

De ontwikkeling van

Leren vermenigvuldigen

Er wordt veel onderzoek gedaan naar leerlijnen en strategiegebruik. Kennis van leerlijnen is essentieel in het rekenonderwijs, bijvoorbeeld om goed te kunnen differentiëren. Reden voor *Volgens Bartjens* om een aantal leerlijnen en de erbij horende strategieën de revue te laten passeren. In het maartnummer publiceerden we een artikel over de leerlijn delen. Dit keer een artikel waarin de leerlijn vermenigvuldigen aan de hand van strategieën wordt besproken.



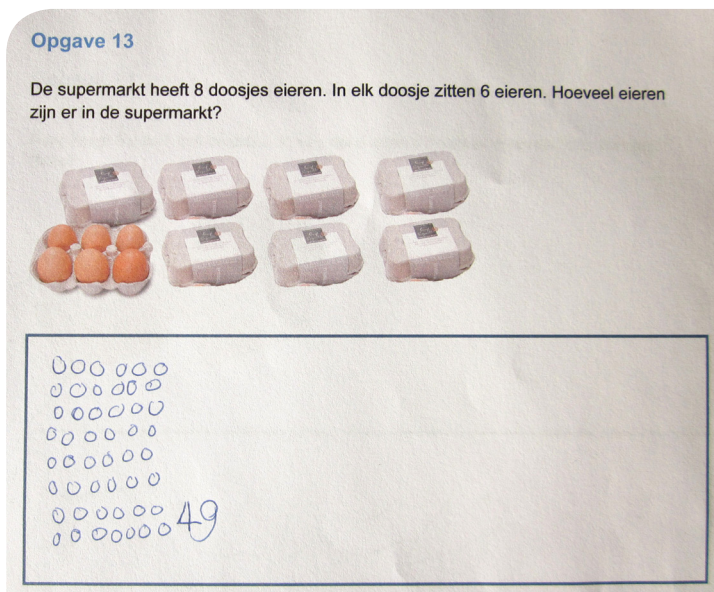
Het leren van de tafels is een belangrijk onderdeel van het rekencurriculum in de basisschool. Vroeger was het uit het hoofd leren het belangrijkste doel. Veel volwassenen zullen nog herinneringen hebben aan het groepsgewijs opdreunen: $1 \times 7 = 7$, $2 \times 7 = 14$, $3 \times 7 = 21$... Tegenwoordig schrijven de methodes voor dat het kind zelf actief met sommen aan de slag moet gaan. Kinderen moeten leren steeds slimmere strategieën te gebruiken om uiteindelijk ook tot het automatiseren of memoriseren van de tafels te komen. De gedachte is dat kinderen zo meer begrip en inzicht in het vermenigvuldigen krijgen. Maar hoe ziet zo'n leerproces er nu eigenlijk uit? Hoe komt het dat dit het ene kind veel gemakkelijker afgaat dan het andere? En wat is de beste manier om kinderen te helpen die er moeite mee hebben?

Verschillende strategieën

Het gebruiken van steeds slimmere strategieën gaat stapsgewijs. De strategieën die kinderen voor tafelsommen gebruiken zijn ruwweg in te delen in vijf categorieën. Als eerste is er de *foute strategie*. Het kind weet nog niet goed raad met de som en geeft bijvoorbeeld geen antwoord, raadt een antwoord of telt op: $7 \times 2 = 9$.

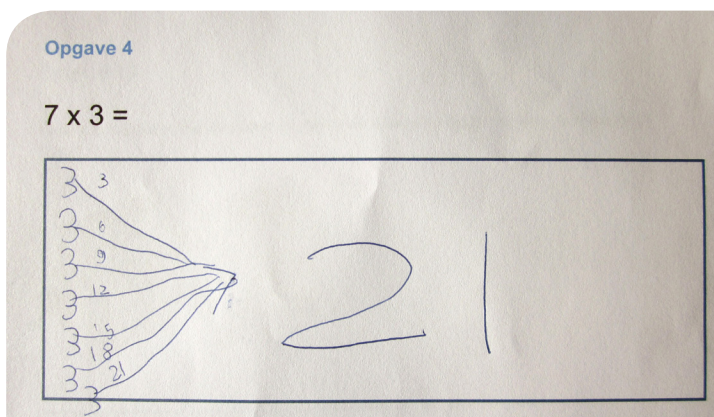
De simpelste correcte categorie wordt gevormd door de *telstrategieën*. Kinderen tellen op de vingers of hardop, of ze tekenen de som uit zoals het voorbeeld in afbeelding 1. Door te tellen kan het kind tot een goed antwoord komen. De strategie is daarom in principe correct. Maar omdat de procedure uit veel tussenstappen bestaat, is de kans op een fout groot. Wie goed kijkt naar afbeelding 1 kan dit bevestigen: op de onderste regel staan per ongeluk zeven eieren getekend waar dit er zes hadden moeten zijn.

En strategiegebruik



1. Een telstrategie

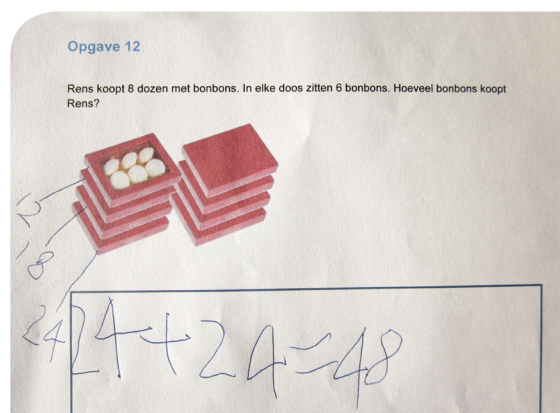
Al geavanceerder dan de telstrategieën is het *herhaald optellen*, bijvoorbeeld $2 + 2 + 2 + 2$. Dit is de strategie die het kind in afbeelding 2 heeft toegepast. Herhaald optellen vereist minder tussenstappen dan de telstrategieën en is daarmee een handigere strategie. Toch kan het aantal tussenstappen nog steeds behoorlijk oplopen.



2. Herhaald optellen

Weer slimmer dan herhaald optellen zijn de *variastrategieën*, ook wel handig rekenen genoemd. Hierbij maakt het kind slim gebruik van kennis die het al heeft. In slechts een paar stappen wordt het antwoord bereikt. Verdubbelen is een voorbeeld van een handige strate-

gie: $6 \times 4 = 3 \times 4 + 3 \times 4 = 12 + 12$. In afbeelding 3 heeft het kind deze strategie toegepast. Ook bijvoorbeeld het gebruik maken van buursommen (bijvoorbeeld $9 \times 3 = 10 \times 3 - 3$) is een handige strategie



3. Een handige strategie

Uiteindelijk is het streefdoel dat het kind de simpele keersommen onder de 10 automatiseert. *Automatiseren* is dan ook de laatste categorie. Hierbij heeft het kind geen berekening meer nodig om tot het antwoord te komen: het antwoord is direct paraat.

Overlappende golven

Wanneer een kind vaak genoeg deze sommen succesvol oplost, zal het de vaardigheden ontwikkelen om steeds een iets handigere strategie te gebruiken. Dit gebeurt met hulp van de leerkracht die strategieën aanreikt en door zelf te ontdekken. Het gaat echter in kleine stapjes. Er moet immers niet alleen een nieuwe gewoonte worden aangeleerd maar de oude strategie moet ook worden afgeleerd. Een kind dat bijvoorbeeld net als nieuwe strategie heeft geleerd om herhaald op te tellen zal dat soms doen, maar het blijft erg verleidelijk om terug te vallen op het vertrouwde en ingesleten tellen op de vingers. Het duurt een tijdje voordat dit is verdwenen.

Dit betekent dat strategieën langzaam opkomen, tot een piek komen en daarna weer langzaam verdwijnen als er weer een nieuwe strategie wordt ontdekt. Dit is een patroon dat lijkt op golven in de branding. Daarom wordt dit fenomeen van strategieën die komen en gaan ook wel *overlappende golven* genoemd.

Ons onderzoek

De theorie van de overlappende golven is al zo'n vijftien jaar oud. Het was echter nog niet eerder onderzocht of dit in de praktijk van het leren rekenen ook echt zo werkt. Daarom hebben wij 100 kinderen in groep 4 twee maanden, in januari en februari, gevolgd in het leren vermenigvuldigen. Elke week maakten ze individueel een aantal sommen en een begeleider die naast ze zat vroeg na elke som hoe ze deze hadden uitgerekend. Inderdaad bleek het patroon van de overlappende golven heel duidelijk zichtbaar. In de loop van de 2 maanden gebruikten de kinderen steeds slimmere strategieën, maar ze vielen ook regelmatig terug op minder slimme strategieën. Sommigen die ze op het ene moment geautomatiseerd leken te hebben, rekenden ze een week later soms toch nog even na precies zoals de theorie van de overlappende golven ook voorspelt. Hoe deze ontwikkeling er schematisch uitziet is te zien in afbeelding 4.

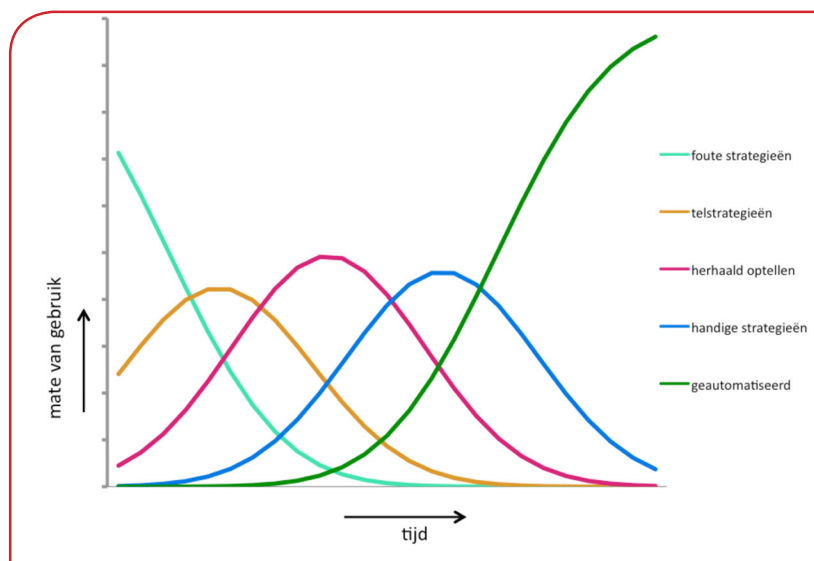
Afbeelding 4 laat duidelijk de golfbeweging van strategieën zien. Aan het begin van het leerproces als het kind nog niet goed begrijpt wat vermenigvuldigen is, staat het helemaal links in de grafiek. In de loop van de ontwikkeling gaat het steeds verder naar rechts. Helemaal rechts aangekomen zijn alle tafels geautomatiseerd. In de tussentijd heeft het kind steeds de beschikking over een aantal strategieën, maar hoeveel er gebruik wordt gemaakt van elke strategie verandert steeds in de loop van de ontwikkeling... We vonden ook een sterk verband tussen de gekozen strategie en het antwoord: hoe slimmer de gekozen strategie des te vaker was het gegeven antwoord ook goed. Niet verrassend want bij de slimme strategieën zijn er minder rekenstappen nodig dus er zijn minder kansen om een fout te maken. Bovendien zijn het de kinderen met voldoende rekenkennis die in staat zijn om slimme strategieën te gebruiken.

Verschillen tussen kinderen

Uit onze resultaten bleek meer: namelijk dat er grote verschillen waren tussen de kinde-

EEN KIND DAT NET EEN NIEUWE STRATEGIE HEEFT GELEERD ZAL DEZE SOMS GEBRUIKEN, MAAR HET BLIJFT VERLEIDELIJK OM TERUG TE VALLEN OP VERTROUWDE EN INGESLETEN STRATEGIEËN (ZOALS TELLEN)

ren. Het ene kind had al bijna alles geautomatiseerd terwijl het andere kind nog voornamelijk aan het tellen was. Kortom, het ene kind was nog bijna helemaal links in afbeelding 4 en het andere kind al veel verder naar rechts opgeschoven.



4.

Waardoor ontstaan die verschillen tussen kinderen? Het is al langer bekend dat het werkgeheugen een sleutelrol speelt bij de ontwikkeling van rekenvaardigheid. Het werkgeheugen zorgt ervoor dat we informatie kort kunnen onthouden: denk aan het onthouden van een telefoonnummer of boodschappenlijstje. Het werkgeheugen stelt ons bovendien in staat om deze informatie te onthouden terwijl we ook andere dingen aan het doen zijn: bedenken waar de telefoon ook alweer ligt of bijhouden wat er van je lijstje al in de kar ligt en wat je nog moet pakken.

Het werkgeheugen

Tijdens het uitrekenen van rekenopgaven moet je veel onthouden: wat de som is, welke stappen je al gezet hebt, wat de uitkomst daarvan was en wat je nog moet doen. Een kind met een goed werkgeheugen kan dit allemaal goed uit elkaar houden en raakt niet in de war. Dit kind zal een som vlot en goed kunnen uitrekenen. Dit biedt nog een extra voordeel bij het automatiseren. Onze hersenen werken namelijk door het versterken van onderlinge verbindingen. Dit versterken werkt het beste als verschillende delen van de hersenen tegelijk actief zijn.

Een kind met een goed werkgeheugen is in staat om een alsmaar uitbreidend netwerk van verbindingen tussen getallen te vormen. Zo raakt dit kind steeds beter in staat om handige strategieën te

Wie 7×2 snel heeft uitgerekend zal op het moment dat de uitkomst 14 is bereikt ook de getallen 7 en 2 nog actief hebben. De verbinding tussen de getallen wordt versterkt waardoor het antwoord de volgende keer sneller gevonden wordt. Maar een kind met een minder goed werkgeheugen heeft veel meer moeite met het bijhouden van alle informatie in de som en tijdens het oplossen. Dit kind maakt vaker foutjes waardoor het niet alleen 14 leert te associëren met 7 en 2 maar ook bijvoorbeeld 12, 15 en 16. Een andere mogelijkheid is dat het kind wel bij 14 belandt, maar pas zo laat dat 7 en 2 al niet meer actief zijn. Ook in dat geval zal de verbinding niet versterkt worden: het kind heeft niets geleerd.

gebruiken. Een kind met een zwakker werkgeheugen bouwt dit netwerk maar heel langzaam op en is zo dus niet in staat om op steeds slimmere strategieën over te gaan. In afbeelding 4 staan rechts de kinderen die hoge scores haalden op een aantal werkgeheugentaakjes. Zij gebruikten slimme strategieën. De kinderen met lagere werkgeheugenscores gebruikten minder slimme strategieën. Bovendien maakten zij aanzienlijk meer rekenfouten dan kinderen met een beter werkgeheugen: meer fouten zelfs dan op basis van hun minder slimme strategiegebruik al verwacht kon worden.

Hulp voor de zwakke rekenaar

Wat kan een leerkracht hier nu mee? Wat wellicht als eerste opkomt is dat kinderen gestimuleerd moeten worden in het gebruik van slimme strategieën. Die leiden immers vaker tot een goed antwoord. Het is echter de vraag of dit voor elk kind een goede keuze is. Gemiddeld genomen leiden slimme strategieën weliswaar tot betere prestaties, maar de kinderen in dit onderzoek hebben zelf hun strategie gekozen. Een kind dat in staat is tot slimme strategieën maar uit gewoonte op de vingers blijft tellen kan gestimuleerd worden om de sommen slimmer aan te pakken. Maar een kind dat nog geen rijk rekennetwerk heeft opgebouwd, is waarschijnlijk helemaal niet in staat om slimme strategieën toe te passen. Een kind dat blijft hangen in de minder handige strategieën moet uiteraard wel geholpen worden om verder te komen. Een mogelijkheid is het kind zelfstandig de sommen op een manier naar keuze uit te laten rekenen, maar meteen aan te leren om na afloop terug te kijken naar de som: wat heb ik ook alweer uitgerekend? Op die manier wordt het kind alsnog in staat gesteld om een rijk rekennetwerk op te bouwen. Wanneer een kind moeite heeft met de sommen vanwege een zwak begrip van vermenigvuldigen, zal het nuttig zijn om veel concrete voorbeelden te laten zien. Het probleem zit dan niet in het werkgeheugen, maar in het maken van de overstap naar abstracte sommen. Soms ligt de oorzaak in een zwak werkgeheugen, terwijl het kind wel voldoende begrip heeft van het concept vermenigvuldigen. Dan kan het

EEN KIND MET EEN MINDER GOED
WERKGEHEUGEN HEEFT VEEL MEER
MOEITE MET HET BIJHOUDEN VAN ALLE
INFORMATIE IN DE SOM TIJDENS HET
OPLOSSEN

misschien prima werken om terug te vallen op het ouderwetse uit het hoofd leren van de tafels om zo toch de juiste verbindingen tussen getallen te kunnen maken. Vaak gaan deze problemen echter samen en zal het kind gebaat zijn bij een combinatie van deze benaderingen.



Screenen en trainen van het werkgeheugen

Een eenvoudige manier om zelf een indicatie te krijgen van het werkgeheugen van een leerling, is een reeks van woorden achterstevoren na te laten zeggen: bal-hond-koe wordt koe-hond-bal. Door gemakkelijk te beginnen, met twee woorden, en de reeksen daarna steeds langer te maken, is snel te achterhalen hoe ver elk kind komt. Het is ook mogelijk het werkgeheugen te trainen. Dat kan eenvoudig met geheugenspelletjes in de klas. Denk aan het bekende memory, kwartet, ik ga op reis en ik neem mee, of denk aan het eerder genoemde achterstevoren laten herhalen van woorden. Maar je kunt ook eenvoudig zelf spelletjes verzinnen: tik een aantal voorwerpen of kinderen in de klas aan en vraag een kind om deze in de omgekeerde volgorde aan te tikken of op te noemen. Of vraag in plaats daarvan om alle groene dingen aan te tikken en de rest over te slaan. Zet een aantal dingen op tafel, laat de kinderen de ogen dicht doen en haal er een weg. Wie ziet wat er weg is? Of leg er een doek overheen en laat de kinderen opnoemen wat er allemaal onder lag. Wie creatief is, kan heel veel werkgeheugenspelletjes verzinnen die in weinig tijd tussendoor gespeeld kunnen worden en die kinderhersenen op een speelse manier laten kraken!

De auteurs zijn werkzaam aan respectievelijk de Universiteit van Amsterdam en de Universiteit Utrecht

Noot

1. Deze theorie is bedacht door de Amerikaanse wetenschapper Robert Siegler. Hij noemde het *overlapping waves*.