Handig gebruiken van kladpapier bij de kennisbasistoets

Studenten aan de lerarenopleiding basisonderwijs maken in het tweede of derde studiejaar een landelijke kennisbasistoets rekenen-wiskunde. In deze bijdrage analyseren we werk van studenten. Aan de hand van typische uitwerkingen van studenten die veel noteerden bij de opgaven gaan we na hoe de studenten de opgaven aanpakken. Deze aanpakken gebruiken we vervolgens om tot overwegingen te komen hoe deze studenten verder geholpen zouden kunnen worden.

Inleiding

De kennisbasis rekenen-wiskunde werd ontwikkeld als een van de reacties op de maatschappelijke zorgen rond de kwaliteit van het Nederlandse reken-wiskundeonderwijs (KNAW, 2009; Van Zanten, Barth, Faarts, Van Gool, & Keijzer, 2009; Van Zanten, 2010). Deze kennisbasis beschrijft de basiskennis voor het vak rekenen-wiskunde voor (aanstaande) leraren. In de kennisbasis is daarvoor zowel aandacht voor de didactische kennis als voor de vakkennis van de leraar. De Vereniging Hogescholen besloot dat de kennisbasis door de opleidingen getoetst zou moeten worden. De opleidingen moeten dat zelf regelen voor de beschreven didactische kennis. De vakkennis wordt vanaf 2013 landelijk getoetst (10voordeleraar, 2014).
Deze landelijke toetsing leidde in het verleden tot verschillende kritische reacties van opleiders (Lit, 2010; Lit, 2011; Kool, 2011; Keijzer, Garssen, & Peijnenburg, 2012). Deze kritiek kwam voort uit onbekendheid met de toets en de items in de toets en de zorg dat een aanzienlijk aantal studenten de toets mogelijk niet gaat halen. Verschillende presentaties en publicaties gaven opleiders meer zicht op de toets en ook op hoe studenten met de opgaven omgaan (zie bijvoorbeeld Keijzer & De Vries, 2014). Dit leidde ertoe dat er bij docenten meer draagvlak voor de toets ontstond. Daarnaast werd gaandeweg helder dat studenten die de toets, ook naar een of meer herkansingen, niet halen mogelijk een te laag instroomniveau hebben en dat een verhoging van dit instroomniveau leidt tot een aanzienlijk kleinere uitval op de toets (Keijzer, 2015; Keijzer, 2016; Keijzer & Boersma, in druk).
In deze Praktijktip tonen we enkele opgaven uit de kennisbasistoets die is afgenomen in juni 2015. Aan de hand van typische uitwerkingen van studenten die veel noteerden bij de opgaven gaan we na hoe de studenten de opgaven aanpakken. Deze aanpakken gebruiken we vervolgens om tot overwegingen te komen hoe deze studenten verder geholpen zouden kunnen worden. Deze beschrijving zou overigens de vraag op kunnen roepen naar de relatie tussen het gevonden kladwerk en het toetsresultaat van de student. Die relatie is met dit materiaal echter niet te leggen, omdat we het kladwerk in geanonimiseerde aangereikt kregen.

Ronald Keijzer,
Hogeschool iPabo, Amsterdam/Alkmaar

José Faarts,
Hogeschool Fontys, Sittard

Francien Garssen,
Stenden hogeschool, Assen

Keijzer, R., Faarts, J., & Garssen, F. (2016). Handig gebruiken van kladpapier bij de kennisbasistoets. *Volgens Bartjens – Ontwikkeling en Onderzoek, 36*(2), 41-46

Opgaven

Van drie opgaven viel het ons in het bijzonder op dat een deel van de studenten bij het maken van de opgaven nogal eens vastloopt. We zien verder in deze gevallen dat het vastlopen gelijk opgaat met het kiezen voor een instrumentele of inefficiënte aanpak (afbeelding 1). De opgaven waren eerder zo door ons geconstrueerd dat studenten in het voordeel zijn als ze inzichtelijke aanpakken gebruiken. Het tonen van inzicht in de wiskunde is namelijk een generiek doel van de toets en dat geldt ook voor het kunnen gebruiken van efficiënte aanpakken. In het algemeen zijn aanpakken waarin veel inzicht getoond wordt, ook efficiënte aanpakken.

1. 7007 x 77 =

2. Orden de breuken van groot naar klein:

$$\frac{11}{19} \quad \frac{13}{21} \quad \frac{19}{41} \quad \frac{21}{43}$$

3. Met welk getal tussen de 25 en 35 moet je 0,0909090909... vermenigvuldigen om een geheel getal te krijgen?

Afbeelding 1: Drie opgaven uit de kennisbasistoets (juni 2015)

Een efficiënte aanpak bij opgave 1 is het handig gebruiken van de getalrelatie 77 = 7 x 11. Als een student deze aanpak gebruikt, kan hij of zij de opgave herordenen tot 7007 x 7 x 11, wat redelijk snel leidt tot de optelling 49049 + 490490 = 539539. Een student kan ook gebruik maken van de gelijkheid 7007 = 1001 x 7. Als de student hiervan gebruik maakt, hoeft de student feitelijk alleen 7 x 77 uit te rekenen, omdat het vermenigvuldigen met 1001 betekent dat de uitkomst (539) twee keer achter elkaar geplaatst moet worden, namelijk door het samennemen van 1000 x 539 = 539000 en 1 x 539 = 539. Bij deze opgave is overigens het handig rekenen niet echt nodig om efficiënt te werk te gaan. Het cijferen kan hier ook een passende aanpak zijn.

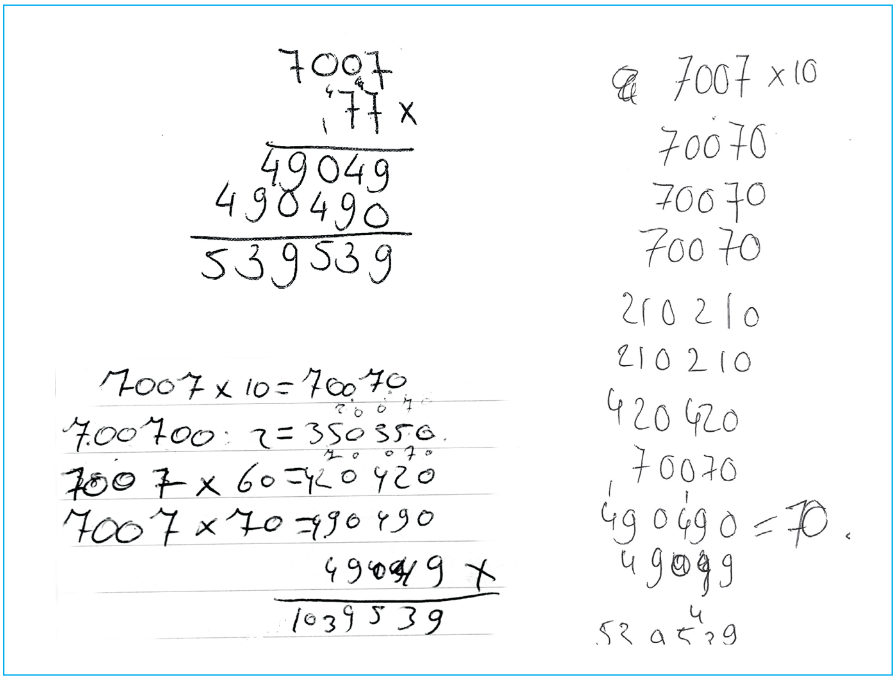
Bij de tweede opgave gaat het om het beredeneerd vergelijken van breuken. Dit efficiënt redeneren is nodig, omdat het precies uitrekenen via gelijknamig maken of via het omzetten van breuken in kommagetallen zo inefficiënt is dat de student daarmee veel tijd verliest en daarnaast grote kans heeft op het maken van fouten. De student kan overigens al een geweldige slag slaan bij het oplossen, door vast te stellen welke breuk groter dan een half is en welke kleiner dan een half is, om vervolgens de onderlinge verschillen tussen de breuken ook te relateren aan $\frac{1}{2}$. Bijvoorbeeld zijn $\frac{19}{41}$ en $\frac{21}{43}$ kleiner dan $\frac{1}{2}$. De breuken liggen daar resp. $\frac{1\frac{1}{2}}{41}$ en $\frac{\frac{1}{2}}{43}$ van af. En omdat de laatste breuk zeker kleiner is dan de eerste, ligt $\frac{21}{43}$ dichter bij $\frac{1}{2}$ en is deze breuk dus de grootste van de twee.

De derde opgave appelleert aan kennis van repeterende breuken. Studenten moeten achterhalen dat 0,0909090909... een andere schrijfwijze is voor $\frac{1}{11}$. Als de student zich dit realiseert, wordt de vraag er feitelijk een naar het zoeken van een getal uit de tafel van 11 in de getallenrij tussen 25 en 35. Als de student weet hoe $\frac{1}{11}$ als repeterende breuk geschreven wordt, bestaat het gebruiken van inzicht bij deze opgave uit het inzetten van deze kennis bij het zoeken van deelbaarheid, namelijk welk getal er deelbaar is door 11.

Studentenwerk

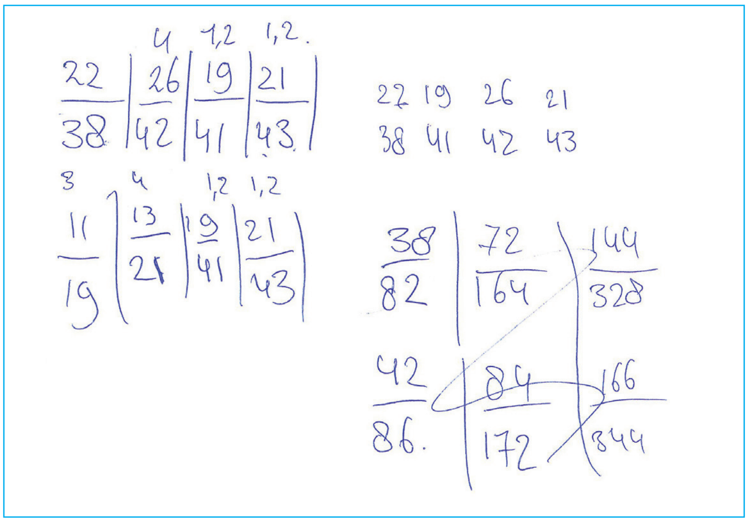
Als aangegeven was het expliciete doel van deze opgaven om na te gaan of studenten in staat zijn te kiezen voor de efficiënte aanpak. Een deel van de studenten was hiertoe niet in staat. Dat bleek in ieder geval na een analyse van het kladpapier van ruim 200 studenten, dat we verzamelden na de toetsafname in juni 2015. Uit deze eerste verkenning van het kladpapier selecteerden we drie opgaven. Deze opgaven zijn exemplarisch voor de aanpak van een aanzienlijk aantal studenten en geven zicht op de veelal ineffectieve strategieën die zij gebruiken. Hierbij moet worden opgemerkt dat niet van alle studenten rekenwerk bij de desbetreffende opgaven terug was te vinden. Een deel van de studenten was kennelijk in staat om de opgaven zonder papier te maken. Uiteraard is er ook geen kladpapier gezien van studenten die ervoor kozen de opgaven in het geheel niet te maken.

Verschillende studenten losten de opgave ‘7007 x 77 =’ op met behulp van het standaardalgoritme. Wanneer ze dat deden kozen ze daarbij zelden voor de meest verkorte vorm (afbeelding 2 – links boven). Studenten die voor een niet-standaard aanpak kozen, lieten vaak een omslachtige werkwijze zien waarbij de kans op rekenfouten groot is (afbeelding 2 – links onder). We troffen ook omslachtige aanpakken aan, zoals het opvermenigvuldigen met een factor 10. Daar waar er geen vergissingen werden gemaakt, leidden deze soms wel tot het goede antwoord (afbeelding 2 - rechts). Dit goede antwoord betekent dat de student voor deze opgave een punt krijgt. Maar de inefficiënte aanpak kost veel meer tijd dan de twee minuten die daar door de toetsmakers voor werd ingeschat. En dat betekent dat de student door deze inefficiëntie in tijdnood komt.



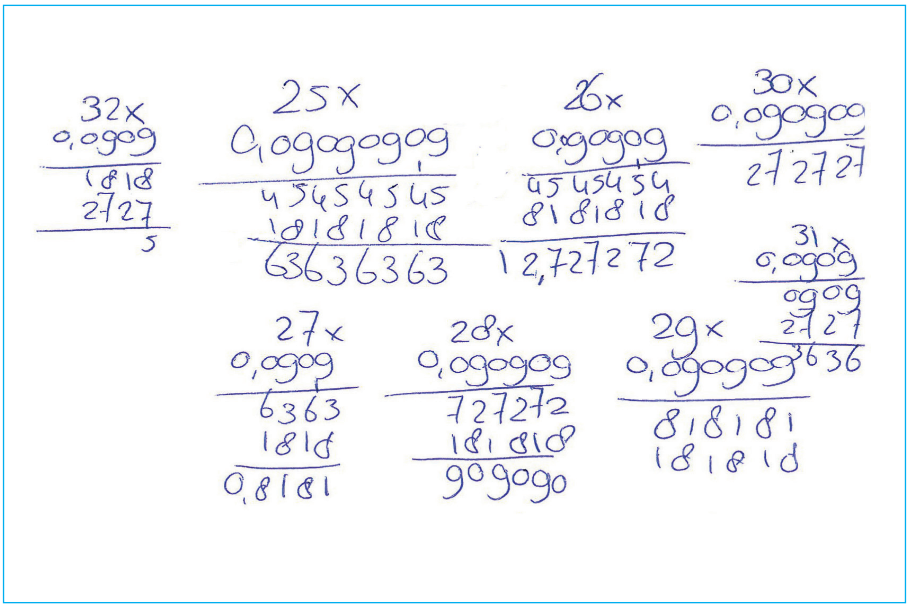
Afbeelding 2:
Drie uitwerkingen bij 7007 x 77.

De opgave waarbij vier breuken in volgorde moesten worden gezet, werd door de studenten die hiervoor kladwerk gebruikten, op twee manieren aangepakt. De ene manier bestond uit (een poging tot) gelijknamig maken om zo de breuken te kunnen vergelijken (afbeelding 3). De andere werkwijze was het omzetten van de breuken in een (globaal) kommagetal. Het kladwerk doet niet vermoeden dat het gelijknamig maken ergens tot een succesvol antwoord heeft geleid.



Afbeelding 3:
Uitwerking breuken vergelijken.

Bij de vraag met welke getal (tussen 25 en 35) je 0,09090909... moet vermenigvuldigen om een heel getal te krijgen, werd lang niet bij elke student rekenwerk aangetroffen op het uitwerkpapier. Bij de studenten bij wie dit wel het geval was, bestond dit rekenwerk voornamelijk uit vermenigvuldigingen van alle getallen tussen 25 en 35 met 0,09090909.... (afbeelding 4). Deze aanpak leidde op papier nooit tot succes, omdat er werd gerekend met een deel van het repetendum in plaats van met de breuk.



Afbeelding 4: Aanpak bij opgave rond repetendum.

Perspectief en reflectie

Na bestudering van het werk van de studenten, die het uitrekenpapier gebruikten om de opgaven op te lossen, stellen we vast dat een deel van de studenten niet in staat is om bij de opgaven die we hier tonen adequate oplossingsstrategieën te gebruiken. Deze studenten gaan aan de slag met inefficiënte aanpakken. Omdat een van de doelen van de toets is om na te gaan of studenten voldoende efficiënt te werk gaan, construeren de toetsmakers de opgaven zo dat studenten die effectief gebruik maken van eigenschappen van getallen en bewerkingen, in staat zijn deze opgaven binnen de gestelde tijd op te lossen. De studenten die daartoe in staat zijn, zijn dus in het voordeel, omdat die uiteindelijk niet in tijdnood komen. Dat gebeurt wel met de studenten die bij voortduring voor weinig efficiënte aanpakken kiezen.
De toets toetst overigens niet alleen of een student efficiënt aan de slag gaat. De toetsgids beschrijft ook nauwkeurig in welke situaties een student zijn of haar kennis moet tonen (10voordeleraar, 2014). Voor de hier geselecteerde opgaven gaat het daarbij om:

> *De student kent algoritmes voor delen, vermenigvuldigen, optellen en aftrekken, waaronder verkort cijferen, (p. 19)*
>
> *De student kan getallen (w.o. breuken en kommagetallen) correct positioneren op een getallenlijn, (p. 19)*
>
> *De student kent kommagetallen en percentages die horen bij de breuken* $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}$ *en* $\frac{3}{4}$*. (p. 23)*

De studenten van wie we hier het werk tonen maken de opgaven fout of kiezen voor een niet effectieve aanpak. Het werk laat daarbij in het geval dat het antwoord fout is, niet altijd precies zien waar het mis ging. Halen ze het toetsdoel wel in voor de hand liggende situaties, maar zijn ze niet in staat hier flexibel mee om te gaan? Zijn studenten die vastlopen in de tweede opgave bijvoorbeeld niet in staat om breuken op een getallenlijn te plaatsen, of zien ze in deze situatie niet dat dit wat oplevert – zeker als je de positie van de breuk $\frac{1}{2}$ als steunpunt gebruikt.
Een deel van de studenten ontbeert de rekenkennis om de toets voldoende te scoren. Er is echter ook een andere groep die de toets onvoldoende maakt. Een redelijk algemeen gevoel bij opleiders is dat studenten in deze groep de toets niet halen, omdat het vooral mis gaat bij het efficiënt inzetten van hun rekenkennis. Mogelijk hebben ervaringen in het rekenverleden van de studenten hen op dat spoor gezet. Als je leerde dat je bij rekenen-wiskunde ver komt door tal van procedures in te slijpen, dan ligt het ook voor de hand dat je je richt op het inslijpen van procedures bij het leren voor de kennisbasistoets om vervolgens bij iedere opgave na te gaan welke procedure er gevraagd wordt. Dit loslaten is moeilijk, omdat het eerder zekerheid gaf en omdat studenten die niet sterk zijn in rekenen-wiskunde juist in een toetssituatie zoeken naar zekerheid.

Dat neemt niet weg dat het goed mogelijk is studenten die niet in staat zijn hun rekenkennis efficiënt in te zetten, te richten op andere vragen dan die naar de meest geschikte procedure. Dan gaat het bijvoorbeeld om vragen als:

- Welke getalrelaties herken ik?
- Welk patroon valt mij op?
- Ken ik een vergelijkbaar probleem, waarvan ik de oplossing ken?
- Kan ik het probleem op een andere manier verwoorden?
- Hoe zal de maker van de opdracht gedacht hebben?

Dergelijke heuristieken zetten de studenten mogelijk op het spoor van een meer flexibele aanpak (Oonk, Keijzer, Lit, & Figueiredo, 2016). Ze dragen zo bij aan de bedoelde professionele gecijferdheid van aanstaande leraren (Oonk, van Zanten, & Keijzer, 2007). Deze groei tot professionele gecijferdheid is een belangrijk doel van de lerarenopleiding basisonderwijs. Het is mooi dat de kennisbasistoets toetst of studenten deze op het beroep gerichte gecijferdheid eigen hebben gemaakt.

Literatuur

10voordeleraar. (2014). *Toetsgids Rekenen-Wiskunde Studiejaar 2014-2015 (versie 2014-2).* Den Haag: Vereniging van Hogescholen.

Keijzer, R. (2015). Changing the pass mark for the mathematics entrance test. In G. Makrides (Red.), *EAPRIL Conference Proceedings 2014* (pp. 254-269). Nicosia, Cyprus: EAPRIL. Opgehaald van https://eaprilconference.files.wordpress.com/2014/07/eapril-2014-proceedings_issn-aanvraag_def1.pdf

Keijzer, R. (2016). Het veranderen van de cesuur voor de instaptoets rekenen-wiskunde. *Tijdschrift voor Lerarenopleiders, 37*(1), 73-78.

Keijzer, R., & Boersma, G. (in druk). Zwakke rekenaars op de pabo.

Keijzer, R., & De Vries, D. (2014). Leren van de toetsing van de kennisbasis rekenen-wiskunde. *Tijdschrift voor Lerarenopleiders, 35*(2), 5-13.

Keijzer, R., Garssen, F., & Peijnenburg, A. (2012). Greep krijgen op de toetsing van de Kennisbasis rekenen-wiskunde. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 31*(1), 14-22.

KNAW. (2009). *Rekenonderwijs op de basisschool. Analyse en sleutels tot verbetering.* Amsterdam: KNAW.

Kool, M. (2011). Borging van de kennisbasis rekenen-wiskunde op de pabo. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 30*(1), 28-32.

Lit, S. (2010). Kennis en kwaliteit: een kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 29*(1), 32-35.

Lit, S. (2011). Kennisbasis en kwaliteitsverhoging. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 31*(1), 33-35.

Oonk, W., Keijzer, R., Lit, S., & Figueiredo, N. (2016). *Rekenen en wiskunde in de praktijk. Kennisbasis.* Groningen: Noordhoff Uitgevers.

Oonk, W., van Zanten, M., & Keijzer, R. (2007). Gecijferdheid, vier eeuwen ontwikkeling. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 26*(3), 3-18.

Van Zanten, M. A. (2010). De kennisbasis rekenen-wiskunde voor pabo's - ontwikkelingen en overwegingen. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 29*(1), 3-16.

Van Zanten, M. A., Barth, F., Faarts, J., Van Gool, A., & Keijzer, R. (2009). *Kennisbasis Rekenen-Wiskunde voor de lerarenopleiding basisonderwijs.* Den Haag: HBO-raad.

In their second or third year in college all prospective primary teachers have to pass a nationwide test. In this article we analyze student teacher production working on this test. Using these productions of student teachers who wrote a lot on their scrap paper, we try to establish what these prospective teachers did when working on the problems in the test. We use these student teacher work analysis in figuring out how these student teachers could be supported.

Werkblad

Bedenk voor je met onderstaande opgaven aan de slag gaat eerst:

- of je specifieke getalrelaties herkent,
- of je een patroon ziet,
- of je een vergelijkbaar probleem kent, waarvan je de oplossing wel kent,
- of je het probleem op een andere manier kunt verwoorden,
- hoe de maker van de opdracht gedacht kan hebben.

1. 7007 x 77 =

2. Orden de breuken van groot naar klein:

$$\frac{11}{19} \quad \frac{13}{21} \quad \frac{19}{41} \quad \frac{21}{43}$$

3. Met welk getal tussen de 25 en 35 moet je 0,0909090909… vermenigvuldigen om een geheel getal te krijgen?