

Meer dan goed/fout. Diagnostisch toetsen van aftrekken in groep 5

In dit artikel worden factoren geïnventariseerd waaraan een instrument moet voldoen om misconcepties te signaleren die optreden bij aftrekken waarbij over het tien- en honderdtal gerekend wordt. Overbruggingsfouten bij aftrekopgaven komen vaak voor bij leerlingen in groep 5 met een gemiddelde en lagere vaardigheid. Afhankelijk van het opgavetype worden de meeste overbruggingsfouten gemaakt door leerlingen met een gemiddelde vaardigheid of met een lager dan gemiddelde vaardigheid. In dit onderzoek worden specifieke fouten bij aftrekopgaven waarbij over het tien- of honderdtal gerekend moet worden, gelabeld aan een bepaalde misconceptie bij het overbruggen. Een deel van deze aftrekopgaven bleek ongeschikt voor het meten van misconcepties, omdat leerlingen hierop niet of nauwelijks fouten maken waarmee een misconceptie is vast te stellen. Uit analyses van de gegeven antwoorden zijn verder twee type fouten opgevallen die ook gerelateerd zijn aan een misconceptie bij het overbruggen en die eerder niet werden meegenomen. De uitkomsten van dit onderzoek hebben geresulteerd in de ontwikkeling van een diagnostisch instrument dat in het schooljaar 2016-2017 gratis ter beschikking gesteld wordt.

INLEIDING

Leerlingen in groep 5 maken een strategieontwikkeling door op het gebied van optellen en aftrekken. Van de rijgstrategie stappen de leerlingen over op de splitsstrategie. Met name op het gebied van aftrekken waarbij over het tien- en honderdtal gerekend moet worden gaat dit regelmatig gepaard met misconcepties.

Optel- en aftrekopgaven kunnen hoofdrekenend op verschillende wijze worden opgelost, namelijk beredenerend, rijgend of splitsend. Wanneer een leerling opgaven beredenerend oplost, maakt deze handig gebruik van de eigenschappen van de opgave. Een voorbeeld hiervan is $69 + 12 = 70 + 12 - 1 = 81$. Beredeneren staat los van de strategieën rijgen en splitsen, het komt voor wanneer ook andere strategieën aan de orde komen en kan op elk niveau en in elke fase van het leerproces ingezet worden.

Het aanleren van de rijgstrategie gaat in het onderwijs vooraf aan het aanleren van de splitsstrategie. Bij de rijgstrategie blijft één van de getallen 'heel' en wordt het andere getal er in stapjes bij opgeteld of er afgetrokken. Een voorbeeld van de rijgstrategie bij optellen is $68 + 23 = _ \rightarrow 68 + 2 = 70 \rightarrow + 1 = 71 + 20 = 91$. Een voorbeeld van de rijgstrategie bij aftrekken is $73 - 22 = _ \rightarrow 73 - 2 = 71 \rightarrow 71 - 20 = 51$ of wanneer over het tiental gerekend moet worden $73 - 27 = _ \rightarrow 73 - 3 = 70 \rightarrow 70 - 4 = 66 \rightarrow 66 - 20 = 46$. De splitsstrategie is een strategie waarbij de tientallen en eenheden gesplitst worden van elkaar, en vervolgens bij elkaar opgeteld of afgetrokken worden (Treffers, Van den Heuvel-Panhuizen & Buys, 1999). Een voorbeeld van de splitsstrategie bij optellen is $68 + 23 = _ \rightarrow 60 + 20 = 80 \rightarrow 8 + 3 = 11 \rightarrow 80 + 11 = 91$. Een voorbeeld van de splitsstrategie bij aftrekken is $73 - 22 = _ \rightarrow 70 - 20 = 50 \rightarrow 3 - 2 = 1 \rightarrow 50 + 1 = 51$ of wanneer over het tiental gerekend moet worden $73 - 27 = _ \rightarrow 70 - 20 = 50 \rightarrow 3 - 7 = 4 \text{ tekort} \rightarrow 50 - 4 = 46$.

Floor Scheltens en
Anton Béguin,
[Cito, Arnhem](#)

Scheltens, F. &
Béguin, A. (2017).
[Meer dan goed/fout.
Diagnostisch toetsen
van aftrekken in groep
5. Volgens Bartjens
- ontwikkeling en
onderzoek, 36\(3\), 41-49](#)

De splitsstrategie is een bijzonder foutgevoelige strategie wanneer die nog niet goed wordt beheerst. Dit geldt met name wanneer over het tiental afgetrokken moet worden (Beishuizen, 1993; Kraemer, 2011). Fouten die hierbij veel voorkomen zijn weergegeven in afbeelding 1. De fouten hangen samen met misconcepties over het rekenen met tekorten. Bij de eerste fout is in plaats van $3 - 7$, $7 - 3$ uitgerekend, dit is bij de tweede fout ook het geval, maar bij deze fout is er begrip dat er over het tiental gerekend is, dus in plaats van $30 + 4$, wordt hier $20 + 4$ uitgerekend. De derde strategie wordt de eenheid goed beredeneerd, $3 - 7$ is 7 stapjes terug rekenen vanaf 3, is 6, het begrip dat over het tiental gerekend is ontbreekt hier echter ook.

Fout 1 $70 - 40 = 30$
 $3 - 7 = 4$
 $30 + 4 = 34$

Afbeelding 1 Veel voorkomende fouten bij de opgave $73 - 47 = (26)$

Fout 2 $70 - 40 = 30$
 $3 - 7 = 4$ tekort
 ~~30~~ $20 + 4 = 24$

Fout 3 $70 - 40 = 30$
 $3 - 7 = 6$ (4 tekort $10 - 4 = 6$)
 $30 + 6 = 36$

Deze foutgevoeligheid leidt echter niet tot fouten wanneer de splitsstrategie gebruikt wordt bij optellen of aftrekken waarbij niet over het tiental gerekend wordt.

Uit eerder niet gepubliceerd onderzoek bleek dat veel leerlingen misconcepties zonder direct didactisch ingrijpen overwinnen. Het tijdig opsporen en vervolgens gericht didactisch handelen, kan hierin grote tijdsinstaat opleveren. Leerkrachten kunnen het leerproces van de leerlingen bevorderen door aanpassingen te doen aan de instructie of door het geven van extra feedback (Fernández & Garcia, 2008; Ricomini, 2005). Dat leerlingen misconcepties bij aftrekepgaven hebben hangt vermoedelijk samen met het onderwijs in splitsen. In veel methodes wordt splitsen aangeboden voor optellen en niet voor aftrekken (over het tiental). Leerlingen ontwikkelen hun eigen methodes, worden hierin onvoldoende begeleid en zo ontstaan ongemerkt misconcepties.

Leerlingen gebruiken verschillende strategieën voor het oplossen van dezelfde opgave (Kraemer, 2011; Hop, Janssen, Hemker, Van Weerden & Van Til, 2012). De strategie die de leerling kiest om een opgave op te lossen hangt samen met het ontwikkelingsniveau van de leerling. Leerlingen uit de middengroep, op de grens van niveaus B/C op de LVS-toets of met een gemiddeld rekenvaardigheidsniveau, maken meer gebruik van de splitsmethode dan zowel de vaardige als de minder vaardige leerlingen (Kraemer, 2011). Daarnaast maken leerlingen uit de middengroep meer fouten dan de vaardigste leerlingen wanneer ze de splitsstrategie gebruiken. Daarmee heeft de middengroep leerlingen het grootste risico op het vormen van misconcepties op het gebied van aftrekken met tekorten.

Op basis van bovenstaande is het waardevol een instrument te ontwikkelen waarmee misconcepties kunnen worden gesignaleerd die optreden bij aftrekken waarbij over het tien- (en honderd)tal gerekend wordt. Doel van dit onderzoek is een inventarisatie van factoren waaraan zo'n instrument moet voldoen. De volgende vragen zijn hierbij van belang:

- 1) Moet een instrument om deze misconcepties te signaleren alleen geschikt zijn voor de middengroep? Of zijn er andere groepen leerlingen die ook een risico vormen om deze misconcepties te ontwikkelen en baat kunnen hebben bij het gebruik van een instrument?
- 2) Welke opgaven zijn geschikt voor het meten deze misconcepties?
- 3) Welke antwoorden geven een signaal voor deze misconceptie? Zijn er meer antwoorden dan genoemd in afbeelding 1 die wijzen op deze misconceptie?

METHODE

Aan dit onderzoek hebben 554 (270 jongens) leerlingen van groep 5 van 22 scholen meegedaan. Het onderzoek vond plaats in de maanden september en oktober 2014. De scholen zijn verspreid over geheel Nederland. De algemene rekenvaardigheid van de leerlingen, gemeten op de leerlingvolgysteemtoets aan het eind van groep 4 (LVS E4) ligt hoger dan gemiddeld. In afbeelding 2 is te zien dat 31% van de leerlingen van de onderzoekspopulatie zich bevindt in de hoogste scorende groep (I), ten opzichte van 20% in de normgroep. In de laagst scorende groep (V) bevindt zich 13% van de leerlingen van de onderzoekspopulatie, ten opzichte van 20% van de normgroep.

	Aantal leerlingen	Percentage onderzoeks- populatie	Percentage normgroep
Laagst scorend V	73	13%	20%
Onder gemiddeld IV	83	15%	20%
Gemiddeld III	95	17%	20%
Boven gemiddeld II	130	23%	20%
Hoogst scorend I	173	31%	20%

Afbeelding 2
Overzicht verdeling
rekenvaardigheid
(op de LVS - schaal)
onderzoekspopulatie
ten opzichte van de
normgroep

Om te bepalen bij welk soort opgaven welke leerlingen misconcepties ontwikkelen is het van belang dat alle leerlingen opgaven krijgen die aansluiten bij hun eigen niveau. Met andere woorden, alle leerlingen moeten opgaven krijgen waarbij ze de kans krijgen fouten te maken en misconcepties te tonen. Op basis van het aantal fouten en het type fouten dat leerlingen gemaakt hebben op de zeven aftrekopgaven in LVS E4 zijn de leerlingen ingedeeld in vijf groepen. Er zijn drie typen fouten onderscheiden: overbruggingsfouten, telfouten en andere fouten. Hierbij zijn overbruggingsfouten gedefinieerd op basis van de fouttypen uit afbeelding 1. Per opgave is bepaald welke antwoorden een leerling zou hebben gegeven uitgaande van de beschreven misconcepties. Bij de opgave $83 - 26 =$ zijn dat dan bijvoorbeeld de antwoorden 63, 53 en 67. Een telfout is gedefinieerd als eentje meer of eentje minder dan het goede antwoord, in het geval van de opgave $83 - 36 =$ dus 56 en 58. Andere fouten zijn fouten anders dan overbruggingsfouten of telfouten. Zoals te zien in afbeelding 3 maakt de grootste groep leerlingen ($N=261$) weinig fouten, het aantal overbruggingsfouten dat deze leerlingen maken is minder dan twee, deze groep leerlingen maakt geen telfouten en minder dan één andere fout. De tweede groep ($N=130$) bestaat uit leerlingen die ook minder dan twee overbruggingsfouten maken en geen telfouten. Deze groep maakt echter twee of meer andere fouten. De derde groep ($N=75$) bestaat uit leerlingen die telfouten maken bij minstens één van de opgaven en minder dan twee overbruggingsfouten. De leerlingen uit de vierde groep ($N=75$) maken geen telfouten, maar twee of meer overbruggingsfouten. De leerlingen in de laatste en kleinste groep maken zowel twee of meer overbruggingsfouten als één of meer telfouten.

	Aantal overbrug- gingsfouten	Aantal telfouten	Aantal andere fouten
A: Weinig fouten ($N= 261$)	<2	0	≤ 1
B: Andere fouten ($N = 130$)	<2	0	≥ 2
C: Telfouten ($N=75$)	<2	≥ 1	
D: Overbruggingsfouten ($N=75$)	≥ 2	0	
E: Tel- en overbruggingsfouten ($N=13$)	≥ 2	≥ 1	

Afbeelding 3
Overzicht van groepen
leerlingen op basis van
antwoordpatroon op
LVS E4

Aansluitend aan deze vijf groepen zijn vijf toetsversies gemaakt van de 'Diagnostische toets Begin groep 5'. De toetsversies zijn samengesteld op basis van blokken items horend bij in totaal tien verschillende opgavetypen. Per opgaventype zijn vijf opgaven ontwikkeld. Elke toetsversie bevat vijf opgavetypen en bestaat dus uit 25 opgaven. Tussen de versies zijn twee opgavetypen gemeenschappelijk en dit leidt er toe dat de toetsversies tien opgaven gemeenschappelijk hebben.

Bij alle opgaven moeten de leerlingen over het tien- of honderdtal rekenen, echter is er gevarieerd in de grootte van de getallen, het verschil tussen het aftrektaal en de aftrekker en het al dan niet aftrekken van 0. Per opgaventype zijn twee opgaven zonder context (kaal) en drie opgaven met een eenvoudige context geconstrueerd, bij geen van de opgaven zijn afbeeldingen opgenomen.

In afbeelding 4 is een overzicht opgenomen van de itemtypes die zijn opgenomen in de toetsen en de betreffende kenmerken. Bijvoorbeeld bij het eerste itemtype $83 - 26$ hoeft er niet van nul geleend te worden, bij het aftrekken moet over het tiental heen gerekend worden. Dit type opgave komt ook voor in het LVS medio groep 5.

Overbruggen (zonder nullen)

Afbeelding 4 Opgavekenmerken in
Diagnostische Toets Begin groep 5

Type	Overschrijding	Voorbeeld
1*	10	$83 - 26 =$
2	10	$86 - 78 =$
3	10	$453 - 127 =$
4	100	$347 - 62 =$
5	10	$31 - 4 =$
6	10	$47 - 9 =$

Overbruggen met nul

Type	Overschrijding	Voorbeeld
7	10	$70 - 43 =$
8	100	$206 - 62 =$

Overbruggen met twee nullen

Type	Overschrijding	Voorbeeld
9*	Beide	$300 - 72 =$
10	100	$1000 - 40 =$

*Deze typen opgaven komen ook voor in de LVS - toets M5

Bij de toewijzing van de opgaven aan de groepen leerlingen is rekening gehouden met de kenmerken van de opgaven en kenmerken van de leerlingen. Leerlingen die in LVS E4 weinig fouten hebben gemaakt in de aftreksommen krijgen in de diagnostische toets, naast de tien gemeenschappelijke opgave, opgaven die een hogere rekenvaardigheid vereisen. Leerlingen die veel telfouten maken, krijgen in de toets ook opgaven aangeboden zoals $31 - 4$, waarbij rijgend terugtellen als strategie voor de hand ligt. In afbeelding 5 is het design van de diagnostische toets opgenomen. De itemtypes $83 - 26$ en $70 - 43$ zijn opgenomen in alle versies. Van itemtype $86 - 78$ verwachten we dat deze telfouten uitlokt, deze is opgenomen in versie B, voor leerlingen die in LVS E4 'andere fouten' maakten en in versie C voor leerlingen die 'telfouten' maakten.

VB	Lenen van	Type	Relevante aspecten	Telftn	Overbr ftn	A	B	C	D	E
$83 - 26 =$	10	$2n - 2n$	Antwoord > 10		x	x	x	x	x	x
$70 - 43 =$	10	$2n - 2n$	Aftrektal $x * 10$		x	x	x	x	x	x
$86 - 78 =$	10	$2n - 2n$	Antwoord < 10	x			x	x		
$453 - 127 =$	10	$3n - 3n$			x	x				
$347 - 62 =$	100	$3n - 2n$			x	x			x	
$31 - 4 =$	10	$2n - 1n$	Aftrekker is geen 9	x			x	x		x
$47 - 9 =$	10	$2n - 9$	Aftrekker is 9	x				x		x
$206 - 62 =$	100	$3n - 2n$			x				x	
$300 - 72 =$	beide	$3n - 2n$	Aftrektal is $x * 100$		x	x			x	x
$1000 - 40 =$	10	$1000 - 2n$	Aftrektal is $x * 10$		x		x			

Afbeelding 5 Design van de diagnostische toets

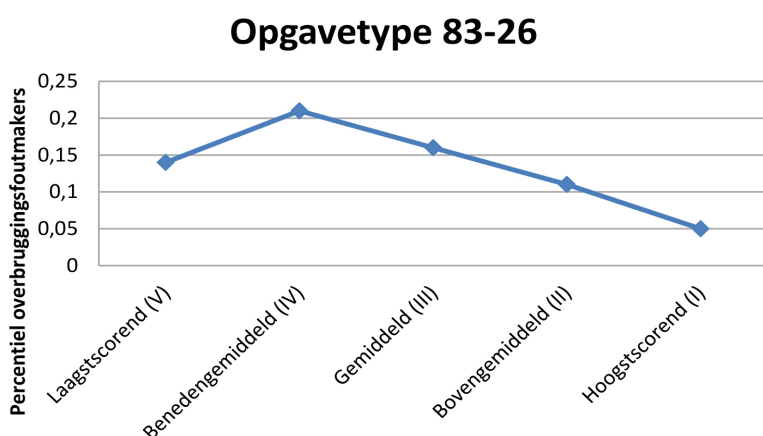
Op basis van de toetsresultaten is een aantal analyses uitgevoerd. Als eerste is gekeken naar het antwoordgedrag van de leerlingen op de gemeenschappelijke opgaven. Hierbij is onderzocht voor welk vaardigheidsniveau in rekenen de toets geschikt is. De keuze voor een analyse op alleen de gemeenschappelijke opgaven is gemaakt omdat die de makkelijkste vergelijkingsbasis bieden en omdat ze gemaakt zijn door alle leerlingen. Op basis van het aantal fouten op deze 10 opgaven is vastgesteld of een leerling een overbruggingsfoutmaker is. Dit label werd toegekend als een leerling twee of meer overbruggingsfouten heeft gemaakt. Uitgangspunt hierbij is dat het maken van één overbruggingsfout toeval kan zijn, maar dat

er sprake is van een systematisch patroon wanneer een leerling meer dan één overbruggingsfout maakt. Vervolgens is nagegaan hoe groot het percentage overbruggingsfoutmakers is binnen de vijf normeringsgroepen van het LVS (I tot en met V). Zie afbeelding 2 voor de verdeling in onze steekproef over deze normeringsgroepen.

De tweede en derde analyse zijn erop gericht om opgavetypen te selecteren die goede diagnostische informatie opleveren over het maken van misconcepties. Hiervoor is het nodig vast te stellen welke opgaven de misconcepties bij het rekenen over het tien- en honderdtal bloot leggen. Daarnaast is de moeilijkheid van een opgave van belang voor de eventuele selectie. Een opgave mag niet te gemakkelijk zijn, omdat leerlingen dan geen fouten maken. Ook mag de opgave niet zo moeilijk zijn, dat de leerling geen idee heeft hoe de opgave uitgerekend zou moeten worden. Om te bepalen welke opgaven geschikt zijn voor het meten van misconcepties zijn de opgaven gekalibreerd met behulp van itemresponstheorie (IRT). In de tweede analyse is bepaald in welke mate een opgavetype aanzet tot het maken van overbruggingsfouten. Hierbij zijn de antwoorden geclassificeerd als overbruggingsfout of geen overbruggingsfout. In de derde analyse is een IRT geschat op basis van de moeilijkheid van de opgaven en waarbij antwoorden zijn ingedeeld in goed of fout. Ten slotte is door middel van frequentie-analyses bekeken of er naast de in afbeelding 1 genoemde fouten die wijzen op een misconceptie nog meer fouten zijn die hierop duiden.

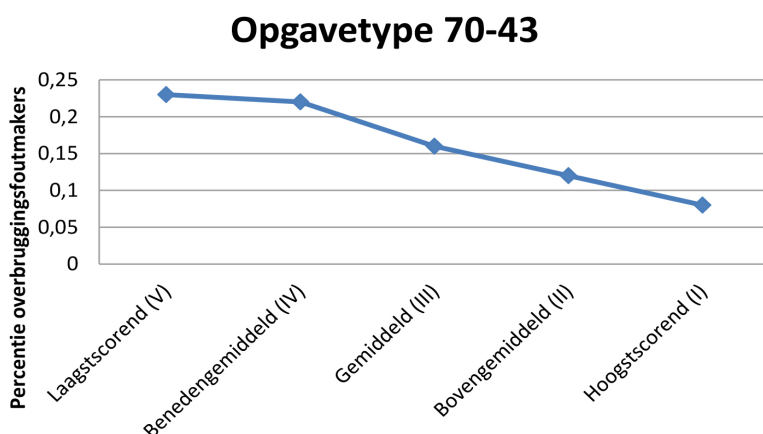
RESULTATEN

In afbeelding 6 is het percentage overbruggingsfoutmakers op opgavetype 83 – 26 afgezet tegen de normeringsgroep in LVS E4. Hier is te zien dat onder de leerlingen uit de normeringsgroep beneden het gemiddeld (IV) meer overbruggingsfoutmakers zijn dan onder de leerlingen met uit de laagste normeringsgroep (V). Leerlingen met een gemiddelde rekenvaardigheidsniveau (III) zijn ongeveer net zo vaak een overbruggingsfoutmaker als leerlingen uit de laagste normeringsgroep.



Afbeelding 6 Percentiel overbruggingsfoutmakers bij opgavetype 83 – 26 per normeringsgroep LVS E4

Het patroon bij opgavetype 70 – 43 is anders dan het patroon bij opgavetype 83 – 26. In afbeelding 7 is te zien dat onder de minst vaardige leerlingen (V) zich nu de meeste overbruggingsfoutmakers bevinden, ook onder de groep leerlingen die onder het gemiddelde presteren (IV) bevinden zich bij dit opgavetype veel overbruggingsfoutmakers.



Afbeelding 7 Percentiel overbruggingsfoutmakers bij opgavetype 70 - 43 per normeringsgroep LVS E4

Voor beide opgavetypen geldt dat onder de leerlingen met een benedengemiddelde rekenvaardigheid (IV) een groot percentage overbruggingsfoutmakers bevinden, ook onder de zwakste groep leerlingen (V) en de gemiddelde leerlingen (III) bevinden zich veel overbruggingsfoutmakers. Onder de hoogst scorende (I) en bovengemiddelde (II) leerlingen bevinden zich bij beide opgavetypen de minste overbruggingsfoutmakers.

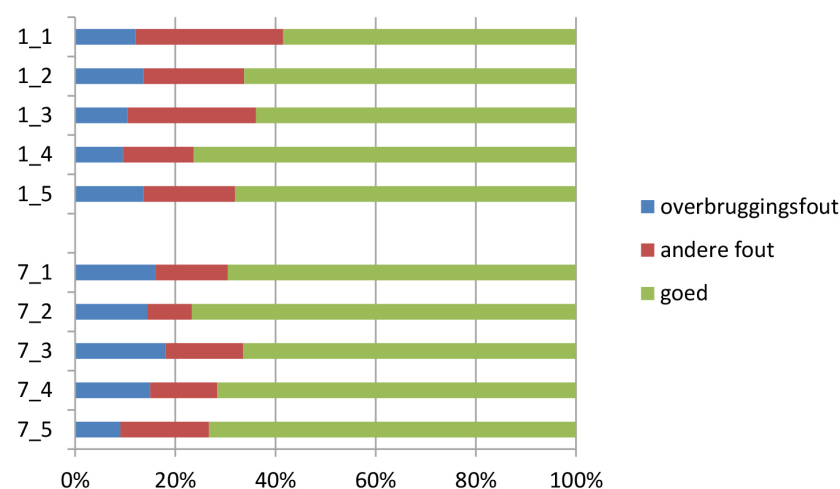
Uit de IRT-analyse met een uitsplitsing van antwoorden in wel of geen overbruggingsfout kan worden vastgesteld dat het opgavetype 400 – 27 bij de leerlingen de meeste overbruggingsfouten uitlokt. In afbeelding 8 zijn de proportie overbruggingsfouten en goede antwoorden weergegeven zoals die op basis van het model kunnen worden vastgesteld voor een gemiddelde leerling (gekalibreerde p-waarde). De verwachting is dat 16% van de antwoorden op een opgave van het type 400 – 27 een overbruggingsfout is. Op de opgavetypen 70 – 43, 86 – 78, 83 – 26 en 453 – 127 worden respectievelijk 15%, 12%, 12% en 11% overbruggingsfouten verwacht. Het percentage verwachte overbruggingsfouten op de overige vijf opgavetypen 347 – 62, 35 – 9, 406 – 22, 35 – 6 en 1000 – 70, ligt veel lager, respectievelijk 4%, 3%, 2%, 1% en 0%.

De moeilijkheid verschilt per opgavetype (range 0,27 - 0,93). De moeilijkste itemtypes zijn 453 – 127 en 347 – 62 (gekalibreerde p-waarde 0,27). Het gemakkelijkste itemtype is 35 – 6 (gekalibreerde p-waarde 0,93).

Itemtype	Voorbeeld	Overbruggingsfouten Gekalibreerde p-waarde	Moeilijkheid Gekalibreerde p-waarde
9	400 – 27 =	0,16	0,42
7	70 – 43 =	0,15	0,74
2	86 – 78 =	0,12	0,78
1	83 – 26 =	0,12	0,67
3	453 – 127 =	0,11	0,27
4	347 – 62 =	0,04	0,27
6	35 – 9 =	0,03	0,86
8	406 – 22 =	0,02	0,31
5	35 – 6 =	0,01	0,93
10	1000 – 70 =	0,00	0,48

Afbeelding 8
Gekalibreerde p-waarde
overbruggingsfouten
en moeilijkheid per
itemtype

De verdeling van het type antwoord op de tien gemeenschappelijke opgaven is weergegeven in afbeelding 9. Hieruit valt op te maken dat naast de fouten die duiden op misconcepties er ook nog een groot deel andere fouten gemaakt worden (range 8,8% – 29,4%). Hierbij rijst de vraag of er naast de drie fouten die benoemd zijn in afbeelding 1 er nog andere fouten zijn die duiden op misconcepties bij het overbruggen.



Afbeelding 9
Verdeling type
antwoord over de tien
gemeenschappelijke
opgaven

Om inzicht te krijgen in het soort antwoorden dat de leerlingen geven is gekeken naar de frequentie-analyses van de antwoorden. In afbeelding 10 is als voorbeeld een deel van de frequentietabel opgenomen die hoort bij de opgave 83 – 27 (opgave 1_1). Deze opgave is gemaakt door 554 leerlingen. 324 leerlingen hebben het goede antwoord, 56 gegeven. Er zijn 52 verschillende antwoorden gegeven.

Antwoord	Freq	Percentage
56*	324	58,5
54**	29	5,2
64**	26	4,7
53	21	3,8
46	13	2,3
55	13	2,3
63	12	2,2
66**	12	2,2
57	11	2,0
76	7	1,3
50	6	1,1
60	6	1,1
Missing	6	1,1

Afbeelding 10 Deel van frequentie - analyses (frequentie >1%) bij opgave 83 – 27

* goede antwoord

** gelabeld als overbruggingsfout

De antwoorden die gelabeld zijn als 'overbruggingsfout' worden zeer frequent gegeven. Er zijn ook andere foute antwoorden die veel gegeven worden, zoals 53, 46, 55, 63, 57. De antwoorden 53 en 50 zijn terug te voeren op een misconceptie bij het overbruggen. Beide antwoorden worden verkregen door het door elkaar gebruiken van splitsen en rijgen. Het antwoord 53 in de opgave 83 – 27 wordt verkregen door $80 - 20 = 60 \rightarrow 60 - 7 = 53$. Bij deze strategie wordt de '3' van 83 vergeten. Bij het antwoord 50 trekt de leerling beide eenheden af, dus $80 - 20 = 60 \rightarrow 60 - 3 = 57 \rightarrow 57 - 7 = 50$.

CONCLUSIE EN DISCUSSIE

Net als Kraemer (2011) zien we dat de middengroep overbruggingsfouten maakt en dat ook de onder gemiddelde en laagst scorende leerlingen geregeld overbruggingsfouten maken. Welke leerlingen overbruggingsfouten maken hangt samen met het opgavetype dat de leerlingen hebben gemaakt. Het gebruik van een diagnostisch instrument om overbruggingsfouten in kaart te brengen bij het aftrekken over het tien- en honderdtal lijkt dus vooral dus geschikt voor leerlingen die op LVS een gemiddelde rekenvaardigheid of lager hebben. Bij de zwakste leerlingen is dan de vraag of de conclusies die getrokken kunnen worden door afname van een diagnostisch instrument veel meerwaarde hebben. Als leerlingen over het geheel een zeer zwakke rekenvaardigheid hebben is niet de verwachting dat deze leerlingen geholpen zijn van het diagnosticeren en aanpakken van een specifieke misconceptie. Deze leerlingen hebben hulp nodig over de gehele breedte van het getalbegrip en rekenen. In een aantal gevallen kunnen misconcepties ook optreden bij de bovengemiddelde en hoogst scorende leerlingen. Bij deze groep is het gebruik van een toets zinvol wanneer de leerkracht het vermoeden heeft dat een leerling een misconceptie heeft.

De opgavetypen 400 – 27, 70 – 43, 86 – 78, 83 – 26 en 453 – 127 zijn geschikt om misconcepties op het gebied van aftrekken over het tien- en honderdtal in kaart te brengen. Welke opgaven opgenomen moeten worden hangt samen met de algemene rekenvaardigheid van de leerlingen. De opgavetypen 70 – 43, 86 – 78, 83 – 26 zijn geschikt voor een toets voor zwakkere leerlingen, opgavetype 400 – 27 is meer geschikt voor de gemiddelde leerling, terwijl opgavetype 453 – 127 past in een toets voor leerlingen met een boven gemiddelde rekenvaardigheid.

In afbeelding 11 zijn de vijf fouten die duiden op een misconceptie opgenomen. De eerste drie fouten waren in dit onderzoek al meegenomen. Op basis van de resultaten zijn fout 4 en 5 toegevoegd waarbij leerlingen respectievelijk splitsen en rijgen combineren en de eenheden van het aftrektal vergeten.

Fout 1	$70 - 40 = 30$ $3 - 7 = 4$ $30 + 4 = 34$	Afbeelding 11 Vijf fouten die duiden op een misconceptie bij de opgave $73 - 47 = (26)$
Fout 2	$70 - 40 = 30$ $3 - 7 = 4$ tekort 30 $20 + 4 = 24$	
Fout 3	$70 - 40 = 30$ $3 - 7 = 6$ (4 tekort $10 - 4 = 6$) $30 + 6 = 36$	
Fout 4	$70 - 40 = 30$ $30 - 3 = 27$ $27 - 7 = 20$	
Fout 5	$70 - 40 = 30$ $30 - 7 = 23$	

In dit onderzoek is alleen gekeken naar de uitkomsten van de aftrekopgave en zijn interpretaties gemaakt op basis van het verband van een uitkomst met een mogelijke foutieve procedure of misconceptie. In de meeste gevallen waarbij de leerling een antwoord geeft dat geïnterpreteerd wordt als misconceptie zal de leerling ook één van de onderstaande foute procedures gevolgd hebben. Maar het is ook mogelijk dat een leerling op een andere manier tot dit antwoord is gekomen. In dat laatste geval zou de classificatie als misconceptie onterecht kunnen zijn en zou de leerling verkeerd worden geclassificeerd. Praktisch is dit vermoedelijk weinig problematisch doordat dit type instrument niet ingezet wordt voor belangrijke beslissingen.

Wanneer een leerkracht meer informatie wil over de aanpak van de leerling die uitvalt is het aan te raden gericht een diagnostisch gesprek te voeren. Ook wanneer een leerling andere fouten maakt dan de gelabelde overbruggingsfouten, is het voeren van een diagnostisch gesprek raadzaam om meer zicht te krijgen op de denkwijze van de leerling. In het definitieve product zijn hiervoor protocollen ontwikkeld.

Leerkrachten die hebben meegedaan aan de onderzoeken om dit instrument te ontwikkelen zijn positief. Het instrument heeft de rekenkennis vergroot van de leerkracht en biedt handvatten om met gerichte instructie in de groep aan de slag te gaan.

- 'Ik vond de rapportage veel informatie geven over de rekenmogelijkheden. Ik ga het doorgeven aan de volgende leerkracht van groep 5 zodat zij daar in haar lessen rekening mee kan houden.'
- 'Het wordt snel duidelijk waar nog hiaten in de rekenkennis zitten.'
- 'Het geeft veel extra informatie (daar leer ik van) en je krijgt meer zicht op de rekenvaardigheden van je groep.'
- 'Ik heb de hiaten in kaart en kan betere en gerichtere instructie geven aan de groep.'

Hoe ziet het definitieve product er uit?

In het schooljaar 2016 - 2017 zal een gratis diagnostische instrument op de markt komen waarbij op een eenvoudige manier misconcepties in kaart gebracht kunnen worden. Op basis van de rapportage kan vervolgens worden bijgestuurd in het leerproces. Het instrument is met name geschikt voor leerlingen die eind groep 4 die op het leerlingvolgsysteem gemiddeld of onder gemiddeld presteren (III en IV). Het instrument is ook geschikt voor leerlingen met een hogere vaardigheidsscore waarvan de leerkracht een vermoeden heeft van een misconceptie bij aftrekken. Het instrument bestaat uit:

- Twee digitale diagnostische toetsen met rapportage
- Protocollen voor diagnostische gesprekken
- Oefenmateriaal
- Aangepast leertraject

Type	Overschrijding	Voorbeeld
1	10	86 – 78 =
2	10	83 – 26 =
3	100	634 – 251 =
4	10	70 – 43 =
5	100	1000 – 340 =

Afbeelding 12 Opgavetypen diagnostische toets groep 5

Er zijn twee digitale versies ontwikkeld van de diagnostische rekentoets, bedoeld als voor- en natoets. Zowel de eerste als de tweede toets bestaat uit 25 aftrekopgaven. Van elk opgavetype zijn vijf opgaven opgenomen in de toets, twee van de vijf opgaven hebben geen context en de overige drie hebben een eenvoudige context (Vermeulen, Scheltens & Nieuwenhuizen, 2016).

De opgavetypen in de toets zijn weergegeven in afbeelding 12. Opgavetype 1 tot en met 4 zijn ook typen die voorkomen in het beschreven onderzoek. In plaats van de opgavetype 400 – 27 is er voor gekozen opgavetype 1000 – 340 op te nemen. Uit eerder onderzoek bleek dat dit type opgave ook veel overbruggingsfouten uitlokt. Tevens geldt dat dit opgavetype is opgenomen in LVS medio groep 5 (tweede generatie).

In de rapportage wordt voor individuele leerlingen per opgavetype aangegeven of er sprake is van een misconceptie op het gebied van overbruggen, hoeveel andere fouten een leerling maakt en het percentage goed.

Wanneer een leerkracht meer inzicht wil hebben in de wijze waarop de leerling rekt is het zinvol om een diagnostisch gesprek te voeren met de leerling. Per opgavetype is er één diagnostisch gesprek ontwikkeld waarbij door de leerling twee opgaven gemaakt worden: een kale opgave en een opgave in een context.

Om ondersteuning te bieden bij het overwinnen van de misconcepties bij aftrekken over het tiental is er een aangepast leertraject ontwikkeld. Dit aangepaste leertraject richt zich op het gefaseerd uitleggen van de splitsaanpak. Een leerkracht kan ook de keuze maken om met leerlingen met misconcepties terug te grijpen naar de rijgaanpak. Als extra oefenmateriaal zijn voor elk opgavetype 10 extra opgaven ontwikkeld. Deze extra opgaven kunnen ook ingezet worden bij individuele of groepsinstructies.

Noot

Het onderzoek naar en ontwerp van de diagnostische toets is gesubsidieerd door NWO (MaGW/PROO: Project 411 - 10-750) en Cito.

Literatuur

- Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second grades. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(4), 294. <http://doi.org/10.2307/749464>
- Fernández, R. L., & García, A. B. S. (2008). Evolutionary processes in the development of errors in subtraction algorithms. *Educational, Research and Review*, 3(7), 229–235.
- Hop, M., Janssen, J., Hemker, B., Van Weerden, J., & Van Til, A. (2012). *Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau Balans van het reken - wiskundeonderwijs halverwege de basisschool 5, PPO - reeks nummer 47*. Arnhem: Cito.
- Kraemer, J - M. (2011). *Oplossingsmethoden voor aftrekken tot 100*. (Ongepubliceerd Proefschrift Technische Universiteit Eindhoven).
- Riccomini, P.J. (2005). Identification and remediation of systematic error patterns in subtraction. *Council for Learning Disabilities*, 28, 233–242. doi: 10.2307/1593661
- Treffers, A., Van den Heuvel - Panhuizen, M., & Buys, K. (1999). *Jonge kinderen leren rekenen. Tussendoelen Annex Leerlijnen – Hele getallen Onderbouw Basisschool*. Groningen: WoltersNoordhoff BV.
- Vermeulen, J. Scheltens, F. & Nieuwenhuizen, M. (2016). Diagnostische toets voor misconcepties in oversplitsend aftrekken in groep 5. *Tijdschrift voor Remedial teaching*, 24-(3), 16-19.

This article describes the relevant characteristics for a diagnostic instrument for subtraction over ten (and hundred). The aim for this instrument is to identify misconceptions that lead to borrowing errors in these calculations. Misconceptions are defined based on responses that could be the result of an erroneous procedure. It was found that students with an average or under average proficiency in arithmetic are prone to misconceptions in subtraction over ten and a hundred, and it was found that the specific proficiency level in which the most errors are made depends on the item type. Some of the items in this study were unsuitable for a diagnostic instrument because they were too easy and did not invoke errors linked to misconceptions. Based on the research the number of erroneous procedures linked with misconceptions could be extended from three to five. Based on the results of this research a diagnostic instrument was developed that will be available starting school year 2016 /2017.