Een empirische vergelijking van de klassieke staartdeling en de hapmethode in een ROC

We rapporteren een interventiestudie waarbij klassen van een mbo-opleiding herhalingslessen staartdelen kregen, met ofwel de klassieke staartdeling, ofwel de hapmethode. Voor en na de interventie werd de vaardigheid in het delen van getallen gemeten met verschillende maar gelijkende toetsen van elk 17 items. Beide toetsen hadden een interne-consistentiebetrouwbaarheid van rond .80. Het bleek dat er geen significant verschil was in de gemiddelde vooruitgang van de klas met de staartdeling versus de klassen met de hapmethode. Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het verschil van de gemiddelde vooruitgang bij de hapmethode min de gemiddelde vooruitgang bij de klassieke staartdeling, waarbij voormeting en nameting zijn uitgedrukt op een schaal van 1 tot 10, was [-.73, 1.99]. Hierbij was Cohen's d gelijk aan 0.36 en het 95%-betrouwbaarheidsinterval hiervan was [-0.40, 1.12]. In de onderzochte omstandigheden lijkt er geen groot verschil te zijn tussen hapmethode en klassieke staartdeling wat betreft hun effect op de vooruitgang in rekenvaardigheid van leerlingen. Vermoedelijk is de effectgrootte hoogstens matig.

Jules L. Ellis en
Theo van de Veerdonk
Radboud Universiteit Nijmegen, Faculteit Sociale Wetenschappen, Behavioral Science Institute & Onderwijsinstituut voor Psychologie en Kunstmatige Intelligentie en Da Vinci College, Dordrecht

Ellis, J.L. & Van de Veerdonk, Th. (2016). Een empirische vergelijking van de klassieke staartdeling en de hapmethode in een ROC. *Volgens Bartjens – ontwikkeling en onderzoek*, *35*(5), 41-56

Inleiding

Voor het leren van staartdelingen worden in het Nederlands onderwijs verschillende methoden gebruikt. Twee belangrijke methoden zijn de klassieke staartdeling en de hapmethode. Er is een jarenlange discussie over welke van deze methoden de beste is, en ook dit artikel gaat daarover. Dit artikel onderscheid zich op twee manieren van veel andere bijdragen in de discussie. Ten eerste gaat het hier om een empirisch interventieonderzoek. Dit wil zeggen dat actief werd geïntervenieerd in het onderwijs. Ten tweede gaat dit artikel niet over het primaire onderwijs, maar over het mbo.

We gebruiken hier de term 'klassieke staartdeling' voor de methode die in discussies vaak wordt aangeduid met 'staartdeling' (zie bijvoorbeeld De Bruin, 2008). De reden hiervoor is dat wij van mening zijn dat ook de hapmethode een vorm van staartdeling is (Boels, 2009). Verder zullen beide worden aangeduid als 'algoritme'. De reden hiervoor is dat de term 'methode' enigszins verwarrend kan zijn, aangezien we zowel een rekenmethode als een onderzoeksmethode hebben.

De klassieke staartdeling wordt meestal geassocieerd met traditioneel rekenonderwijs, terwijl de hapmethode meestal wordt geplaatst binnen realistisch rekenonderwijs. Daarmee is het onderdeel van een bredere discussie over rekenonderwijs (Van de Craats, 2007; Van den Heuvel-Panhuizen, 2009; Van Zanten & Buijs, 2009; Ros, 2009). Van den Heuvel-Panhuizen et al. (2009, p. 356) betogen dat realistisch rekenonderwijs wordt gekenmerkt door meerdere oplossingsstrategieën, en dat de klassieke staartdeling daar ook onderdeel van kan zijn. De termen 'traditioneel rekenonderwijs' en 'realistisch rekenonderwijs' zijn echter niet duidelijk gedefinieerd (Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (KNAW), 2009). Het huidige artikel gaat slechts over de klassieke staartdeling versus de hapmethode, en heeft niet de pretentie een algemenere vergelijking tussen traditioneel en realistisch rekenen te maken.

De vraag welk algoritme beter te onderwijzen is, klassieke staartdeling of hapmethode, wordt vaak gevoerd met theoretische of anekdotische overwegingen. Er is weinig empirisch onderzoek over. De KNAW (2009, paragraaf 4.2 en 4.4) bespreekt wel diverse onderzoeken waarbij curricula worden vergeleken, waaronder het MORE-onderzoek van Gravemeijer et al. (1993). In zulke onderzoeken wordt niet geïntervenieerd maar geconstateerd, en dientengevolge is causaliteit moeilijk vast te stellen. Bovendien gaan deze vergelijkingen over het hele curriculum en niet specifiek over de staartdeling. Het KNAW-rapport (paragraaf 4.3) bespreekt ook enkele interventiestudies, en deze gaan wel over een specifieker element van het onderwijs, maar niet over de staartdeling.

De discussie van Hickendorff et al. (2009a, 2009b; Hickendorff, 2011; Van Putten & Hickendorff, 2006) versus van den Heuvel-Panhuizen et al. (2009) gaat daarentegen wel over de staartdeling. Hickendorff et al. (2009a, p. 346) concludeerden uit gegevens van de nationale peilingen (PPON) van 1997 en 2004 dat de belangrijkste factor voor de accuraatheid bij staartdelingen was of de leerling tijdens het oplossen geschreven notities maakte of niet. Leerlingen die geen geschreven notities maakten, scoorden duidelijk slechter dan de leerlingen die wel geschreven notities maakten, en dit effect was groter voor zwakke en matige leerlingen. Hickendorff et al. concluderen dat er, bij leerlingen die wel geschreven aantekeningen maakten, geen significant verschil was in accuraatheid tussen de klassieke staartdeling en de hapmethode. Deze conclusie wordt gevolgd door de conclusie dat matige studenten het wat beter deden met de klassieke staartdeling (Hickendorff, et al., 2009a, p. 347). Het onderzoek van Hickendorf et al. is echter constaterend en niet interveniërend. Bovendien gaat dit onderzoek over de strategie die de leerling gebruikt, hetgeen niet noodzakelijk gelijk is aan de methode die wordt onderwezen.

In elk geval betreffen de genoemde discussies en onderzoeken vooral het onderwijs op de basisschool. Recent is echter ook voor het mbo een rekenexamen verplicht gesteld. De vraag welk algoritme beter is te onderwijzen, kan daarom ook voor het mbo gesteld worden, en dit levert niet noodzakelijk hetzelfde antwoord op bij basisscholen. In dit artikel zullen de twee algoritmen worden vergeleken in een mbo-opleiding.

Als onderzoeksmethode is hier niet gekozen voor een theoretische discussie of een vragenlijst onder docenten, maar voor een empirische vergelijking waarbij in het onderwijs werd geïntervenieerd. Leerlingen binnen eenzelfde opleiding kregen onderwijs in het ene of het andere algoritme, en daarna werd de gemiddelde vooruitgang in rekenvaardigheid vergeleken. Dit is vooralsnog alleen onderzocht in het Da Vinci College Dordrecht. Het is op voorhand duidelijk dat de generaliseerbaarheid van het onderzoek daardoor beperkt zal zijn, maar het kan fungeren als een pilot voor een grootschaliger toekomstig onderzoek. Samenvattend hebben we de volgende vraagstelling.

Vraagstelling

Welk algoritme (klassieke staartdeling of hapmethode) leidt bij onderwijs in mbo-klassen tot de grootste vooruitgang in rekenvaardigheid?

In de volgende paragraaf zullen we eerst nader ingaan op een aantal didactische aspecten die specifiek zijn voor het mbo. De rest van het artikel is een onderzoeksrapport, met als achtereenvolgende paragrafen: methode, resultaten, discussie. In de discussie zullen ook diverse beperkingen van het onderzoek worden besproken.

Didactische analyse van onderwijs in staartdelen op het mbo

Zoals in de inleiding werd opgemerkt, is het onderwijs in staartdelen vooral onderzocht in het basisonderwijs. Rekenonderwijs in het mbo heeft echter diverse specifieke uitdagingen.

1. Het staartdelen is al eerder onderwezen. Leerlingen hebben dit gehad op de basisschool, en ze zouden het ook op het vmbo gehad moeten hebben.
2. Daarna zal de vaardigheid ernstig zijn weggezakt. Bij cognitieve vaardigheden geldt vaak ‘use it or lose it’. Terwijl kinderen decennia geleden misschien nog wel eens in een situatie kwamen waarin zij buiten school iets wilden uitrekenen, en dat noodgedwongen uit het hoofd of met pen en papier deden, zullen zij dat tegenwoordig met hun mobiel oplossen.
3. Er kunnen grote verschillen zijn in de wijze waarop dit in het voorgaande onderwijs is geleerd, en de mate waarin dat leren succesvol was. Vervolgens kan ook de mate waarin het onderwezene onthouden is per persoon verschillen.

Er zijn dan ook grote verschillen in de vaardigheid van de leerlingen bij de aanvang van het onderwijs over staartdelen op het mbo. Enerzijds zijn er leerlingen die op dat moment vrijwel alle deelsommen correct beantwoorden; anderzijds zijn er leerlingen die bijna alles fout beantwoorden. Deze grote individuele variatie maakt het voor rekendocenten in het mbo moeilijk om een goede benadering te vinden. Enerzijds zijn er leerlingen die duidelijk nog iets moeten leren of ophalen. Maar als de docent aandacht aan hen schenkt, al dan niet klassikaal, zullen de andere leerlingen zich weinig uitgedaagd voelen, wat al snel leidt tot ordeverstoring.

Een belangrijke vraag is natuurlijk welk algoritme de leerlingen in hun eerdere onderwijs hebben gehad. Jansen et al. (2005) stellen dat in vrijwel alle Nederlandse basisscholen realistisch rekenonderwijs wordt gegeven, hetgeen vermoedelijk samengaat met het onderwijzen van de hapmethode, maar niet uitsluit dat ook de staartdeling wordt onderwezen. De tweede auteur van het huidige artikel, die 15 jaar lang rekendocent in het mbo was, koos er meestal voor om beide algoritmen in de les te bespreken. Zijn persoonlijke ervaring is dat veel leerlingen tijdens het onderwijzen van de hapmethode signalen van vage herkenning tonen, en dat zij die bij de klassieke staartdeling niet tonen. Echter, tegelijkertijd is zijn ervaring dat sommige leerlingen tijdens het onderwijzen van de klassieke staartdeling concluderen dat die ‘toch

veel beter?' is, en niet waarderen dat er ook tijd aan een 'inferieure' methode is besteed. Deze ervaringen leidden mede tot de vraagstelling van dit artikel.
Een belangrijk verschil met onderwijs in de basisschool is dat leerlingen in het mbo lichamelijk veel ouder zijn. We moeten daarom verwachten dat hun brein verder volgroeid is en dat diverse cognitieve functies sterker ontwikkeld zijn, hoewel dat misschien niet de functies zijn waar hun eigen aandacht naar uitgaat. Verder staan zij in tijd dichter bij de naderende beroepspraktijk, en voor leerlingen in financiële beroepen is rekenen daarbij niet uitgesloten. Vanwege deze verschillen is het denkbaar dat leerlingen baat hebben bij een ander algoritme dan optimaal is op de basisschool. Met andere woorden, zelfs als bewezen zou zijn dat leerlingen op de basisschool beter de hapmethode kunnen leren, dan is daarmee niet uitgesloten dat zij op latere leeftijd beter de klassieke staartdeling kunnen leren.
Een ander verschil met onderwijs op de basisschool is de hoeveelheid tijd die beschikbaar is voor het staartdelen. Binnen de opleidingen die in dit artikel werden onderzocht, is staartdelen slechts één van de vele onderwerpen die in het domein 'Getal' worden behandeld. In het normale curriculum van de hier onderzochte opleidingen worden slechts één of twee lessen aan staartdelen besteed. De docenten zijn van mening dat het onderwerp zich niet leent om lang bij stil te staan, omdat het gaat om het opfrissen van iets wat al bekend zou moeten zijn. De andere lessen gaan onder andere over optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, breuken, optellen en aftrekken met breuken, vermenigvuldigen en delen met breuken en procenten.

Methode

Subjecten

Voor het onderzoek werd zeven mbo-klassen van het Da Vinci College geselecteerd waar volgens het programma rekenen moest worden onderwezen. In de tabel in afbeelding 1 wordt beschreven bij welke opleiding en niveau deze klassen behoren. Het plan was om binnen elke opleiding bij minstens één klas de klassieke staartdeling te onderwijzen, en bij minstens één klas de hapmethode te onderwijzen.

Klas	Opleiding en niveau
LPO014AMA LPO014AMB LPO014AMD	secretarieel en financiële beroepen niveau 2
LPO014PBA LPO014PBB	beveiligers niveau 2
LPO014FMA LPO014FMB	facilitair medewerker niveau 2

Afbeelding 1. Overzicht van klassen en hun opleiding en niveau.

De activiteiten in het onderzoek behoren tot het normale curriculum. Daarom is er volgens ethische richtlijn 8.05 van de American Psychological Association (2010) geen informed consent nodig. Alle betrokken leerlingen zijn mondeling op de hoogte gebracht van het onderzoek waar zij aan deelnamen, en zij waren niet verplicht mee te doen. Het Da Vinci College heeft toestemming gegeven voor publicatie van de bevindingen, mits de privacy is gewaarborgd.

Algoritmen

Er werden twee verschillende algoritmen onderwezen: (1) de klassieke staartdeling, en (2) de hapmethode. Voor elk van de twee algoritmen werd een les uitgeschreven. Deze uitgeschreven lessen zijn opgenomen in bijlagen A en B. Het te onderwijzen algoritme werd random toegewezen aan de klassen binnen elke opleiding. In de tabel in afbeelding 2 wordt beschreven welke klas welk algoritme kreeg toegewezen. De twee klassen met beveiligers zijn echter uitgevallen door een onvoorziene roosterwijziging.

Klas	Algoritme
LPO014AMA	Staartdeling
LPO014AMB	Hapmethode
LPO014AMD	Hapmethode
LPO014PBA	Hapmethode*
LPO014PBB	Staartdeling*
LPO014FMA	Staartdeling
LPO014FMB	Hapmethode

*) Uitgevallen

Afbeelding 2. Overzicht van klassen en toegewezen algoritmen.

Zoals te lezen valt in bijlagen A en B, kregen de leerlingen tijdens de les eerst een klassikale uitleg met voorbeelden. Hierna moesten zij de oefeningen (a) tot en met (d) maken, waarbij interactie mogelijk was met elkaar en met de docent. Daarna moesten zij de opdrachten 1 tot en met 3 (elk bestaande uit 10 sommen) individueel maken, waarbij er geen planmatige interactie was. Deze werden vervolgens klassikaal nabesproken, waarbij er uiteraard wel interactie was. De leerlingen waren vertrouwd met zowel klassikale als interactieve lesvormen. Tijdens de interactieve gedeelten gaf de docent steeds hulp die paste bij het aan de klas toegewezen algoritme. Het gebeurde soms dat een leerling tijdens het interactieve gedeelte besloot toch het andere algoritme te gebruiken, maar die leerlingen vroegen daar dan geen hulp bij.
De les duurde bij elkaar ongeveer 40 minuten. Dat lijkt misschien kort, maar de totale tijd die men in deze curricula aan staardelen besteedt is nu eenmaal niet veel langer, zoals uitgelegd in de paragraaf met de didactische analyse. Wellicht zouden we in de data een groter verschil tussen de twee algoritmen zien als we ze elk tien lessen lang onderwezen, maar dat zou dan niet generaliseerbaar zijn naar de praktijk waar ze slechts één uur worden onderwezen. De les werd gegeven nadat optellen, aftrekken, en vermenigvuldigen al in eerdere lessen van dezelfde cursus waren behandeld.
Met het globale rekenverleden van de leerlingen is rekening gehouden door deze korte lesduur te kiezen. Er is echter geen rekening gehouden met de individuele verschillen in rekenverleden. Dat werd door de docenten in deze situatie, waar het ging om opfrissen van het staartdelen, onhaalbaar gevonden. De vraagstelling van dit onderzoek is nu juist wat in een klassikale les de beste methode is, in een situatie waarbij geen rekening met individuele verschillen wordt gehouden.

Metingen

De leerlingen maakten twee rekentoetsen met elk 17 vragen (zie bijlage C en D voor een overzicht). Bij elk van de vragen moest een deling worden uitgevoerd. Beide toetsen bestonden uit 10 vragen zonder context met delen zonder rest; vijf vragen zonder context waarbij de uitkomst op één decimaal moest worden gegeven; en twee vragen met context waarbij ook moest worden opgeteld en waarbij de uitkomst in euro's (twee decimalen) moest worden gegeven. Het cijfer op de toets telde niet mee in de eindbeoordeling van het vak. Dit is aan de leerlingen verteld.
De reden om te kiezen voor overwegend kale vragen is dat we het effect op de numerieke bewerkingen wilden zien, zonder dat dit vervuild wordt door talige effecten. We beseffen dat er een hele discussie kan zijn over hoe men 'rekenen' moet definiëren, en onze keuze betekent niet dat wij vinden dat elke rekentoets deze vorm moet hebben. Echter nu, voor deze vraagstelling, leken kale vragen ons het meest directe meting. Overigens, zoals beschreven, waren er ook opgaven met context opgenomen, en deze zijn voor de zekerheid apart geanalyseerd.
Bij elke leerling werd voorafgaande aan de les de ene toets, en na de les de andere rekentoets afgenomen. Er bestond vooraf enige discussie over hoe de verschillende vragen van de rekentoetsen gewogen moesten worden. De ene auteur wilde de vragen verschillend wegen, de andere auteur zag daar weinig heil in. Besloten werd om na het verzamelen van de data de interne-consistentiebetrouwbaarheid te berekenen voor zowel gewogen als ongewogen scores, en daarvan af te laten hangen of de vragen gewogen zouden worden.

Resultaten

Uitval

Zoals hierboven reeds vermeld, zijn de twee klassen met beveiligers uitgevallen door een onvoorziene roosterwijziging. Bij klas FMB zijn slechts van drie leerlingen gegevens verkregen. Omdat er zo weinig gegevens uit deze klas zijn, zal deze klas niet worden gebruikt. Daarom kan ook FMA niet worden gebruikt voor vergelijkingen van de algoritmen. Deze klas zal wel worden gebruikt bij het bepalen van de betrouwbaarheden van de toetsen. Bij drie leerlingen van klas AMD rees achteraf twijfel over het onderwezen algoritme, omdat de docent hierover tegenstrijdige informatie gaf. Daarom zijn deze drie leerlingen uit deze klas buiten beschouwing gelaten in de berekeningen waarin de twee algoritmen worden vergeleken. Hun gegevens zijn wel gebruikt voor het berekenen van de betrouwbaarheden van de rekentoetsen.

Betrouwbaarheden

In de tabel in afbeelding 3 staan de interne-consistentiebetrouwbaarheden van de twee rekentoetsen (N = 44). In de rij 'ongewogen' staat deze betrouwbaarheid voor het geval dat elke vraag van de toets even zwaar meetelt in het cijfer. In de rij 'gewogen' staat de betrouwbaarheid voor het geval sommige vragen veel zwaarder meetellen dan andere vragen, zoals werd voorgesteld door de maker van de toetsen. Er zijn verschillende manieren om een interne-consistentiebetrouwbaarheid te schatten uit data. In dit geval is gekozen voor Cronbach's alfa en Guttman's Lambda 2 (zoals aangeraden door Ellis, 2013; Drenth & Sijtsma, 2006).

	Voormeting			Nameting	
	Alfa	Lambda 2		Alfa	Lambda 2
Gewogen	.460	.541		.607	.655
Ongewogen	.799	.836		.777	.797

Afbeelding 3. Interne-consistentie-betrouwbaarheden (alfa en lambda 2) van de voormeting en de nameting met en zonder weging van de vragen.

Zoals uit afbeelding 3 blijkt, is de betrouwbaarheid van de ongewogen cijfers steeds hoger dan die van de gewogen cijfers, en daarom zullen de ongewogen cijfers worden gebruikt. Het 95%-betrouwbaarheidsinterval van alfa voor deze cijfers is [.701, .876] bij de voormeting en [.668, .862] bij de nameting.

Volgens Nunnally en Bernstein (1994) is een betrouwbaarheid van ongeveer .70 hoog genoeg voor voorbereidend onderzoek, en is een betrouwbaarheid van ongeveer .80 hoog genoeg voor groepsonderzoek. Volgens deze maatstaf zouden de betrouwbaarheden van de ongewogen scores voldoen. Ellis (2013) betoogt dat rekening moet worden gehouden met de duur van de experiment en de meting. In dit geval, met een les van 40 minuten en een meting van twee keer 30 minuten, zou de efficiënte waarde van de betrouwbaarheid .40 zijn. Volgens deze maatstaf zouden de betrouwbaarheden van de ongewogen scores hoog genoeg zijn.

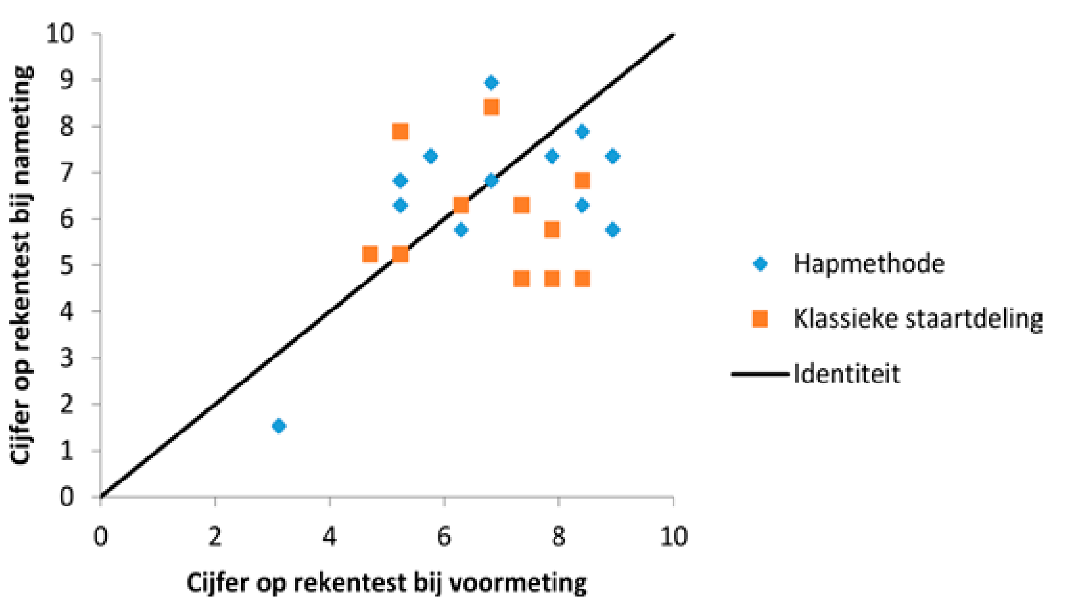
Binnen elke klas is ook de correlatie tussen de voormeting en de nameting bepaald. Deze correlaties zijn weergegeven in de tabel in afbeelding 4.

Klas	Correlatie ongewogen cijfer	Correlatie gewogen cijfer
LPO014AMA	-.19	-.11
LPO014AMB	.57	.50
LPO014AMD	.65	.51
LPO014FMA	.75	.69

Afbeelding 4. Correlaties tussen voormeting en nameting per klas.

Beschrijvende statistieken

Een plot van de cijfers bij voormeting en nameting voor de klassen AMA, AMB en AMD is weergegeven in afbeelding 5. In de paragraaf Uitval is uitgelegd waarom klas FMA buiten beschouwing wordt gelaten. Merk op dat er inderdaad op de voormeting al een grote spreiding is: het minimum is een 3 en het maximum is een 9. Dit stemt overeen met wat in de paragraaf met de didactische analyse werd beschreven, dat de aanvangsverschillen groot zijn.



Afbeelding 5. Spreidingsdiagram van voormeting en nameting uitgesplitst naar algoritme. Bij de *t*-toets op de vooruitgangsscores wordt getoetst of de middelpunten van de twee puntenwolken even ver boven de diagonale lijn liggen.

Per leerling is de vooruitgang berekend als het cijfer op de nameting min het cijfer op de voormeting. Aantallen, gemiddelden, en standaarddeviaties van voormeting, nameting en vooruitgang zijn weergegeven in de tabel in afbeelding 6.

		Voormeting		Nameting		Vooruitgang	
Algoritme	n	m	s	m	s	m	s
hapmethode	18	6.62	1.70	6.38	1.62	-0.24	1.54
staartdeling	11	6.87	1.33	6.01	1.28	-0.87	2.01

Afbeelding 6. Gemiddelde (*m*), standaarddeviatie (*s*) en aantal waarnemingen (*n*) van voormeting, nameting en vooruitgang, uitgesplitst naar algoritme.

Vergelijking op voormetingen

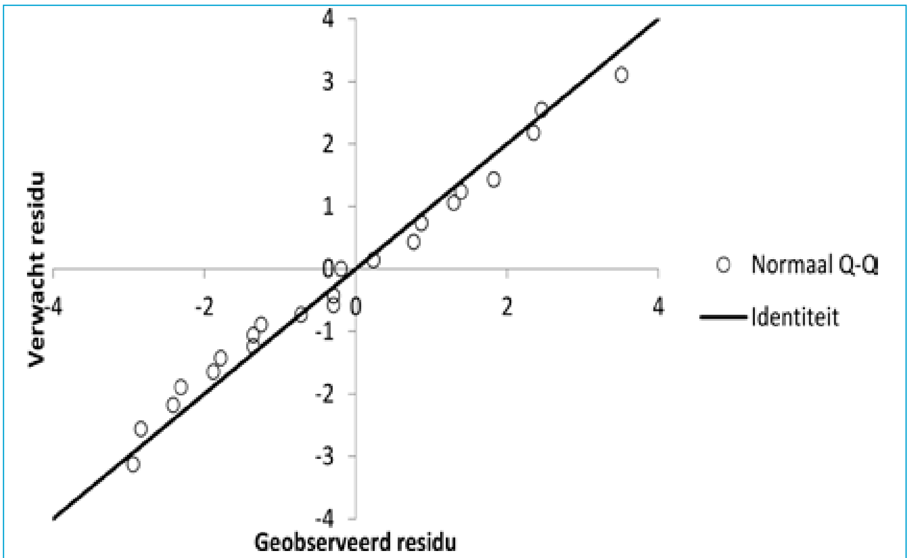
Met een *t*-toets voor onafhankelijke steekproeven is eerst, ter controle, onderzocht of er op de voormeting een significant verschil was tussen de gemiddelden van de klassen die het ene of het andere algoritme kregen. Een significant verschil zou betekenen dat de groepen minder goed vergelijkbaar zijn omdat zij verschillen in aanvangsniveau. Alleen de klassen AMA, AMB, en AMD zijn hier gebruikt, waarbij de twee klassen met de hapmethode zijn samengevoegd. Uit de *t*-toets bleek dat er op de voormeting geen significant verschil tussen de gemiddelden was ($t(27) = -.423$, tweezijdige $p = .676$).

Vergelijking op vooruitgang

Met een *t*-toets voor onafhankelijke steekproeven is onderzocht of er op de vooruitgangsscore een significant verschil was tussen de klassen die het ene of het andere algoritme kregen. Door het gebruik van vooruitgangsscores in plaats van de nameting-scores zijn eventuele verschillen op de voormeting minder van belang. Alleen de klassen AMA, AMB, en AMD zijn hier gebruikt, waarbij de twee klassen met de hapmethode zijn samengevoegd. Uit de *t*-toets bleek dat er geen significant verschil was in de gemiddelde vooruitgang van de klas met de staartdeling versus de klassen met de hapmethode ($t(27) = .952$, tweezijdige $p = .350$). Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het verschil (de gemiddelde vooruitgang bij de hapmethode min de gemiddelde vooruitgang bij de klassieke staartdeling) was [-.73, 1.99].

Als maat voor gestandaardiseerde effectgrootte wordt bij een *t*-toets vaak Cohen's *d* gebruikt, waarbij in sociale wetenschappen wel de conventie wordt gehanteerd dat men $d = .8$ 'groot' noemt en $d = .5$ 'matig' en $d = .2$ 'klein' (Cohen, 1988; KNAW, 2009). In dit geval was Cohen's *d* gelijk aan 0.36 en het 95%-betrouwbaarheidsinterval hiervan was [-0.40, 1.12]. In deze steekproef zou er volgens de genoemde conventie dus een klein effect ten gunste van de hapmethode zijn, maar blijkens het betrouwbaarheidsinterval is dit in de populatie misschien een groot effect (1.12) ten gunste van de hapmethode of een klein effect (-0.40) ten gunste van de klassieke staartdeling.

Men kan zich afvragen in hoeverre hier is voldaan aan de assumptie van normaalverdeeldheid die nodig is bij *t*-toetsen. Een *Q*-*Q*-plot van de residuen liet geen grote afwijkingen van normaalverdeeldheid zien (zie afbeelding 7). De Shapiro-Wilk-test toont dat er geen significante afwijking van normaalverdeeldheid is ($p = .735$), zodat er weinig reden is om aan de uitkomsten van de bovenstaande *t*-toets te twijfelen. Voor de zekerheid is ook nog een nonparametrische toets gedaan, waarbij de aanname van normaalverdeeldheid niet nodig is. Hiervoor werd een Mann-Whitney-toets verricht met vooruitgang als afhankelijke variabele en algoritme als onafhankelijke variabele. Ook bij deze toets bleek het verschil tussen de twee algoritmen niet significant ($U = 79$, tweezijdige asymptotische $p = .366$). Ook als men slechts kijkt naar het percentage leerlingen met een vooruitgang groter dan of gelijk aan nul, is het verschil tussen de algoritmen klein (9/18 = 50.0% voor de hapmethode en 5/11 = 45.5% voor de klassieke staardeling) en niet significant blijkens een chi-kwadraattoets ($\chi^2(1) = 0.056$, $p = .812$).



Afbeelding 7. Normale Q-Q-plot van de residuen in de t-toets op vooruitgangsscores.

Voor de zekerheid is ook onderzocht wat de resultaten zijn als de klas FMA mee wordt genomen. In dat geval zijn de groepen ongeveer even groot, namelijk n = 18 (hapmethode) en n = 23 (klassieke staartdeling). De resultaten zijn in essentie hetzelfde, namelijk $t(39) = -0.228$, tweezijdige $p = .821$, $CI95\% = [-1.19, 0.95]$, Cohen's $d = -0.07$ met $CI95\% = [-0.69, 0.55]$. Wanneer men de eerder genoemde conventie voor de termen groot – matig – klein toepast, zou dit laatste betekenen dat het ware effect ligt tussen een matig effect (-0.69) ten gunste van de klassieke staartdeling en een matig effect (0.55) ten gunste van de hapmethode.

Het is denkbaar dat het algoritme alleen bij sommige soorten opgaven effect had. Men zou kunnen betogen dat de kale opgaven zwaar wogen en dat het juist bij deze opgaven weinig uitmaakt wat het algoritme is. Daarom werden de toetsopgaven nog in vier typen verdeeld:

1. Eenvoudig: de uitkomst heeft 1 cijfer (opdrachten 1a tot en met 1f)
2. Complex-kort: de uitkomst heeft 2 of meer cijfers, en de teller is kleiner dan 1000 (opdrachten 1g tot en met 1j)
3. Complex-lang: de uitkomst heeft 2 of meer cijfers, en de teller is minstens 1000 (opdrachten 2a tot en met 2e)
4. Context: de vraag is ingebed in een context (opdrachten 3 en 4)

Op grond hiervan zijn per leerling en per meetmoment nog vier aparte subtest scores berekend; zeg respectievelijk E1, CK1, CL1, en Co1 op de voormeting, en E2, CK2, CL2, en Co2 op de nameting. Vervolgens zijn hiermee per leerling vier verschilscores berekend, namelijk Edif = E2 – E1, CKdif = CK2 – CK1, CLdif = CL2 – CL1, en CoDif = Co2 – Co1. Vervolgens is elk van deze verschilscores onderworpen aan zowel een t-toets voor onafhankelijke steekproeven als een Mann-Whitney-toets, waarbij het algoritme de onafhankelijke variabele was. Dat leverde echter geen andere inzichten op: al deze verschillen waren non-significant.

Andere analyse-varianten

Er zijn nog diverse andere analyses gedaan, waaronder een covariantie-analyse. In alle gevallen werd geen significant verschil tussen de algoritmen gevonden.

Enkele voorbeelden van uitwerkingen van leerlingen

Leerling A, tijdens dit onderzoek onderwezen in de hapmethode, had bij de nameting een cijfer rond de 6. De leerling gebruikt kladpapier waaruit blijkt dat hij of zij de hapmethode gebruikte. Deze leerling had de volgende resultaten:

Opgave 1: helemaal goed, geen kladpapier gebruikt
Opgave 2a en b: gemaakt met kladpapier, maar fout
Opgaven 2c t/m 4: niet gemaakt

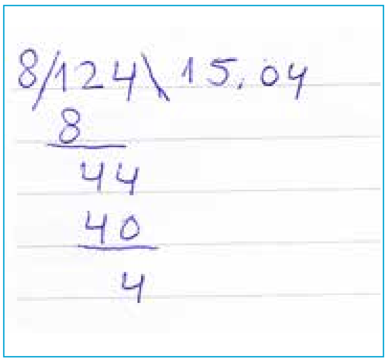
Het klad bij opgaven 2a en 2b bestond voor beide opgaven uit ongeveer 20 regels. Afbeelding 8 toont de uitwerking voor opgave 2a:

Als antwoord gaf de leerling '2175 en 4 over'. Dit voldeed niet aan de opdracht, waarin stond 'Afronden op 1 decimaal'. Belangrijker is dat de tussenstap 1.584 – 1200 = 1.384 fout is. De leerling gaat wel systematisch te werk, maar neemt nogal kleine hapjes van 100-vouden. Daardoor zijn er heel veel hapjes nodig, waardoor de kans dat er ergens in één of meer van die hapjes een fout wordt gemaakt vrij groot kan zijn. En uiteindelijk gebeurt dat inderdaad. Bovendien vergt de som zo waarschijnlijk veel tijd, wat misschien de reden is dat de latere sommen niet zijn gemaakt.

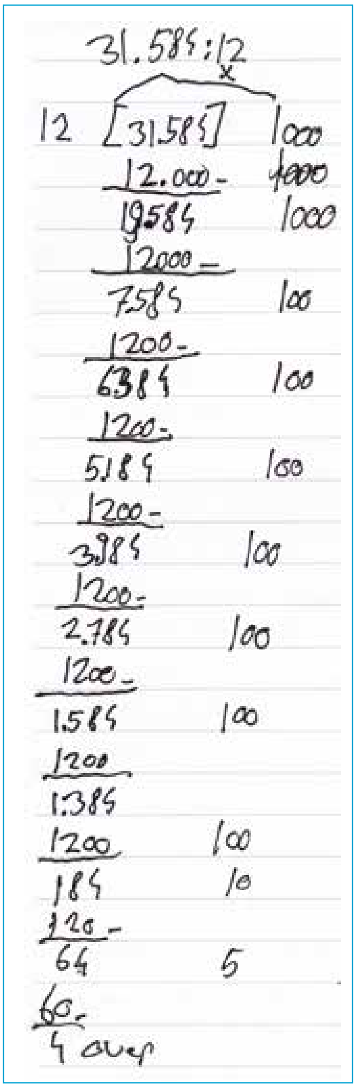
Leerling B, tijdens dit onderzoek onderwezen in de hapmethode, had bij de voormeting een cijfer de rond 5, en gebruikte toen de klassieke staartdeling. Afbeelding 9 toont de uitwerking van deze leerling bij opgave 1i.

De leerling gaf als antwoord '15.04'.

Kennelijk wist deze leerling niet meer hoe hij of zij met de rest moest omgaan, want deze fout werd ook bij andere opgaven gemaakt. Afbeelding 10 toont de uitwerking van deze leerling bij opgave 2a.

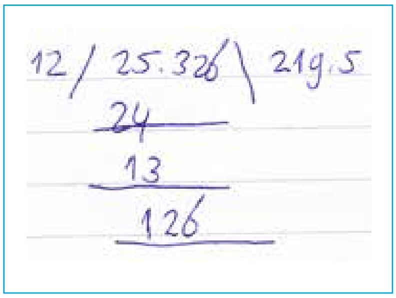


Afbeelding 9. Uitwerking bij opgave 1i.



Afbeelding 8. Uitwerking voor opgave 2a.

Als antwoord gaf de leerling ‘219.5’. De juiste uitkomst is ‘2110.5’. Het is denkbaar dat de leerling bij de laatste stap, toen hij of zij al de cijfers 21 had, heeft gedacht dat 126 / 12 = 9.5 in plaats van het correcte 126 / 5 = 10.5.



Afbeelding 10. Uitwerking bij opgave 2a.

Discussie

Op grond van empirisch onderzoek werd gevonden dat de gemiddelde vooruitgang van leerlingen bij de klassieke staartdeling niet significant verschilde van de gemiddelde vooruitgang van leerlingen bij de hapmethode binnen deze opleiding AM op niveau 2. We zullen nu een aantal mogelijke tegenwerpingen van deze conclusie bespreken, waarvan we sommigen gelijk weerleggen.

Misschien waren de rekentoetsen niet even moeilijk: Nee

Beide rekentoetsen bevatten dezelfde soort vragen. Hoewel niet is uit te sluiten dat de ene toets toevallig wat moeilijker was dan de andere, en hoewel dat mogelijk invloed heeft gehad op het verschil tussen voormeting en nameting, kan dit geen invloed hebben gehad op de verschillen tussen groepen. Alle groepen kregen immers dezelfde toetsen, namelijk toets 1 bij de voormeting en toets 2 bij de nameting.

Misschien waren de leerlingen niet genoeg gemotiveerd: Nee

De cijfers op de rekentoetsen telden niet mee voor het examen van de leerlingen. Het is mogelijk dat zij hierdoor minder gemotiveerd waren dan als het cijfer wel meetelde, en dat zij hierdoor minder hun best deden op de rekentoetsen. Dit geldt dan echter in gelijke mate in alle klassen, en kan daarom niet de afwezigheid van een significant verschil tussen algoritmen verklaren.

Het is denkbaar dat de leerlingen ongemotiveerd waren om deling op te frissen. Dit zou verklaren waarom er bij zowel het ene als het andere algoritme geen positieve gemiddelde vooruitgang was. Het is dan denkbaar dat er bij meer gemotiveerde leerlingen wel een verschil tussen de algoritmen zou zijn gevonden. Dit zou niettemin nog steeds betekenen dat men niet zomaar kan beweren dat leerlingen met het ene algoritme beter delen dan met het andere, aangezien er kennelijk eerst nog een andere voorwaarde moet zijn vervuld, namelijk dat de leerlingen gemotiveerd zijn.

Misschien konden deze leerlingen al goed delen: Nee

Het huidige onderzoek betrof mbo-leerlingen, die eerder al hebben leren delen. Dit blijkt uit het feit dat men bij de voormeting gemiddeld al meer dan een 6 als cijfer had. Het is denkbaar dat er een groter verschil zou zijn gevonden als leerlingen uit het basisonderwijs waren onderzocht die voor het eerst van hun leven leren delen. Dit zou niettemin nog steeds betekenen dat men niet zomaar kan beweren dat leerlingen met het ene algoritme beter delen dan met het andere, aangezien er kennelijk eerst nog een andere voorwaarde moet zijn vervuld, bijvoorbeeld dat het leerlingen zijn die voor het eerst leren delen. Verder lieten de scores voldoende ruimte voor verbetering.

Misschien waren de lessen te kort: Nee

Het is denkbaar dat er wel een significant verschil zou zijn gevonden als de les langer had geduurd of als er meerdere lessen aan het delen zouden zijn besteed. In vervolgonderzoek is het mogelijk om het onderzoek uit meerdere lessen te laten bestaan. Echter, daarmee zou dat toekomstige onderzoek minder relevant voor de praktijk worden. De praktijk, althans binnen deze opleidingen, is immers dat er slechts één of twee lessen aan het staartdelen worden besteed.

Misschien zijn de uitkomsten specifiek voor deze docent: Ja, misschien

Het is denkbaar dat bij andere docenten andere resultaten zullen worden gevonden, bijvoorbeeld omdat die docenten een andere persoonlijke voorkeur voor de algoritmen hebben. Ook andere eigenschappen van de docent, bijvoorbeeld taalvaardigheid en nauwkeurigheid, zouden hierbij een rol kunnen spelen. Daarom zien we dit onderzoek als slechts een pilot. In een groter onderzoek zouden meerdere docenten worden gebruikt. Daarbij zou dan ook moeten worden onderzocht of het misschien zo is dat bij sommige docenten de leerlingen meer vooruit gaan met de hapmethode, terwijl bij andere docenten de leerlingen meer vooruit gaan met de klassieke staartdeling.

De kleinste steekproef was te klein: Ja, maar beter dan niks

We hadden gepland data van zeven klassen te krijgen, maar door de uitval waren er voor de vergelijking van de algoritmen slechts data van drie klassen bruikbaar. Hierdoor waren de steekproeven nogal klein, namelijk n = 18 (hapmethode) en n = 11 (klassieke staartdeling). Met name de kleinste steekproef is de bottleneck. Dit maakt niet uit voor de kans op een fout van de eerste soort, omdat deze bij de statistische toets automatisch wordt gefixeerd op het door ons gekozen significantieniveau van $\alpha = .05$. Het maakt echter wel uit voor de power (= 1 min de kans op een fout van de tweede soort). In dit geval, als Cohen's d in de populatie de waarde $\delta = 0.8$ zou hebben, dan zou, voor een tweezijdige t-toets met $\alpha = .05$ de power .52 zijn. Dat laat te wensen over. Toch levert dit onderzoek wel informatie: Het 95%-betrouwbaarheids-interval voor Cohen's d loopt van -0.40 tot 1.12, waarbij een positieve waarde gunstig is voor de hapmethode. Het is dus onaannemelijk dat de hapmethode het zeer consistent slechter (d = -1) dan de klassieke staartdeling doet, terwijl het omgekeerde (d = 1) nog wel tot de mogelijkheden behoort maar niet het meest aannemelijke is.

Misschien waren de rekentoetsen eenzijdig: Nee

De interne-consistentiebetrouwbaarheden (Cronbach's alfa) van de gebruikte rekentoetsen (zie afbeelding 3) waren goed genoeg voor groepsonderzoek, en daarom zijn we van mening dat de rekentoetsen genoeg vragen hadden. Over de inhoud van de vragen is wel discussie mogelijk. Echter, we hebben de toetsvragen ook nog per type vraag geanalyseerd. Ook daarbinnen waren er geen significante verschillen tussen groepen. In het bijzonder met de vragen van het type Complex-Lang zonder context was er een acceptabele alfa op voormeting en nameting. Juist daar zou er een effect zichtbaar moeten zijn, gezien de aard van de vragen. Toch toonden ook zij geen significant verschil.

De tijdsintervallen tussen les en metingen waren ongelijk: Nee

Achteraf is gebleken dat de groepen niet gelijk waren wat betreft de hoeveelheid tijd tussen de les en de metingen. Klassen AMA (klassieke staartdeling) en AMB (hapmethode) hebben de voormeting gehad op 11 mei, de les op 13 mei, en de nameting op 13 mei. Klas AMD (hapmethode) heeft de voormeting gehad op 11 mei, de les op 11 mei, en de nameting op 18 mei. Echter, weglaten van klas AMD levert geen wezenlijke verandering van resultaten.

Conclusie

In de onderzochte omstandigheden - leerlingen van de opleiding AM op niveau 2 na 1 uur les van deze docent - lijkt er geen groot verschil te zijn tussen hapmethode en klassieke staartdeling wat betreft hun effect op de vooruitgang in rekenvaardigheid van leerlingen. Vermoedelijk is de effectgrootte hoogstens matig ($|d| \approx 0.5$ of kleiner). Bij een dergelijke effectgrootte is het met de data van een enkele docent met enkele klassen nauwelijks mogelijk vast te stellen wat de richting van het effect is en dit te generaliseren naar de populatie. Dat is een beperking van het huidige onderzoek. Maar tegelijkertijd maakt dit duidelijk waarom de discussie hierover lang kan duren. Het verschil is in sommige omstandigheden (namelijk de omstandigheden die wij onderzochten) zo klein, dat het voor een individuele docent eigenlijk niet te zien is, zelfs niet als hij of zij systematisch gegevens verzamelt en analyseert. De ene docent zal toevallig meer leerlingen hebben die met de klassieke staartdeling meer vooruit gaan, en de andere docent zal toevallig meer leerlingen hebben die met de hapmethode meer vooruit gaan. Daarom is ons advies om op grotere schaal te onderzoeken met welk algoritme leerlingen beter leren delen, en hoe dit afhangt van het type onderwijs, leerlingen, docenten, en het soort opgaven.

Gezien de literatuur die wij in de inleiding noemen, denken wij dat het bij een groter vervolgonderzoek verstandig is om nog meer onderscheiden te maken. Ten eerste, qua lesmethode zouden minstens drie methoden moeten worden onderzocht: (1) alleen klassieke staartdeling, (2) alleen hapmethode, en (3) zowel klassieke staartdeling als hapmethode. Overigens was dat oorspronkelijk wel onderdeel van ons onderzoeksplan, maar we hadden hiervoor niet voldoende klassen van voldoende omvang. Ten tweede zou in vervolgonderzoek ook moeten worden gedifferentieerd tussen verschillende niveaus van de leerling. Een belangrijke eigenschap van realistisch rekenen is immers de grotere keuzevrijheid in oplosstrategieën (Van den Heuvel-Panhuizen et al., 2009), en men kan zich afvragen of dat wel gunstig is voor zwakke of matige leerlingen (Van de Craats, 2007). Ten derde zouden ook interventies in het notitiegedrag van leerlingen moeten worden onderzocht, zoals in Hickendorff et al. (2010).

Literatuur

Boels, L. (2009). De staartdeling is nooit weggeweest. Over de nuance in een richtingenstrijd. *Volgens Bartjens..., 29*(1), 10-12.

American Psychological Association (2010). Ethical principles of psychologists and code of conduct. Verkregen van Http:/www.apa.org

Bruin, E. de (2008, 26 januari). De strijd om de staartdeling. *NRC Handelsblad. Verkregen* van http://www.nrc.nl

Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences (2nd ed.).* Hillsdale, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.

Craats, J. van de (2007). Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen. *Nieuw Archief voor Wiskunde, 8*, 132-136.

Drenth, P. J. D., & Sijtsma, K. (2006). *Testtheorie. Inleiding in de theorie van de psychologische test en zijn toepassingen.* Houten: Bohn Stafleu van Loghum.

Ellis, J. L. (2013). A standard for test reliability in group research. *Behavior Research Methods, 45*(1), 16-24. DOI 10.3758/s13428-012-0223-z

Gravemeijer, K., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Van Donselaar, G., Ruesink, N., Streefland, L., Vermeulen, W., Te Woerd, E., en Van der Ploeg, D. (1993). *Methoden in het reken-wiskundeonderwijs, een rijke context voor vergelijkend onderzoek.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Hickendorff, M. (2011). *Explanatory latent variable modeling of mathematical ability in primary school: Crossing the border between psychometrics and psychology.* Doctoral thesis. Leiden: Universiteit Leiden.

Hickendorff, M., Heiser, W.J., Van Putten, C.M., & Verhelst, N.D. (2009a). Solution strategies and achievement in Dutch complex arithmetic: Latent variable modeling of change. *Psychometrika, 74*(2), 331-350. doi:10.1007/s11336-008-9074-z.

Hickendorff, M., Heiser, W.J., Van Putten, C.M., & Verhelst, N.D. (2009b). How to measure and explain achievement change in large-scale assessments: a rejoinder. *Psychometrika, 74*(2), 367-374. doi: 10.1007/S11336-009-9124-1.

Hickendorff, M., van Putten, C. M., Verhelst, N. D., Heiser, W. J. (2010). Individual differences in strategy use on division problems: Mental versus written computation. *Journal of Educational Psychology, 102*(2), 438-452.

Janssen, J., van der Schoot, F., & Hemker, B. (2005). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4 (Fourth assessment of mathematics education at the end of primary school).* Arnhem: CITO.

Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (2009). *Rekenonderwijs op de basisschool. Analyse en sleutels tot verbetering. Advies KNAW-Commissie rekenonderwijs basisschool.* Amsterdam: KNAW.

Nunnally, J. C., & Bernstein, I. H. (1994). *Psychometric theory (3rd ed.).* New York: McGraw-Hill.

Ros, B. (2009). Staartdelen of happen? Een pittig tweegesprek over rekenen. *Didaktief, 39*(1-2), 4-8.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2009). *Hoe rekent Nederland? Rede uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van gewoon hoogleraar in de Didactiek van het Wiskundeonderwijs aan de Faculteit Bètawetenschappen van de Universiteit Utrecht.* Utrecht: Universiteit Utrecht.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., Robitzsch, A., Treffers, A., & Köller, O. (2009). Large-scale assessments of change in student achievement: Dutch primary school students' results on written division in 1997 and 2004 as an example. *Psychometrika, 74*(2), 351-365. doi:10.1007/s11336-009-9110-7.

Van Putten, C. M., & Hickendorff, M. (2006). Strategieën van leerlingen bij het beantwoorden van deelopgaven in de periodieke peilingen aan het eind van de basisschool van 2004 en 1997. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 25*(2), 16–25.

Van Zanten, M., & Buijs, K. (2009). Aandachtspunten voor verbetering van het rekenwiskundeonderwijs – een dubbelinterview met A. Treffers en K. van Putten. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 28*(1), 76–83.

Dankwoord

De auteurs bedanken de docent R. Stelwagen van Connessione, die de eerste fase van het onderzoek heeft begeleid. Tevens bedanken zij S. Seme van het Da Vinci College, die de lessen heeft gegeven en data heeft verzameld.

In herinnering

Toolz... zonder jou was dit artikel er nooit geweest, al kende jij bij delen alleen de hapmethode.

We report an intervention study in which groups of a programme in intermediate vocational education received refreshers in two different algorithms for complex division of numbers, namely either the classical long division or the newer chunking method. The proficiency of complex division was assessed before and after the training by two different but similar tests of 17 items each. Both tests had an internal consistency reliability of about .80. There was no significant difference in progress between the group with traditional long division and the group with the chunking method. The 95% confidence interval for this difference was [-.73, 1.99], assuming that the scores on the pretest and posttest were expressed on a scale from 1 to 10. Cohen's d *was 0.36 with 95% CI [-0.40, 1.12]. A major difference between the classical long division and the chunking method was not found within the investigated circumstances. The effect size is presumably at most medium.*

Bijlage A: Les staartdeling

Om goed te kunnen delen is het handig als je de tafels (vermenigvuldigen) goed kent. Als je de uitkomst van een tafel deelt door een van beide getallen krijg je als uitkomst het andere getal.

Voorbeelden:

1. 8 x 6 = 48	dwz 48/8 = 6	en 48/6 = 8
2. 9 x 8 = 72	dwz 72/9 = 8	en 72/8 = 9
3. 14x12= 168	dwz 168/14 = 12	en 168/12= 14
4. 333x444= 147.852	dwz 147.852/333=444	en 147.852/444=333

Bij de eerste twee voorbeelden kun je de berekening nog maken zonder hulp van papier. Als je kijkt naar voorbeeld 3 en 4 wordt het steeds lastiger om het zonder papierenhulp te doen.
Delen valt onder het domein Getallen bij rekenen en dan moet je een deel van de opdrachten uit het hoofd berekenen. En met hoofdrekenen wordt bedoeld dat je geen rekenmachine of iets dergelijks mag gebruiken, maar wel pen en papier.
Zodra je niet direct het antwoord kunt geven bij een deling dan kun je gebruik maken van de staartdelingsmethode. De methode gaat als volgt te werk:

Voorbeeld 1:
Bereken 165 / 11 = ?

Op je kladpapier zet je het eerst zo op: 11 / 165 \ .....

Het getal dat gedeeld wordt komt te staan tussen de twee haken en het deelgetal zet je links.

De volgende stap is dat je van links naar rechts gaat werken door te kijken hoe vaak het deelgetal kan in het getal dat gedeeld moet worden. In deze som één maal:

```
11 / 165 \ 1..        11 / 165 \ 1...        11 / 165 \ 1...
     11                    11                     11
                           5                      55
```

Je zet 11 onder het getal 16 (je werkt van links naar rechts), je zet er een streep onder en links boven naast "\" het aantal waarmee je 11 hebt vermenigvuldigd.
Vervolgens trek je van de 16 11 af en blijft er 5 over. Van het getal 165 blijft nu het getal 5 over en en deze haal je naar beneden naast de andere 5, waardoor er 55 komt te staan.

Vervolgens ga je kijken hoe vaak de 11 in de 55 kan, de uitkomst is 5. Dit noteer je dan zo:

```
11 / 165 \ 15
     11
      55
      55
      0
```

Je ziet de uitkomst van 11 * 5, dus 5 zet je naast de 1 boven in. Rechts naast het deelgetal 165 komt 15 te staan en dat is de uitkomst. Per saldo staat onderaan het getal 0, dus het antwoord is ook precies 15.

Oefen de volgende deelsommen:

a. 306 / 18 = (17)
b. 312 / 12 = (26)
c. 2.448 / 16 = (153)
d. 8.424 / 24 = (351)

Als deze opdrachten goed gemaakt worden kun je ze onderstaande sommen zelfstandig laten maken.

Opdrachten.

Opdracht 1:

bereken de volgende sommen uit je hoofd:

1.	72 / 8 =	(9)
2.	63 / 7 =	(9)
3.	25 / 5 =	(5)
4.	32 / 4 =	(8)
5.	81 / 9 =	(9)
6.	42 / 6 =	(7)
7.	24 / 3 =	(8)
8.	40 / 8 =	(5)
9.	54 / 6 =	(9)
10.	21 / 7 =	(3)

Opdracht 2:

schrijf de deelsom op van de volgende vermenigvuldigsommen:

*Voorbeeld 5 * 9 = antwoord 45 / 9 =5 of 45 / 5 = 9*

1.	7 x 5 =	35/7	35/5
2.	11 x 3 =	33/3	33/11
3.	8 x 6 =	48/8	48/6
4.	10 x 10 =	100/10	
5.	12 x 6 =	72/6	72/12
6.	9 x 7 =	63/9	63/7
7.	4 x 8 =	32/8	32/4
8.	3 x 7 =	21/7	21/3
9.	5 x 12 =	60/5	60/12
10.	2 x 18 =	36/2	36/18

Opdracht 3:

bij de volgende deelsommen laat je met behulp van de staartdeling zien wat er uit komt:

1.	224 / 4 =	56
2.	335 / 5 =	67
3.	532 / 7 =	76
4.	900 / 8 =	112,5
5.	3.996 / 6 =	666
6.	4212 / 12 =	351
7.	9.392,5 / 17 =	552,5
8.	88.527,6 / 21 =	4.215,6
9.	25.327 / 43 =	589
10.	6.204 / 110 =	56,4

Bijlage B: Les hapmethode

Om goed te kunnen delen is het handig als je de tafels (vermenigvuldigen) goed kent. Als je de uitkomst van een tafel deelt door een van beide getallen krijg je als uitkomst het andere getal.

Voorbeelden:

1.	8 x 6 = 48	dwz 48/8 = 6	en 48/6 = 8
2.	9 x 8 = 72	dwz 72/9 = 8	en 72/8 = 9
3.	14x12= 168	dwz 168/14 = 12	en 168/12= 14
4.	333x444= 147.852	dwz 147.852/333=444	en 147.852/444=333

Bij de eerste twee voorbeelden kun je de berekening nog maken zonder hulp van papier. Als je kijkt naar voorbeeld 3 en 4 wordt het steeds lastiger om het zonder papierenhulp te doen.
Delen valt onder het domein Getallen bij rekenen en dan moet je een deel van de opdrachten uit het hoofd berekenen. En met hoofdrekenen wordt bedoeld dat je geen rekenmachine of iets dergelijks mag gebruiken, maar wel pen en papier.
Zodra je niet direct het antwoord kunt geven bij een deling dan kun je gebruik maken van de hapmethode, ook bekend als 'herhaald aftrekken'. De methode gaat als volgt te werk:

Voorbeeld 1:
Bereken 165 / 11 = ?

Op je kladpapier zet je het eerst zo op: 11 / 165 \ .....

Het getal dat gedeeld wordt komt te staan tussen de twee haken en het deelgetal zet je links.

De volgende stap is schatten hoe vaak 11 in de 165 past: 10 keer

Eerste eenvoudige schatting is 10 x11=110
Vervolgens blijft er 55 over en dat past nog vijf keer.

11 /165\ 10 110	11 /165 \10 110 55	11 / 165\ 10 11 \ 55\ 5 55\ 0\15

Je neemt eerst een grote 'hap' uit 165, namelijk 110. Dan blijft er 55 over van de 165 en daar past 11 precies 5 keer in.

Ander voorbeeld: hoeveel is 4501 gedeeld door 14?
14 / 4501\
1400\ 100
3101
1400 \ 100
1701
1400\ 100
301
140\ 10
161
140\ 10
21
14 \ 1
7
7 \ 0,5
0 opgeteld: 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 1 + 0,5 = **321,5**

Wat we rechts genoteerd hebben tellen we bij elkaar op : 100+100 enz.
Oefen de volgende deelsommen:

a.	306 / 18 =	(17)
b.	312 / 12 =	(26)
c.	2.448 / 16 =	(153)
d.	8.424/ 24=	(351)

Als deze opdrachten goed gemaakt worden kun je ze onderstaande sommen zelfstandig laten maken.

Opdrachten.

Opdracht 1:

bereken de volgende sommen uit je hoofd:

1.	72 / 8 =	(9)
2.	63 / 7 =	(9)
3.	25 / 5 =	(5)
4.	32 / 4 =	(8)
5.	81 / 9 =	(9)
6.	42 / 6 =	(7)
7.	24 / 3 =	(8)
8.	40 / 8 =	(5)
9.	54 / 6 =	(9)
10.	21 / 7 =	(3)

Opdracht 2:

schrijf de deelsom op van de volgende vermenigvuldigsommen:

Voorbeeld 5 x 9 = antwoord 45 / 9 =5 of 45 / 5 = 9

1.	7 x 5 =	35/7	35/5
2.	11 x 3 =	33/3	33/11
3.	8 x 6 =	48/8	48/6
4.	10 x 10 =	100/10	
5.	12 x 6 =	72/6	72/12
6.	9 x 7 =	63/9	63/7
7.	4 x 8 =	32/8	32/4
8.	3 x 7 =	21/7	21/3
9.	5 x 12 =	60/5	60/12
10.	2 x 18 =	36/2	36/18

Opdracht 3:

bij de volgende deelsommen laat je met behulp van de hapmethode zien wat er uit komt:

1.	224 / 4 =	56
2.	335 / 5 =	67
3.	532 / 7 =	76
4.	900 / 8 =	112,5
5.	3.996 / 6 =	666
6.	4212 / 12 =	351
7.	9.392,5 / 17 =	552,5
8.	88.527,6 / 21 =	4.215,6
9.	25.327 / 43 =	589
10.	6.204 / 110 =	56,4

Bijlage C: Toets voormeting

- De toets bestaat uit 4 opdrachten.
- In totaal krijg je 30 minuten de tijd.

Opdracht 1.

(10 punten, 1 punt per goed antwoord)

a. 72 / 9 =
b. 81 / 9 =
c. 72 / 6 =
d. 24 / 3 =
e. 30 / 6 =
f. 49 / 7 =
g. 125 / 5 =
h. 121 / 11 =
i. 124 / 8 =
j. 95,2 / 7 =

Opdracht 2.

(10 punten, 2 punten per goed antwoord)

Afronden op 1 decimaal.

a. 25.326 / 12 =
b. 31.016 / 16 =
c. 10.032 / 15 =
d. 51.608 / 11 =
e. 28.111 / 13 =

Opdracht 3.

(5 punten, goed of fout)

Je bent samen met vijf vrienden wezen stappen in Rotterdam. Het was een fantastische avond, maar waarschijnlijk ook een dure avond. Piet heeft alles voorgeschoten en jullie hebben afgesproken dat je de volgende dag het eerlijk zult delen. Piet heeft de volgende uitgaven gedaan:

- Restaurant € 163.50
- Bioscoopkaartjes € 66.00
- Bioscoop snoep-drank € 73.80
- Bar Loge 90 € 215.10

Vraag: hoeveel moet jij Piet betalen?

Opdracht 4.

(15 punten, goed of fout)

Opa Hansen vindt dat het tijd wordt om een deel van zijn erfenis te gaan verdelen. Voor zich zelf heeft hij niet zo veel meer nodig en zijn kinderen en kleinkinderen kunnen het goed gebruiken. Nu heeft Opa Hansen 3 zonen, 2 dochters en 12 kleinkinderen. Opa gaat zijn kinderen drie maal zoveel geven dan zijn kleinkinderen. In totaal heeft opa € 85.050,00 te verdelen.
Hoeveel krijgt een kleinkind uit de erfenis van opa?

Bijlage D: Toets nameting

- De toets bestaat uit 4 opdrachten.
- In totaal krijg je 30 minuten de tijd.

Opdracht 1.

(10 punten, 1 punt per goed antwoord)

a. 54 / 6 =
b. 36 / 9 =
c. 42 / 6 =
d. 45 / 5 =
e. 40 / 8 =
f. 27 / 9 =
g. 156 / 6 =
h. 144 / 12 =
i. 139,5 / 9 =
j. 108,8 / 8 =

Opdracht 2.

(10 punten, 2 punten per goed antwoord)

Afronden op 1 decimaal.

a. 31.584 / 12 =
b. 56.041 / 16 =
c. 20.105 / 15 =
d. 46.785 / 11 =
e. 26.444 / 13 =

Opdracht 3.

(5 punten, goed of fout)

Jij bent samen met je twee zussen, je vader en moeder uit geweest in Breda. Het was een gezellige avond, maar waarschijnlijk ook een dure avond. Pa heeft alles betaald en jij bent nieuwsgierig hoeveel het per persoon heeft gekost. Pa heeft de volgende uitgaven gedaan:

- Restaurant € 213.50
- Bioscoopkaartjes € 73.00
- Bioscoop snoep-drank € 66.80
- Café de Bommel € 165.10

Vraag: hoeveel heeft het per persoon gekost?

Opdracht 4.

(15 punten, goed of fout)

In de buurt met jouw postcode wonen er 30 gezinnen waarvan er 18 gezinnen, waaronder jij, mee doen aan de postcode loterij. Van de 18 gezinnen hebben er 6 een volledige kaart gekocht en 12 (waaronder jij) een halve kaart. Met een halve kaart heb je ook maar recht op de helft van de prijs ten opzichte van mensen met een volledige kaart. Mei is jullie maand. Er is een prijs op jullie postcode gevallen van € 722.400,00.
Hoeveel krijg jij van deze prijs uitgekeerd voor het halve lot?