenaars, 2004). Over welke leerlingen het hierbij gaat is veel discussie. Kernvraag in deze discussie was en is nog steeds: gaat het bij deze leerlingen om leerlingen met een specifieke stoornis of gaat het gewoon om heel zwakke rekenaars? Het protocol ERWD werd ontwikkeld om daarvoor een uitspraak te doen (Van Groenestijn, Borghouts, & Janssen, 2011). Dat doet het protocol echter niet duidelijk. Kinderen met dyscalculie worden in het protocol beschreven als kinderen die ondanks optimaal reken-wiskundeonderwijs niet verder komen in het leren van rekenen-wiskunde. Het protocol geeft leraren wel handvaten over hoe met deze leerlingen om te gaan. Daarvoor zijn in het protocol het handelingsmodel en het drieslagmodel opgenomen. Het handelingsmodel beschrijft niveaus van handelen en het drieslagmodel beschrijft de verbinding tussen context, oplossing en bewerking. Het gaat hier feitelijk om sterk vereenvoudigde modellen die zijn afgeleid van ideeën binnen het realistisch reken-wiskundeonderwijs (Redactie Rekenen-wiskunde: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 2011). Onderwijsadviseurs speelden een belangrijke rol bij de scholing van leraren die rond dit protocol ontwikkeld is en maakten aldus dat het handelingsmodel en het drieslagmodel ingang vonden in het basisonderwijs.

2000 – heden: Weerstand tegen realistisch reken-wiskundeonderwijs

Tegengeluiden

Rond de eeuwwisseling ontwikkelde zich een oppositie tegen het nieuw ontwikkelde realistische reken-wiskundeonderwijs. Kernargument tegen het realistisch reken-wiskundeonderwijs was dat het inefficiënt is en met name zwakke rekenaars tekort doet, omdat die in de war raken van contexten en verschillende aanpakken (Van de Craats, 2007; Schmeier, 2017; Van Luit, 2019). Een belangrijke aanleiding voor deze beweging waren tegenvallende onderwijsopbrengsten van het Nederlandse reken-wiskundeonderwijs, zoals bijvoorbeeld vastgesteld werd in de PPON-peilingen van het Cito, en de internationaal vergelijkende onderzoeken PISA en TIMSS. Beide lieten een kleine maar significante terugloop zien in de onderwijsopbrengsten voor rekenen-wiskunde. Uit de PPON-peilingen bleek dat leerlingen goed scoorden op onderdelen waarop het realistisch reken-wiskundeonderwijs zich expliciet richtte, zoals het schattend rekenen en het eigenschapsrekenen, terwijl er een terugloop aan opbrengsten was bij bewerkingen, waaronder het cijferen (Kordes, Bolsinova, Limpens, & Stolwijk, 2013; Van der Schoot, 2008; Meelissen & Punter, 2016). Met deze opbrengstgegevens in de hand beweerden tegenstanders van het realistische reken-wiskundeonderwijs dat het vormgeven van onderwijs dat is gebaseerd op deze visie de oorzaak vormt voor de teruggang. Een commissie van de KNAW kreeg vervolgens als opdracht om na te gaan of er een verband was tussen visie op het reken-wiskundeonderwijs en de onderwijsopbrengsten (KNAW, 2009). Deze commissie stelde vast dat niet de visie op het reken-wiskundeonderwijs bepalend is voor de opbrengst van het onderwijs, maar de kwaliteit van de leraar. Ze concludeerde anderszins vast dat leerlijnen niet doorlopen van basisonderwijs naar voortgezet onderwijs. Dit leidde tot vaststelling van referentieniveaus voor het rekenen op 12, 16 en 18-jarige leeftijd (Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen, 2008). Het KNAW-rapport rond het reken-wiskundeonderwijs bracht de gemoeiden niet tot bedaren. Er werden en worden verschillende argumenten geformuleerd tegen het realistisch reken-wiskundeonderwijs. Daarvan zullen wij er hier onder enkele noemen en deze argumenten telkens voorzien van enkele kanttekeningen. Dit kritisch doornemen van argumenten tegen realistisch reken-wiskundeonderwijs werd eerder gedaan door Marja van den Heuvel-Panhuizen in haar oratie bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar didactiek van de wiskunde (Van den Heuvel-Panhuizen, 2009). Zij stelt dat de volgende zaken die beweerd worden over het realistisch reken-wiskundeonderwijs niet waar zijn:

- bij realistisch rekenonderwijs wordt niet geoefend,
- bij realistisch rekenonderwijs is het cijferen afgeschaft,
- bij realistisch rekenonderwijs gaat het voornamelijk om het maken van verhaaltjessommen,
- realistisch rekenonderwijs betekent zoveel mogelijk verschillende strategieën aanleren,
- alle realistische lesboeken zijn slecht,
- de gemiddelde leerling die groep 8 verlaat kan niet rekenen,
- men vraagt zich piekerend af waarom het onderwijs in Nederland is vernieuwd en suggereert daarbij dat er sprake is van een soort nationale didactische dwaling.

We beschouwen hier ook nog enkele andere argumenten die dikwijls tegen het realistisch reken-wiskundeonderwijs gebruikt worden (Keijzer & Veldhuis, 2019; Hoogland, et al., 2011).

Argument 1. Realistisch reken-wiskundeonderwijs is verantwoordelijk voor de terugloop in onderwijsopbrengsten voor reken-wiskundeonderwijs.

Bij de terugloop gaat het in de discussie feitelijk om twee zaken, namelijk de neergaande ranking van Nederland ten opzichte van andere landen en de werkelijke terugloop van de opbrengsten. Begin jaren 90 zijn in korte tijd op vrijwel alle scholen methoden geïntroduceerd die gestoeld waren op ideeën van het realistisch reken-wiskundeonderwijs (Van Weerden & Hiddink, 2013). Bij genoemde vergelijkende peilingen gaat het om een zeer geleidelijke terugloop. Het is zeer onwaarschijnlijk dat een dergelijke geleidelijke terugloop veroorzaakt wordt door het op één moment invoeren van de nieuwe methoden. Als de terugloop de oorzaak zou zijn van de (vrij plotselinge) introductie van realistische methoden, zou men eerder verwachten dat de terugval juist voor de eeuwwisseling zou hebben plaatsgevonden om vervolgens te stabiliseren.

De ontwikkeling van de ranking van Nederland in internationaal vergelijkende studies wordt door deze geleidelijke teruggang bepaald, maar voor een ander deel door gerichte investeringen in het onderwijs in andere landen. In Nederland wordt in verhouding tot vergelijkbare landen weinig geïnvesteerd in het onderwijs. Wel kende Nederland tussen 2008 en 2011 een investering in het reken-wiskundeonderwijs in de vorm van rekenverbetertrajecten. Daaraan nam een aanzienlijk aantal scholen deel. De materialen, in de vorm van zgn. Kwaliteitskaarten, werden gelabeld als 'opbrengstgericht werken' en kwamen op vrijwel alle scholen terecht. Aanvankelijk bleek dat de rekenverbetertrajecten tot hogere opbrengsten leidden (De Boer, 2012). Op de langere termijn bleken deze opbrengsten echter vrijwel volledig verdwenen (Van Zanten, Van Graft, & Van Leeuwen, 2017). De didactische aanpak die in de rekenverbetertrajecten werd aanbevolen, kende elementen uit het realistisch reken-wiskundeonderwijs maar nadrukkelijk ook uit meer traditionele aanpakken (Gelderblom, 2009). In de periode dat scholen overgingen op het opbrengstgericht werken daalde de opbrengst harder dan in de periode ervoor (Meelissen & Punter, 2016).

Argument 2. Al die taal in het rekenonderwijs maakt het onderwijs voor zwakke taalleerders extra moeilijk.

Tekstopgaven in het reken-wiskundeonderwijs zijn inderdaad moeilijk voor kinderen waarvoor de taal een barrière vormt bij het leren (Hickendorff & Jansen, 2009). Nadere analyse van deze problematiek leert dat deze problemen zich vooral voordoen omdat de taal in reken-wiskundeopgaven geen of nauwelijks redundantie kent (Van Eerde, 2009). In tegenstelling tot wat vaak gedacht wordt, blijkt gerichte, talige ondersteuning aan taalzwakke leerlingen in de reken-wiskunde succesvol te zijn (Smit, 2013).

Argument 3. Kinderen moeten niet worden opgeleid tot jonge wiskundigen, maar moeten gewoon mechanisch leren rekenen, dat leidt vervolgens vanzelf tot inzicht.

Dit derde argument richt zich feitelijk op doelen van het reken-wiskundeonderwijs, namelijk of het in het reken-wiskundeonderwijs gaat om reproductie of om inzicht verwerven. Soms wordt met deze uitspraak over efficiëntie bedoeld dat na mechanisch leren rekenen inzicht later vanzelf ontstaat. Er zijn nogal wat aanwijzingen dat dat niet het geval is (zie bijvoorbeeld Erlwanger, 1973; Ter Heege, 1985; Ter Heege, 1986; Ter Heege, 2005).

Argument 4. Realistisch reken-wiskundeonderwijs is te ingewikkeld voor de modale leraar basisonderwijs.

Hoewel methodeschrijvers geleerd hadden van de ervaringen met Taltaal, bleven er aanwijzingen

dat een aanzienlijk deel van de leraren niet goed in staat is realistisch reken-wiskundeonderwijs vorm te geven (Vedder, 2002; Gravemeijer, Bruin-Muurling, Kraemer, & Van Stiphout, 2016). Dat hangt mogelijk samen met geringe ondersteuning die leraren hierbij kregen in de vorm van initiële scholing en nascholing (Meelissen & Punter, 2016; KNAW, 2009).

Argument 5. Realistisch reken-wiskundeonderwijs leidt tot onhanteerbare verschillen tussen leerlingen.

We gaven boven reeds aan dat de verschillen tussen leerlingen niet ontstonden naar aanleiding van het realistisch reken-wiskundeonderwijs, maar dat zij door de voorgestane interactieve werkwijze nadrukkelijker zichtbaar werden. Dat maakt het vormgeven van realistisch reken-wiskundeonderwijs voor de leraar moeilijker, maar niet onmogelijk als de organisatie van het onderwijs daarop wordt afgestemd.

Overigens bleek dat criticasters van het realistische reken-wiskundeonderwijs zich vooral roerden omdat zij merkten dat het reken-wiskundeonderwijs anders van aard was geworden dan zij uit hun eigen onderwijsverleden kenden, met de staartdeling als belangrijkste steen des aanstoots (Keijzer, 2013). Als gezegd, kreeg de KNAW de opdracht om na te gaan of de opbrengsten van het realistisch reken-wiskundeonderwijs verschillen van meer traditionele aanpakken. Dit leidde tot het rapport 'Rekenonderwijs op de basisschool. Analyse en sleutels tot verbetering' (KNAW, 2009). De conclusie van dit rapport was dat de visie er voor de opbrengsten niet toe doet, wel de kwaliteit van de leraar en de manier waarop die is opgeleid. Een gevolg van deze conclusie was dat er op de lerarenopleiding basisonderwijs inmiddels hogere eisen gesteld worden aan de professionele gecijferdheid van studenten (Oonk, Van Zanten, & Keijzer, 2007; Van Zanten, 2010) en dat, waarschijnlijk als gevolg hiervan, de gemiddelde studielast voor het vak rekenen-wiskunde op de lerarenopleiding tijdelijk hoger werd (Keijzer, 2019).

Leren voor de toekomst

Het verschijnen van het KNAW-rapport over het reken-wiskundeonderwijs heeft er niet toe geleid dat de discussie rond traditioneel reken-wiskundeonderwijs en realistisch reken-wiskundeonderwijs verstomd is. Begin 2019 nog leidde een voorstel van curriculum.nu over het uitstellen van het formeel leren rekenen met breuken naar het voortgezet onderwijs tot stevige kritiek op realistisch reken-wiskundeonderwijs en 'onderwijsvernieuwers' in het algemeen (Ontwikkelteam rekenen-wiskunde, 2019; Nieuwsuur, 2019). Hoewel betrokkenen dat zelf waarschijnlijk anders zien, hebben critici van het realistisch reken-wiskundeonderwijs feitelijk hun focus verlegd naar kritiek op ideeën voor het leren voor de toekomst, bijvoorbeeld zoals verwoord in de opdracht die is gegeven aan curriculum.nu en zoals het leren voor de toekomst eerder is verwoord door het Platform Onderwijs2032 (2016). Platform Onderwijs2032 kenschetst het onderwijs van de toekomst als het faciliteren van kinderen die onderzoekend hun wereld verkennen, waarbij grenzen tussen vakken verschuiven en nieuwe domeinen ontstaan. Enkele recente publicaties laten zien dat het realistisch reken-wiskundeonderwijs past bij deze nieuwe doelen (Van den Heuvel-Panhuizen, Drijvers, Doorman, & Van Zanten, 2019; Van den Heuvel-Panhuizen, 2019; Gravemeijer, Stephan, Julie, Lin, & Ohtani, 2017). Het doordenken van het reken-wiskundeonderwijs van de toekomst is ook een terugkomend thema in gesprekken tussen vakdidactici tijdens de Panama-conferenties (Keijzer, Van Doornik-Beemer, & Spitz, 2017; Keijzer, Bunck, & Van Gool, 2018; Van Zanten, 2017; De Goeij & Oonk, 2017). Tijdens de Panama-conferentie van 2017 en ook tijdens die van 2018 werd een deel van het programma ingevuld door de werkgroep 'Wiskunde voor morgen'. Kernpunt van deze werkgroep is: hoe ziet het reken-wiskundeonderwijs eruit als een belangrijk deel van de wiskunde wordt overgenomen door machines (Wiskunde voor Morgen). De werkgroep 'Wiskunde voor morgen' concludeert dat er andere inhouden nodig zijn en een daadwerkelijke verschuiving naar conceptuele doelen (Bruin-Muurling & Keijzer, 2018). Bij een dergelijke roep om conceptuele doelen, kan men zich afvragen waarom die conceptuele doelen na vijftig jaar onderwijsontwikkeling nog altijd niet zijn gerealiseerd (Gravemeijer, Bruin-Muurling, Kraemer, & Van Stiphout, 2016). Immers een verschuiving naar conceptuele doelen, hoewel eertijds anders verwoord, was precies dat waar het ook Wiskobas om te doen was.

Reflectie

Het zou onjuist zijn in mineur te eindigen. Wiskobas heeft uiteraard het ontwikkelwerk van het onderwijs blijvend veranderd. Edu Wijdeveld noemde bijvoorbeeld de leergangen die voortkwamen

uit Wiskobas, die op een of andere manier nog altijd terug te vinden zijn in hedendaagse methoden. Maar er is meer.

Je kunt zeggen dat Wiskobas voortkwam uit het verlangen naar een andere cultuur van het reken-wiskundeonderwijs. Het ging bij Wiskobas om het verkennen van wiskundige fenomenen en ideeën. Dat werd uiteindelijk neergelegd in methoden en kerndoelen. Uit deze methodes en doelen sprak dat rekenen-wiskunde niet alleen gericht is op het leren gebruiken van rekenregels en algoritmes. Echter dat beeld van rekenen-wiskunde als verzameling rekenregels en algoritmes was en is er wel een dat maatschappelijk stevig overeind stond en eigenlijk nog staat. Je zou dit kunnen beschouwen als een traditionele cultuur tegenover die van Wiskobas. Veel kritiek op het realistisch reken-wiskundeonderwijs kan beschouwd worden als botsing tussen deze twee culturen.

Ruim vijftig jaar geleden was het gevoel dat het reken-wiskundeonderwijs moest veranderen, omdat de wereld van direct na de Poetnik daarom vroeg. Dat leidde tot een ander, vernieuwd curriculum. Leraren ervaren echter dat ouders hun kinderen naar zo hoog mogelijke vormen van vervolgonderwijs willen sturen. Ouders verwachten ook het doelgerichte reken-wiskundeonderwijs dat daar in hun ogen bij hoort en zitten niet zo te wachten op wat zij aanduiden als ‘verhaaltjessommen’, die ontwikkelaars eertijds bedachten als wiskunde genererende contexten.

Dit leidde tot de notie dat deze verhaaltjessommen het reken-wiskundeonderwijs inefficiënt maken en dat beeld werd vervolgens regelmatig overgenomen door opiniemakers en politici. Dit geluid werd nog sterker toen bleek dat de vernieuwing van het reken-wiskundeonderwijs leidde tot ogenschijnlijk lagere opbrengsten. Het genuanceerde beeld dat uit de PPON-peilingen naar voren kwam werd door tegenstanders van realistisch reken-wiskundeonderwijs eenzijdig beschouwd: het cijferen is waar het in het reken-wiskundeonderwijs om gaat en dat gaat minder, dus gaat het met het reken-wiskundeonderwijs slecht. En omdat een dergelijke argumentatie typerend is voor het maatschappelijke debat, typeert dit debat zich ook als discussie over doelstellingen en onderliggende ideeën, die gevoerd wordt als opbrengstendiscussie.

Nog even terug naar Edu Wijdeveld die wij eind 2018 uitvoerig spraken. Toen we hem bedankten voor het interview, keek hij nogmaals terug op de ontwikkelingen die hij samen met anderen ruim 50 jaar geleden in gang gezet heeft. Hij vond het tijd voor een nieuwe revolutie, net als die van Wiskobas van 50 jaar geleden, omdat er net als 50 jaar geleden alle reden is om het reken-wiskundeonderwijs radicaal te veranderen. De maatschappelijke context anno 2019 is dat ons leven goeddeels bepaald wordt door slimme apparaten. Er is, denken we, alle reden om het reken-wiskundeonderwijs radicaal te veranderen en meer toe te spitsen op een wereld vol nieuwe apparaten. Eigenlijk zijn we daar al mee begonnen.

Noten

- 1 Bijlage 1 biedt een overzicht over in dit artikel gebruikte afkortingen en termen.
- 2 Bij de spelling K van Kursusjaar heeft te maken met door het Wiskobasteam gewenste spelling.
- 3 Door het werk van Nicole Picard (1968)
- 4 Door het Nuffield Project (Matthews, 1964)
- 5 De experimenten werden allereerst uitgevoerd met twee groepen studenten van de PA Gorkum, met Goffree en Janssen als opleiders en Freudenthal en de eigen docenten als observatoren. De implementatie gebeurde via een netwerk van Wiskobas, in het bijzonder van opleiders waarvan een twintigtal zogenaamde ‘taakuren wiskobas’ kreeg.
- 6 Goffree wilde met het &-teken in Wiskunde & Didactiek geïntegreerde aanbod van wiskunde en didactiek benadrukken.

Literatuur

- Bakker, A. (2018). *Design Research in Education*. Abingdon: Taylor & Francis Ltd.
- Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59, 389-407.
- Boswinkel, N., & Moerlands, F. (2004). Juf, wanneer gaan we rekenen. *JSW*, 88(10), 12-15. Opgehaald van <https://www.onderwijsmaakjesamen.nl/bijlagen/R4.pdf>
- Brinkman, T., Van Achter, V., De Jong, P., Van Loon, J., & Nieland, J. (1974). *Getal in beeld*. 's Hertogenbosch: Malmberg.
- Bruin-Muurling, G., & Keijzer, R. (2018). Doelen voor het reken-wiskundeonderwijs van de toekomst. *Volgens Bartjens*, 37(5), 10-14.
- Buijs, K. (2008). *Leren vermenigvuldigen met meercijferige getallen*. Utrecht: Universiteit Utrecht.
- Curriculum.nu. (2019). Rekenen & Wiskunde. Opgeroepen op november 12, 2019, van Curriculum.nu: <https://www.curriculum.nu/voorstellen/rekenen-wiskunde/>
- De Boer, S. (red.). (2012). *Op opbrengsten gericht. Resultaten subsidietrajecten PO-Raad 2008-2012*. Utrecht: PO-Raad.
- De Goeij, E., & Oonk, W. (2017). Het stimuleren van een wiskundige attitude. In M. A. Van Zanten (red.), *Rekenen-wiskunde in de 21e eeuw* (pp. 71-78). Utrecht: Panama/NVORWO.
- De Jong, R. A. (1986). *Wiskobas in methoden*. Utrecht: RU Utrecht, Vakgroep Onderzoek Wiskunde-onderwijs en Onderwijscomputercentrum (OW&OC).
- De Moor, E. (1999). *Van vormleer naar realistische meetkunde*. Utrecht: Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.
- Dolk, M., Faes, W., Goffree, F., Hermsen, H., & Oonk, W. (1996). *Een Multimediale Interactieve Leeromgeving voor aanstaande leraren basisonderwijs, ingevuld voor het vak rekenen-wiskunde & didactiek (MILE)*. Utrecht: Freudenthal Instituut / NVORWO.
- Eicholz, R. E. (1970). *Elementair Wiskundig Rekenen*. Assen: Van Gorcum.
- Erlwanger, S. H. (1973). Benny's Conception of Rules and Answers in IPI Mathematics. *Journal of Childrens Mathematical Behavior*, 1(2), 212-231.
- Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen. (2008). *Over de drempels met taal en rekenen*. Enschede: SLO.
- First Summer Study Group in Theoretical and Applied Mechanics Curricula. (1962). On the Mathematics Curriculum of the High School. *The Mathematics Teacher*, 55(3), 191-195.
- Freudenthal, H. (1975). Wandelingen met Bastiaan. *Pedomorfose*, 25, 51-64.
- Freudenthal, H. (1984a). *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren*. Utrecht: OW&OC.
- Freudenthal, H. (1984b). *Appels en peren / wiskunde en psychologie*. Apeldoorn: Van Walraven.
- Freudenthal, H. (1987a). *Schrijf dat op, Hans*. Amsterdam: Meulenhoff Informatief.
- Freudenthal, H. (1987b). Theorievorming bij het wiskundeonderwijs. Geraamte en gereedschap. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 5(3), 4-15.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Gelderblom, G. (2009). *Iedereen kan leren rekenen*. Utrecht: PO-Raad.
- Goffree, F. (1979). *Leren onderwijzen met wiskobas: onderwijsontwikkelingsonderzoek 'wiskunde en didactiek' op de pedagogische akademie*. Utrecht: IOWO.
- Goffree, F. (1982 e.v.). *Wiskunde & didactiek*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
- Goffree, F., & Dolk, M. (red.). (1995). *Proeve van een nationaal programma rekenen-wiskunde & didactiek op de pabo*. Enschede/Utrecht: Instituut voor Leerplanontwikkeling / NVORWO.
- Goffree, F., & Jansen, H. (red.). (1972). *De Teerling is geworpen. Project kansrekenen voor derdejaars PA-studenten*. Utrecht: IOWO, Universiteit Utrecht.
- Goffree, F., & Oonk, W. (2001). Digitizing real practice for teacher education programmes: the MILE approach. In F.-L. Lin, & T. J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 111-145). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers. doi:10.1007/978-94-010-0828-0_6
- Goffree, F., Hiddink, A., & Dijkshoorn, J. (1966). *Rekenen en Didactiek*. Groningen: Wolters-Noordhoff NV.
- Gravemeijer, K. P. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: CD-β Press.
- Gravemeijer, K. P. (2004). Local instruction theories as a means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 105-128. doi:10.1207/s15327833mtl0602_3
- Gravemeijer, K. P., Bruin-Muurling, G., Kraemer, J. M., & Van Stiphout, I. (2016). Shortcomings of Mathematics Education Reform in The Netherlands: A Paradigm Case? *Mathematical Thinking and Learning*, 18(1), 25-44. doi:10.1080/10986065.2016.1107821
- Gravemeijer, K., Stephan, M., Julie, C., Lin, F., & Ohtani, M. (2017). What mathematics education may prepare students for the society of the future? *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(Suppl 1), S105-S123. doi:10.1007/s10763-017-9814-6
- Hickendorff, M., & Jansen, J. (2009). De invloed van contexten in rekenopgaven op de prestaties van basisschoolleerlingen. *Rekenen-wiskunde: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 28(4), 3-11.
- Hoogland, K., Janson, D., Vliegthart, M., Van Vugt, R., Zonneveld, E., & Zwart, A. (2011). *Rekenen verbeteren? Begin bij de leraar!* Utrecht: APS.
- Inspectie van het Onderwijs. (1989). *Overwegingen van een proefvisitatie*. Utrecht, De Meern: Inspectie van het Onderwijs.
- Keijzer, R. (2013). *Wiskunde als educatieve uitdaging*. Amsterdam/Alkmaar: iPabo.
- Keijzer, R. (2019). 10 jaar ontwikkeling in het wiskundeonderwijs bij de lerarenopleiding basisonderwijs. *Volgens Bartjens – ontwikkeling en onderzoek*, 39(1), 48-56.
- Keijzer, R., & Veldhuis, M. (2019). Discussie reken-wiskundeonderwijs. *JSW*, 2019(9), 12-15.
- Keijzer, R., Bunck, M.-J., & Van Gool, A. (2018). Verslag 36e Panama-conferentie. Rekenen een hele kunst. *Volgens Bartjens – ontwikkeling en onderzoek*, 37(5), 51-57.
- Keijzer, R., Van Doornik-Beemer, H., & Oonk, W. (2017). Opleiden voor wiskunde in het basisonderwijs. In I. Pauw, & G. Geerdink, *Kennisbasis Lerarenopleiders. Katern 3 Inhoud en vakdidactiek op de lerarenopleidingen* (pp. 131-136). Eindhoven: Velon.

- Keijzer, R., Van Doornik-Beemer, H., & Spitz, L. (2017). 35e Panamacaferentie: Goed en fout in het rekenwiskundeonderwijs. *Volgens Bartjens – ontwikkeling en onderzoek*, 37(1), 45-52.
- KNAW. (2009). *Rekenonderwijs op de basisschool. Analyse en sleutels tot verbetering*. Amsterdam: KNAW.
- Kordes, J., Bolsinova, M., Limpens, G., & Stolwijk, R. (2013). *Resultaten PISA-2012. Praktische kennis en vaardigheden van 15-jarigen*. Arnhem: Cito.
- Matthews, G. (1964). *I do and I understand: Nuffield Primary Mathematics for children 5-13*. London: Nuffield Foundation.
- Meelissen, M., & Punter, A. (2016). *Twintig jaar TIMSS. Ontwikkelingen in leerlingprestaties in de exacte vakken in het basisonderwijs 1995-2015*. Enschede: IEA TIMSS & PIRLS, Universiteit Twente.
- Nelissen, J. (1987). *Kinderen leren wiskunde. Een studie over constructie en reflectie in het basisonderwijs*. Gorinchem: De Ruiter.
- Nieuwsuur. (2019, februari 10). *Niks nieuwe lesmethoden. Ouderwets sommen stampen terug van weggeweest*. Opgehaald van Nieuwsuur: <https://nos.nl/nieuwsuur/artikel/2271442-niks-nieuwe-lesmethoden-ouderwets-sommen-stampen-terug-van-weggeweest.html>
- Ontwikkelteam rekenen-wiskunde. (2019, januari). *Grote Opdrachten*. Opgeroepen op februari 19, 2019, van Curriculum.nu: <https://curriculum.nu/wp-content/uploads/2019/01/Rekenen-en-Wiskunde-grote-opdrachten.pdf>
- Oonk, W. (2009). *Theory-enriched practical knowledge in mathematics teacher education*. Leiden: Universiteit Leiden.
- Oonk, W., Van Zanten, M., & Keijzer, R. (2007). Gecijferdheid, vier eeuwen ontwikkeling. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 26(3), 3-18.
- Oonk, W., Verloop, N., & Gravemeijer, K. P. (2015). Enriching Practical Knowledge: Exploring Student teachers' Competences in Integrating Theory and Practice of Mathematics Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(5), 559-599.
- Paulos, J. A. (1988). *Innumeracy, mathematical illiteracy and its consequences*. New York: Hill and Wang.
- Picard, N. et al. (1968). *Denken en Rekenen*. 's Hertogenbosch: Malmberg.
- Platform Onderwijs 2032. (2016). *Ons onderwijs2032 - eindadvies*. Den Haag: Platform Onderwijs 2032.
- Postema, J., Kuipers, K., & Haverkort, J. (1976). *Taaltaal*. Zeist: Dijkstra.
- Redactie Rekenen-wiskunde: onderzoek, ontwikkeling, praktijk. (2011). Protocol Ernstige Reken-wiskundeproblemen en Dyscalculie. *Rekenen-wiskunde: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 30(4), 25-28.
- Schmeier, M. (2017). *Effectief rekenonderwijs op de basisschool*. Huizen: Pica Uitgevers.
- Schön, D. A. (1983). *The Reflective Practitioner: How professionals think in action*. London: Temple Smith.
- Schön, D. A. (1987). *Educating the reflective practitioner*. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.
- Smit, J. (2013). *Scaffolding language in multilingual mathematics classrooms*. Utrecht: Universiteit Utrecht.
- Streefland, L. (1988). *Realistisch breukenonderwijs*. Utrecht: OW&OC, RUU.
- Streefland, L. (red.). (1991). *Realistic Mathematics Education in Primary School*. Utrecht: Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.
- TAL-team. (1998, 2000). *Tussendoelen Annex Leerlijnen*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
- Ter Heege, H. (1978). Testing the maturity for learning the algorithm of multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, 9, 75-83.
- Ter Heege, H. (1985). The aquisition of basic multiplication skills. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 385-388.
- Ter Heege, H. (1986). *Een goed product. Onderzoek en ontwikkeling ten behoeve van een leergang vermenigvuldigen*. Utrecht: Universiteit Utrecht, vakgroep onderwijskunde.
- Ter Heege, H. (2005). Over memoriseren. Ontwikkelingen in het. In H. Ter Heege, T. Goris, R. Keijzer, & L. Wesker, *Freudenthal 100* (pp. 90-97). Utrecht: Freudenthal Instituut.
- Tough, A. M. (1971). *The adult's learning projects: A fresh approach to theory and practice in adult learning*. Toronto: Ontario Institute for Studies in Education.
- Treffers, A. (1971). Kursusjaar '71-'72 Verleden en heden van Wiskobas. *Wiskobas Bulletin*, 1(1), 13-17.
- Treffers, A. (1975). *Wiskobas Bulletin, leerplanpublikatie 1. De Kiekkas van Wiskobas*. Utrecht: Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (IOWO).
- Treffers, A. (1978). *Wiskobas doelgericht*. Utrecht: IOWO.
- Treffers, A. (1979). *Wiskobas Bulletin, leerplanpublikatie 10. Cijferend vermenigvuldigen en delen (1)*. Utrecht: Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (IOWO).
- Treffers, A. (1990). *Het voorkomen van ongecijferdheid op de basisschool*. Utrecht: Universiteit Utrecht.
- Treffers, A. (2005). De (on)navolgbare Freudenthal. In H. Ter Heege, T. Goris, R. Keijzer, & L. Wesker (red.), *Freudenthal 100* (pp. 135-144). Utrecht: Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.
- Treffers, A., & De Moor, E. (1990). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2. Basisvaardigheden en cijferen*. Tilburg: Zwijssen.
- Treffers, A., De Moor, E., & Feijs, E. (1989). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. I. Overzicht einddoelen*. Tilburg: Zwijssen.
- Treffers, A., Streefland, L., & De Moor, E. (1994). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool 3A: Breuken*. Tilburg: Zwijssen.
- Treffers, A., Streefland, L., & De Moor, E. (1996). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool 3B: Kommagetallen*. Tilburg: Zwijssen.
- Van de Craats, J. (2007). Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen. Mythen in de rekendidactiek. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/8(2), 132-136.
- Van den Brink, J. (1989). *Realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen*. Utrecht: CD-β Press, Universiteit Utrecht.
- Van den Brink, J., Ter Heege, H., Struik, W., Smeets, W., & Vermeulen, W. (1988). *De taal van de rekenmachine*. Tilburg: Uitgeverij Zwijssen.

- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1996). *Assessment and Realistic Mathematics Education*. Utrecht: CD-β Press/Freudenthal Institute, Utrecht University.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2009). *Hoe rekent Nederland?* Utrecht: Universiteit Utrecht.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (red.). (2019). *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics Visions on and Experiences with Realistic Mathematics Education*. Utrecht: Freudenthal Institute, Utrecht University.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., Drijvers, P., Doorman, M., & Van Zanten, M. A. (red.). (2019). *Reflections from inside on the Netherlands Didactic Tradition in Mathematics*. Utrecht: Freudenthal Institute, Utrecht University.
- Van der Schoot, F. (2008). *Onderwijs op peil? Een samenvattend overzicht van 20 jaar PPO*. Arnhem: Cito.
- Van Eerde, D. (1996). *Kwantijzer. Diagnostiek in reken-wiskundeonderwijs*. Tilburg: Zwijsen.
- Van Eerde, D. (2009). Rekenen-wiskunde en taal: een didactisch duo. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 28(3) 19-32.
- Van Galen, F., Dolk, M., Feijs, E., Jonker, V., Ruesink, N., & Uittenbogaard, W. (1991). *Interactieve video in de nascholing rekenen-wiskunde*. Utrecht: Rijksuniversiteit Utrecht, Centrum voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen.
- Van Groenestijn, M., Borghouts, C., & Janssen, C. (2011). *Protocol Ernstige RekenWiskunde-problemen en Dyscalculie*. Assen: Van Gorcum.
- Van Luit, H. (2019, oktober 8). *Ook contextopgave kan niet zonder basale rekenkennis*. Opgehaald van *Didactief*: <https://didactiefonline.nl/artikel/ook-contextopgave-kan-nietzonder-basale-rekenkennis>
- Van Luit, H., & Ruijsenaars, A. J. (2004). Dyscalculie, zin en onzin. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 23(2), 3-8.
- Van Weerden, J., & Hiddink, L. (red.). (2013). *Balans van het basisonderwijs. PPO: 25 jaar kwaliteit in beeld*. Arnhem: Cito.
- Van Zanten, M. (2010). De kennisbasis rekenen-wiskunde voor pabo's - ontwikkelingen en overgangen. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 29(1), 3-16.
- Van Zanten, M. (red.). (2017). *Rekenen-wiskunde in de 21e eeuw*. Enschede: Panama, NVORWO, Universiteit Utrecht, SLO.
- Van Zanten, M., Barth, F., Faarts, J., Van Gool, A., & Keijzer, R. (2009). *Kennisbasis Rekenen-Wiskunde voor de lerarenopleiding basisonderwijs*. Den Haag: HBO-raad.
- Van Zanten, M., Van Graft, M., & Van Leeuwen, B. (2017). *Leerplankundige verkenning van TIMSS-trends. Rekenen-wiskunde en natuurwetenschappen*. Enschede: SLO.
- Vedder, P. (2002). Realistisch rekenen en rekenzwakke, allochtone kinderen. In R. Keijzer, & W. Uittenbogaard (red.), *Interactie in het reken-wiskundeonderwijs* (pp. 49-60). Utrecht: Panama / Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.
- Verloop, N. (2001). Guest editor's introduction. *International Journal of Educational Research*, 35(5), 435-440. doi:10.1016/S0883-0355(02)00002-2
- Verloop, N., Van Driel, J., & Meijer, P. (2001). Teacher knowledge and the knowledge base of teaching. *International Journal of Educational Research*, 35(5), 441-461. doi:10.1016/S0883-0355(02)00003-4
- Wijdeveld. (1975). *Historisch overzicht CMLW/IOWO*. Baarn: ongepubliceerd.
- Wiskobasteam. (1975). *Leerplan deel 2. Overzicht van wiskundeonderwijs op de basisschool. Een model voor een schoolwerkplan*. Utrecht: Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (IOWO).
- Wiskobasteam. (1977). *Rapportboekje 1. Konferentieverslag Putten*. Utrecht: Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (IOWO).
- Wiskunde voor Morgen. (sd). *Toekomstbestendig reken- en wiskundeonderwijs*. Opgeroepen op februari 19, 2019, van Reken- en wiskundeonderwijs voor de 21e eeuw: http://www.rekenenwiskunde21.nl/uploads/artikelen/WvM_kort.pdf

Developing mathematics is a product in time. This is true for the period shortly after WW2 and for the present time. In this paper we provide an overview on developing primary mathematics education in the Netherlands between the fifties of the last century and now. Our main focus is realistic mathematics education, as this was the most prominent development over the last 50 years. We describe which considerations and mechanisms played a role in developing realistic mathematics education. We show how today realistic mathematics education is criticized. We analyse arguments used in this discussion and show the perception of realistic mathematics education reflected in these arguments.

BIJLAGE 1

GEBRUIKTE AFKORTINGEN EN ANDERE AANDUIDINGEN

Curriculum.NU	Commissie van 125 leraren, 18 schoolleiders en enkele experts die een voorstel hebben gepresenteerd (2019) voor de onderwijsinhoud (po-vo) van 'morgen'
CMLW	Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde
IOWO	Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (Universiteit Utrecht)
KNAW	Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen
MILE	Multimediale Interactieve LEeromgeving. Het landelijk kernteam Mile bestond uit Maarten Dolk, Willem Faes, Fred Goffree en Wil Oonk, met later ook Jaap den Hertog.
New Math	Een einde jaren vijftig in de VS ontstane, abstracte stroming van 'Modern Wiskunde Onderwijs', met onder andere verzamelingen en logica.
NVORWO	Nederlandse Vereniging ter Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs
OW&OC	Onderzoek Wiskundeonderwijs en Onderwijs Computercentrum
Narrative	Een verhaal dat voorbeeldmatig is voor een bepaald concept. Narratief weten is kennis opslaan in verhalen.
PA	Pedagogische Academie
Pabo	Pedagogische academie basisonderwijs
Panama	Pabo Nascholing Mathematische Activiteiten, inmiddels de organisatie van de Panama-conferenties voor allen betrokken bij het reken-wiskundeonderwijs. De initiatiefnemer van het PANAMA-project en ook één van de oprichters van de NVORWO was Ed de Moor
Praktijkkennis	Praktijkkennis is kennis over allerlei aspecten van het leren en onderwijzen, vaak impliciet, die het handelen stuurt. Theoretische noties kunnen er deel van uitmaken, maar ook allerlei beelden en ideeën van ervaringen, bijvoorbeeld uit het eigen onderwijsverleden (Verloop, 2001; Verloop, Van Driel, & Meijer, 2001)
Rekenen-wiskunde: onderzoek, ontwikkeling, praktijk	tijdschrift dat eerder verscheen onder de namen Panama-Post en 'Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs' en inmiddels aangeduid wordt als 'Volgens Bartjens – Ontwikkeling en Onderzoek'
RME	realistic mathematics education (Engelse aanduiding voor realistisch reken-wiskundeonderwijs)
SLO	Stichting Leerplan Ontwikkeling
Sociaal constructivisme	Het sociaal constructivisme is een stroming die het leerproces ziet als een actief proces van kennisverwerving, waarbij de kennis ontstaat en gedeeld wordt met anderen
TAL-project	tussendoelen annex leerlijnen Het TAL-team was een taakgroep van het Freudenthal Instituut i.s.m. SLO en CED
Theorievorming (globaal, lokaal)	globale onderwijstheorie richt zich op het gehele, nieuw ontwikkelde reken-wiskundeonderwijs, lokale theorie op specifieke leerstofgebieden
vhmo	Voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs
Wiskobas	vernieuwingsproject voor het wiskundeonderwijs in de basisschool
Wiskobasteam	Het Wiskobasteam stond onder leiding van Henk Meijer, met Hans Freudenthal als hoogleraar directeur en Edu Wijdeveld als directeur van het totale IOWO (waarvan Wiskobas onderdeel was).
Wiskobasbulletin	tijdschrift van het Wiskobasproject, later overgegaan in het tijdschrift Willem Bartjens en daarna in Volgens Bartjens
WVO	Wiskunde voortgezet onderwijs