

Van beweging naar begrip:

redeneren over grafieken in het reken-wiskundeonderwijs

Carolien Duijzer onderzocht in haar promotieonderzoek hoe het redeneren van leerlingen in groep 7 over afstand-tijdgrafieken kan worden bevorderd in het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool.

In dit redeneren staat het maken van een verbinding tussen de variabelen op de x-as en de y-as centraal. Hierbij is specifiek gekeken naar of en in hoeverre fysieke ervaringen bijdragen aan dit redeneren over de wiskundige concepten gerelateerd aan grafieken. Er werd een lessenserie ontwikkeld waarbij leerlingen onder andere de mogelijkheid kregen zelf grafieken te 'lopen' met behulp van een bewegingssensor.

Inleiding

In ons dagelijks leven worden we voortdurend geconfronteerd met grafisch gerepresenteerde informatie. Denk maar eens aan alle grafieken die we tegenkomen in de krant, op de televisie, of op het internet. De informatie in deze grafieken is vaak complex en wordt soms ook op vrij complexe wijze weergegeven. Een actueel voorbeeld hiervan vinden we in de overvloed aan grafieken die iets laten zien van de ontwikkeling van Covid-19, bijvoorbeeld het aantal besmettingen per dag en het aantal besmettingen cumulatief (zie ook Keijzer, Hendrikse & Bosch, 2021). Om goed om te kunnen gaan met dergelijke complexe grafieken is grafiekbegrip essentieel. Dit grafiekbegrip houdt niet alleen in dat je grafieken kunt interpreteren en construeren, maar ook dat je de informatie in deze grafieken kritisch kunt beschouwen. Grafieken waarin een continue verandering is weergegeven, zoals temperatuur of beweging, vragen in het bijzonder om het nodige inzicht. Het is dan ook van belang om al op jonge leeftijd inzicht te ontwikkelen in zowel de formele aspecten van grafieken zoals de assen, de weergegeven variabelen, en samengestelde grootheden, als het ontwikkelen van de taal die gebruikt wordt om over deze grafieken te spreken, zoals stijgen, dalen, constant, helling, horizontale as, en verticale as. Daarnaast zijn ook andere vaardigheden van belang, zoals het redeneren over samengestelde grootheden in de grafiek, het beschrijven van oorzaak-gevolgrelaties, logisch redeneren en het oplossen van problemen gerelateerd aan grafieken (Ainsworth, 2006; Friel

Carolien Duijzer, Marnix Academie; Universiteit Utrecht

Duijzer, A.C.G. (2021). Van beweging naar begrip: redeneren over grafieken in het reken-wiskundeonderwijs. *Volgens Bartjens – ontwikkeling en onderzoek*, 41(1), 48-56.

et al., 2001; Shah & Hoeffner, 2002). Deze meer complexe vaardigheden worden ook wel gezien als hogere-orde denkvaardigheden (HOV).

Hogere-orde denkvaardigheden in het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool

Het onderwijzen van HOV wordt gezien als een steeds belangrijker onderdeel van het reken-wiskundeonderwijs in de 21ste eeuw (NCTM, 2000; OECD, 2019; Thijs et al., 2014; Van den Heuvel-Panhuizen & Bodin-Baarends, 2004). Terwijl internationaal steeds vaker wordt benadrukt om de basis voor HOV al op jonge leeftijd te leggen (Common Core State Standards State Initiative, CCSSI, 2010; Goldenberg et al., 2003; NCTM, 2000), wordt in het Nederlandse basisonderwijs aan HOV vrijwel geen aandacht besteed (Van Zanten & Van den Heuvel-Panhuizen, 2018). Ook grafieken van beweging worden weinig uitvoerig behandeld. Dit zien we als een gemiste kans. Meer wiskundige onderwerpen, zoals grafieken van beweging waarin een continue verandering zichtbaar is, bieden aanknopingspunten om hogere niveaus van redeneren uit te lokken bij leerlingen. Activiteiten waarbij ingezet wordt op de actieve rol van het lichaam lijken kansrijk om grafieken van beweging te introduceren in het basisonderwijs. Dit idee, dat fysieke ervaringen waardevol zijn voor wiskundig redeneren, vormt de kern van theorieën die uitspraken doen over zogenoemde *embodied cognition* (vertaling: belichaamde cognitie) (Wilson, 2002). Zo wordt gesteld dat de lichamelijke ervaringen die we opdoen tijdens basale fysieke activiteiten, zoals lopen door de ruimte, balanceren op een evenwichtsbalk of het beklimmen van een trap, zorgen voor de totstandkoming van bepaalde conceptuele metaforen die ondersteunend kunnen zijn in het begrijpen en duiden van abstracte ideeën, waaronder wiskundige concepten (bijvoorbeeld Galilese & Lakoff, 2005; Hall & Nemirovsky, 2012). Binnen theorieën van *embodied cognition* is het handelen met je lichaam, ofwel het inzetten van een breed scala aan visuele-perceptuele en motorische activiteiten, essentieel. Ons denken wordt gevormd in interactie met jezelf, de ander en de omgeving. Meer kennis over hoe lichamelijke ervaringen bijdragen aan de ontwikkeling van HOV is nodig. Mijn promotieonderzoek (Duijzer, 2020), dat onderdeel was van het grotere 'Beyond-Flatland' project, gesubsidieerd door NRO (projectnummer: 405-14-303), had daarom als doel meer inzicht te verkrijgen *of en in hoeverre* lichamelijke ervaringen kunnen bijdragen aan het redeneren over afstand-tijdgrafieken in het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Dit is in vier deelstudies op verschillende manieren onderzocht. We hebben ons gericht op leerlingen uit groep 7, in de leeftijd van 9 tot en met 11 jaar oud. In dit artikel geef ik eerst een korte samenvatting van deze vier deelstudies. Daarna geef ik op basis van de vier deelstudies antwoord op de vraag of en in hoeverre lichamelijke ervaringen bijdragen aan wiskundige HOV bij leerlingen in groep 7.

Het belang van een *embodied* leeromgeving

In de onderzoeksliteratuur wordt veelvuldig gerapporteerd over leeromgevingen gericht op dynamische grafieken waarbinnen lichamelijke ervaringen al dan niet bewust een rol spelen. In zo'n leeromgeving krijgen leerlingen bijvoorbeeld de mogelijkheid zelf grafieken te lopen met behulp van een bewegingssensor, waarbij de grafiek gelijktijdig wordt geprojecteerd op een Digibord. Deze leeromgevingen worden ook wel *embodied* leeromgevingen genoemd (zie bijvoorbeeld Johnson-Glenberg, 2014). Om meer inzicht te verkrijgen in de kenmerkende aspecten van deze leeromgevingen en haar leerpotentieel werden allereerst deze bestaande *embodied* leeromgevingen in kaart gebracht. Deelstudie 1 (Duijzer, Van den Heuvel-Panhuizen, Veldhuis, Doorman & Leseman, 2019) richt zich op deze systematische review van de al bestaande onderzoeksliteratuur. Na het doorzoeken van een viertal databases en de daarop volgende selectieprocedure, werden 44 studies gevonden met daarin 62 *embodied* leeromgevingen. Allereerst werden deze leeromgevingen ingedeeld op basis van twee kenmerkende aspecten van *embodied* leeromgevingen: *bodily involvement*, ofwel de mate waarin het lichaam betrokken is in de activiteit en *immediacy*, ofwel de mate van directheid van de lichamelijke ervaring. Dit resulteerde in vier groepen, namelijk *immediate own motion*, *non-immediate own motion*, *immediate others'/objects' motion*, en *non-immediate others'/objects' motion*. In de groep *immediate own motion* staat het bewegen met het eigen lichaam centraal. Hierbij wordt de lichamelijke ervaring direct gekoppeld aan de grafiek. Een voorbeeld hiervan is een onderwijssetting waarin een leerling beweegt voor een bewegingssensor, waarbij de sensor de afstand tot de leerling vastlegt. Gelijktijdig wordt op basis van deze informatie een grafiek geprojecteerd op de computer of muur, zichtbaar voor de leerling. In de groep *non-immediate others'/objects' motion* draait het om het observeren van de bewegingen van een andere persoon of object. Hierbij wordt de lichamelijke ervaring op een later moment gekoppeld aan de grafiek. Een voorbeeld hiervan is een onderwijssetting waarin een object zichzelf voortbeweegt terwijl het automatisch kleine boontjes op de grond

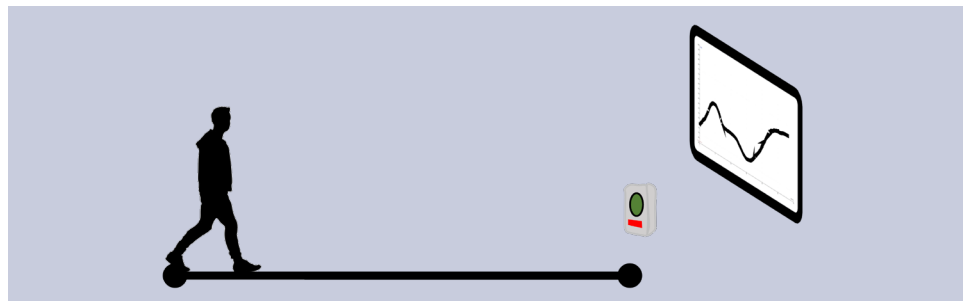
laat vallen (met daartussen een bepaald tijdsinterval). De leerlingen meten zowel de tijd als de afstand tussen de gevallen boontjes. Op basis van deze informatie worden grafieken geconstrueerd. Na het indelen van de leeromgevingen in vier groepen is gekeken naar welke factoren binnen deze leeromgevingen karakteristiek zijn voor het leren dat plaatsvindt. In totaal werden acht van deze karakteristieken gevonden. Deze acht karakteristieken zijn: *real-world context* (realistische context), *multimodality* (multimodaliteit), *linking motion to graph* (koppeling tussen beweging en grafiek), *multiple representations* (meerdere representaties), *semiotics* (semiotiek), *student control* (controle), *attention capturing* (aandacht vangen), en *cognitive conflict* (cognitief conflict). Deze acht karakteristieken hebben elk hun eigen rol in hoe ze het leren binnen de leeromgeving kunnen bevorderen. *Linking motion to graph* beschrijft bijvoorbeeld hoe leerlingen de directe link tussen beweging en de daarbij behorende grafiek kunnen ervaren en observeren. *Multimodality* houdt in dat door gebruik te maken van een bepaald hulpmiddel, zoals een bewegingssensor of een bepaalde instructie, ten minste twee modaliteiten, zoals zien, horen, aanraken, inbeelden, of een bepaalde motorische activiteit, tegelijkertijd worden geactiveerd. Binnen elk van de vier eerder genoemde groepen lag het accent op andere karakteristieken, of kwamen bepaalde karakteristieken helemaal niet voor.

Er is dus veel variatie aanwezig bij *embodied* leeromgevingen. De vier groepen in combinatie met de acht gevonden karakteristieken zijn kenmerkend voor de complexe aard van *embodied* leeromgevingen. Ten slotte is gekeken naar de studies die ook een vergelijking maakten tussen meerdere leeromgevingen, waarbij we ons hebben gericht op datgene wat gerapporteerd werd door de auteurs van deze artikelen. Hieruit kwam naar voren dat de leeromgevingen waarin gebruik gemaakt werd van eigen bewegingen die onmiddellijk gekoppeld werden aan de grafische representatie van die beweging het meest effectief bleken in termen van leeruitkomsten.

Van beweging naar begrip: het effect van een embodied leeromgeving op het redeneren over grafieken

Om meer inzicht te krijgen in hoeverre fysieke ervaringen ingezet kunnen worden om zo het redeneren over afstand-tijdgrafieken te stimuleren werd een interventie ontworpen. De interventie bestond uit een zesdelige lessenserie ontwikkeld voor leerlingen uit groep 7. In deze lessenserie stonden wiskundige activiteiten rondom grafieken centraal, meer specifiek, het grafisch weergeven van beweging, met afstand als functie van tijd. In de eerste les ontwikkelden de leerlingen eerst zelf een (informele) representatie van een beweging. In de lessen die volgden werden situaties geïntroduceerd waarbij afstand eerst discreet weergegeven werd in de grafiek en vervolgens continu. Tegen het einde van de lessenreeks werd leerlingen gevraagd bepaalde situaties weer te geven in grafieken, of een bepaalde grafiek terug te herleiden naar de situatie. De mogelijkheid om de grafiek zelf fysiek te ervaren, vormde een belangrijk uitgangspunt van de lessenserie. Om die reden werden twee parallelle versies van de lessenserie ontworpen. In de ene versie van deze lessenserie kregen de leerlingen directe *embodied* ondersteuning door gebruik te maken van een bewegingssensor. Hierbij werden bepaalde activiteiten ontwikkeld waarbij de eigen bewegingen direct gevisualiseerd konden worden als een lijn in een afstand-tijdgrafiek (afbeelding 1).

► Afbeelding 1.
Schematische weergave van de set-up in het klaslokaal



In de andere versie van deze lessenserie kregen de leerlingen indirecte *embodied* ondersteuning. Hiervoor werden bepaalde activiteiten ontwikkeld waarbij een object en de beweging van dat object werden geprojecteerd op het digitale schoolbord. Ook maakten de leerlingen in deze versie van de lessenserie bepaalde taken op papier. Deze taken werden in de lessenserie met directe ondersteuning fysiek uitgevoerd. Leerlingen kwamen in de indirecte versie van de lessenserie in aanraking met de context van de bewegingssensor, echter zonder de aanwezigheid van het apparaat zelf.

Deelstudie 2 (Duijzer, Van den Heuvel-Panhuizen, Veldhuis & Doorman, 2019) beschrijft eerst in algemene zin hoe de leerlingen die deelnamen aan de lessenserie met directe *embodied* ondersteuning hun redeneren over de grafieken ontwikkelden over de zes lessen heen. De lessen werden gegeven door de onderzoeker met hulp van een onderwijsassistent. De ontwikkeling van de leerlingen over de zes lessen werd gemeten met een grafiekinterpretatietaak (afbeelding 2, links) en een grafiekconstructietaak na elke les (afbeelding 2, rechts), waarbij telkens een van deze taken in de daaropvolgende les werd herhaald.

► Afbeelding 2. Voorbeeldopgaven van een grafiek constructie taak (links) en een grafiek interpretatie taak (rechts)

Naam:..... Groep:.....

••-----••

Een persoon loopt in 10 seconden van punt A naar punt B.

Teken de grafiek die hierbij zou kunnen passen.

Afstand

Tijd

Hoe weet je dit?

Naam:..... Groep:.....

Afstand

Tijd

Welke van deze situaties zouden bij de grafiek kunnen passen? Hoe weet je dit?

1. Een vliegtuig stijgt op

2. Loek loopt over straat, onderweg wacht hij voor een stoplicht

3. Emma beklimt een trap

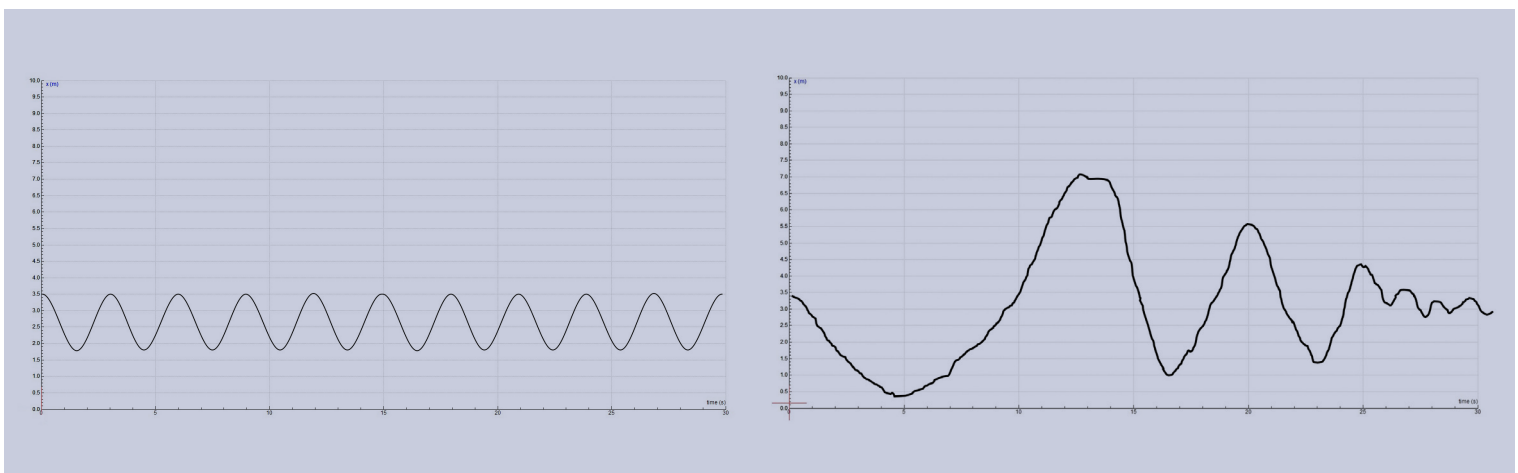
Past WEL / NIET, want

Past WEL / NIET, want

Past WEL / NIET, want

Op die manier was het mogelijk de ontwikkeling van de leerlingen over de lessen in kaart te brengen. Uit het onderzoek kwam naar voren dat de leerlingen over de zes lessen van iconisch redeneren over de afstand-tijdgrafieken, bijvoorbeeld ‘de luchtballon gaat omhoog en de lijn ook,’ naar redeneren gingen waarbij de variabelen afstand en tijd, gerepresenteerd op de assen van de grafieken, impliciet of expliciet werden benoemd. Op dit hogere niveau van redeneren lieten de leerlingen ook informeel redeneren over covariantie zien, bijvoorbeeld ‘het afleggen van meer afstand in minder tijd.’ Naast de ontwikkeling van de groep als geheel werd in deze studie ook een kleiner groepje van 7 leerlingen gevolgd, waarbij de ontwikkeling van deze leerlingen werd beschreven in een aantal leerepisoden. In deze leerepisoden stond een leerling uit dit groepje, genaamd Celine, centraal. Een van deze leerepisoden is afkomstig uit Les 3. Na het een en ander uitgeprobeerd te hebben voor de bewegingssensor wordt aan de leerlingen gevraagd een afstand-tijdgrafiek na te lopen (afbeelding 3, links). Om dit te kunnen dient de gegeven grafiek eerst geïnterpreteerd te worden ten aanzien van afstand tot de sensor (waar te starten met lopen), en ten aanzien van tijd. Na een korte discussie loopt Mark de grafiek. De grafiek die Mark loopt is niet helemaal gelijk aan de gegeven grafiek (afbeelding 3, rechts).

▼ Afbeelding 3. Grafiek van een door de leerling te maken voor- en achterwaartse beweging (links) en een grafiek gemaakt door leerling Mark voor de bewegingssensor (rechts)



In het hierna volgende protocol is de interactie weergegeven die plaatsvindt tussen Celine en de leerkracht. Celine reageert op de grafiek die Mark loopt. Deze grafiek wordt gelijktijdig weergegeven op het scherm van de computer:

Celine: 'Hij maakt ze groter.'

Celine: 'Ze moeten dichter bij elkaar.'

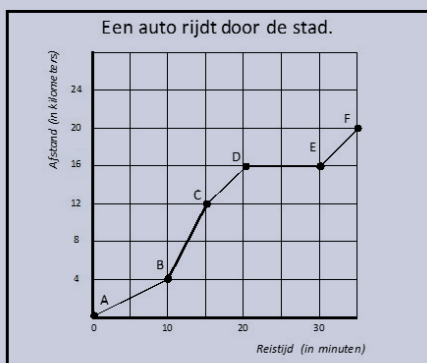
Leerkracht: 'Hoe kunnen we de grafieken meer hetzelfde maken?'

Celine: 'Een beetje sneller... een beetje sneller en een iets kleinere afstand?'

In eerste instantie loopt Mark sneller dan de gegeven grafiek van de leerlingen vraagt. Celine merkt op dat de heuvels die Mark maakt groter zijn dan de heuvels in de gegeven grafiek en dat Mark meer afstand aflegt terwijl hij langer doet over de repeterende beweging. In deze discussie duidt Celine met handgebaren de vorm van de grafiek die Mark loopt en die hij zou moeten lopen. Hierbij beschrijft Celine in eerste instantie de vorm van de grafiek in handgebaren. Deze gebaren laten zien wat zij bedoelt. Vervolgens koppelt ze dit aan dat wat Mark moet doen: 'Hij moet een beetje sneller [lopen]... en een iets kleinere afstand [afleggen]'. In deze leerepisode zien we hoe gebaren en woorden door Celine worden gekoppeld aan de vorm van de grafiek en vervolgens aan de specifieke bewegingen die nodig zijn om de gegeven grafiek te maken. Daarnaast is het redeneren van Celine een voorbeeld van hoe de *embodied* leeromgeving de leerlingen stimuleert om de grafiek niet langer iconisch te interpreteren, maar als de relatie tussen de variabelen op de x-as en de y-as. De leerepisoden in deze deelstudie laten zien hoe de fysieke interactie van Celine met de bewegingssensor, maar ook de interactie van Celine met de docent en haar klasgenoten het redeneren over de grafieken stimuleerde. Zo ontwikkelde Celine meer begrip over de grafieken waarbij verschillende modaliteiten zoals zien, horen, gebaren en bewegingen door haar werden gekoppeld aan de grafische representatie – al dan niet bewust – op het scherm van de computer. Bij Celine, maar ook bij de andere leerlingen, waaronder Amir en Marc, zagen we dat de ervaring van het lopen voor de bewegingssensor samenging met hogere niveaus van redeneren over de grafiek. Dit wiskundig redeneren richtte zich op de variabelen afstand, tijd en snelheid.

Deelstudie 3 (Duijzer, Van den Heuvel-Panhuizen, Veldhuis, Boom, Doorman & Leseman, 2020) onderzocht het effect van de lessenserie met directe ondersteuning versus de lessenserie met indirecte ondersteuning op het redeneren van de leerlingen over afstand-tijdgrafieken. We maakten hierbij gebruik van een longitudinaal design om de veranderingen in het grafisch redeneren van de leerlingen gedurende het schooljaar te kunnen onderzoeken. Dit longitudinale design houdt in dat elke groep die deelnam in dit onderzoek op meerdere momenten gedurende het schooljaar gemeten werd, namelijk vier keer. Zes groepen in totaal namen deel aan ons onderzoek. De lessenserie werd één keer gegeven aan elke groep. De ontwikkeling van de leerlingen in hun grafisch redeneren werd gedurende het schooljaar gemeten door gebruik te maken van drie grafiekinterpretatietaken en één grafiekconstructietaak (afbeelding 4).

▼ Afbeelding 4. Voorbeeldopgaven van een grafiekinterpretatietak en een grafiekconstructietaak



1a. Tussen welke punten gaat de auto het snelst?

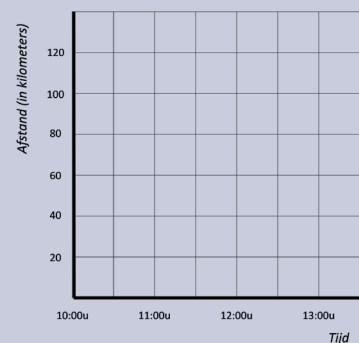
1b. Hoe weet je dit?

Een trein rijdt van Bellero naar Poleta.

Tussen **10:00** en **11:00** rijdt de trein twee keer zo snel als tussen **11:00** en **12:00**.

Tussen **12:00** en **13:00** staat de trein **een uur stil**.

7a. Teken een grafiek die past bij deze treinrit.



7b. Hoe weet je dit?

Drie groepen kregen de lessenserie met daarin indirecte *embodied* activiteiten en drie groepen kregen de lessenserie met daarin directe *embodied* activiteiten. De lessen in de indirecte *embodied* conditie bevatten vergelijkbare activiteiten als de activiteiten in de directe *embodied* conditie. In de indirecte *embodied* conditie kregen de leerlingen niet de mogelijkheid om bepaalde bewegingen zelf uit te voeren door gebruik te maken van een bewegingssensor. In deze indirecte *embodied* conditie werd de beweging van een object als uitgangspunt genomen. De beweging van dit object werd weergegeven op papier, als beschrijving, en dynamisch, als projectie op het digitale schoolbord. Een derde groep leerlingen diende als *baseline* conditie. De resultaten van de leerlingen in deze *baseline* conditie dienden als ijkpunt om vooruitgang in beide andere condities vast te kunnen stellen. Deze leerlingen kregen les over een ander wiskundig onderwerp, namelijk kans. De resultaten laten zien dat de leerlingen in zowel de directe als indirecte *embodied* conditie sterk vooruitgingen in hun redeneren op de grafiektaken na het volgen van de zes lessen. Hieruit blijkt dat beide versies van de lessenserie effectief waren. Verder bleek de directe *embodied* conditie meer effectief dan de indirecte *embodied* conditie. De leerlingen in de directe *embodied* conditie vertoonden een sterkere groei in hun grafisch redeneren dan de leerlingen in de indirecte *embodied* conditie. Hieruit blijkt dat directe *embodied* ervaringen, zoals aangeboden in onze lessenserie, kansrijk zijn in het stimuleren van het grafisch redeneren van leerlingen in groep 7. De gevonden resultaten zijn overeenkomstig de systematische review (deelstudie 1).

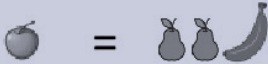
Hogere-orde denkvaardigheden binnen een ander wiskundig domein


In voorgaande deelstudies hebben we ons gericht op wiskundige HOV als het redeneren over afstand-tijdgrafieken. Dit redeneren kan gezien worden als domeinspecifiek. Hogere niveaus van redeneren worden bereikt als gevolg van toenemende kennis binnen dit deeldomein. Dit domeinspecifieke element van wiskundige HOV maakt gebruik van het redeneren over covariantie. Covariantie is een parameter die de mate van samenhang tussen bepaalde variabelen uitdrukt. Dit redeneren over covariantie speelt ook een rol binnen andere wiskundige domeinen, waaronder algebra.

Deelstudie 4 (Duijzer, Otten, Van den Heuvel-Panhuizen, Veldhuis, Boom, Doorman & Leseman, 2020) richt zich op het onderzoeken in hoeverre een interventie gericht op grafisch redeneren ook HOV kan stimuleren binnen een ander wiskundig domein, namelijk algebra. Het is aannemelijk dat als bepaalde elementen van HOV die relevant zijn binnen meerdere wiskundige domeinen gestimuleerd worden, er transfer zou kunnen optreden op basis van domein-algemeen wiskundig redeneren. Dit domein-algemeen wiskundig redeneren omvatte het extraheren, gebruiken, en combineren van meerdere bronnen van informatie. De laatste deelstudie beschrijft het onderzoek naar HOV binnen lineaire vergelijkingen om meer inzicht krijgen of en in hoeverre het wiskundig redeneren van de leerlingen domeinspecifiek, domein-algemeen of beide is.

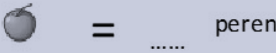
► Afbeelding 5.
Voorbeeld-
opgave van een
algebraatask
(macro)

Appels, peren en bananen.





9a. Vul in:



9b. Hoe weet je dit?

De leerlingen die deelnamen aan ons onderzoek (deelstudie 2 en deelstudie 3) maakten ook vier algebra-gerelateerde taken (afbeelding 5) waarin gevraagd werd lineaire vergelijkingen op te lossen. Door het analyseren van het redeneren van de leerlingen op deze taken konden we een inschatting maken van hun algebraïsch redeneren. De resultaten laten zien dat de leerlingen op hogere niveaus redeneerden na de grafiek-interventie op zowel de grafiektaken als de algebrataken. Deze groei was sterker zichtbaar in het redeneren op de grafiektaken dan in het redeneren op de algebrataken. Op individueel niveau werd geen verband gevonden tussen de groei op het grafisch redeneren en de groei op het algebraïsch redeneren. Met andere woorden, de leerlingen die hun grafisch redeneren verbeterden, verbeterden niet hun algebraïsch redeneren, en omgekeerd. Op basis hiervan trekken we de voorlopige conclusie dat de HOV gestimuleerd in de lessenreeks over grafieken niet per definitie resulteerde in HOV binnen een ander wiskundig domein. De bevinding dat de leerlingen wel een verbetering in hun algebraïsch redeneren vertoonden na deelname aan de interventie verdient dan ook nader onderzoek.

Conclusie

Met dit onderzoek probeerden we antwoord te vinden op de vragen of en in hoeverre lichamelijke ervaringen bijdragen aan wiskundige HOV bij leerlingen in groep 7. Ook is gekeken naar de waarde van directe versus indirecte *embodied* ervaringen tijdens wiskundige activiteiten voor het stimuleren van het grafisch redeneren van deze leerlingen. De eerste deelstudie, de systematische review, vormde de theoretische onderlegger voor de overige deelstudies. In deze systematische review werden al bestaande *embodied* leeromgevingen gecategoriseerd. Uit deze reviewstudie bleek onder andere dat er een grotere variëteit aan *embodied* leeromgevingen bestaat en dat leeromgevingen met daarbinnen activiteiten waarbij de eigen bewegingen direct gekoppeld worden aan de grafiek het meest kansrijk lijken om dynamische grafieken te introduceren. In de interventie die centraal stond in deelstudie twee tot en met vier was deze koppeling tussen beweging en grafiek een belangrijk uitgangspunt. In de directe *embodied* conditie kreeg dit vorm door het 'lopen' van grafieken voor een bewegingssensor, waarbij de grafische representatie van die beweging direct geprojecteerd werd op het Digibord. Deelstudie 2 laat zien dat binnen deze directe *embodied* leeromgeving leerlingen hogere niveaus van grafisch redeneren bereikten. Daarnaast lijken directe fysieke ervaringen meer kansrijk dan indirecte fysieke ervaringen (deelstudie 3). Het lijkt dan ook van belang om leerlingen mogelijkheden te bieden fysieke ervaringen op te doen die direct gerelateerd zijn aan het te leren wiskundige concept, om zo het redeneren over dat wiskundige concept te bevorderen.

Op basis van de vier deelstudies kunnen we allereerst de conclusie trekken dat lichamelijke ervaringen kansrijk zijn om HOV te bevorderen, namelijk het redeneren van leerlingen over grafieken van beweging. Hierbij kunnen relatief simpele activiteiten, zoals 'het lopen' van grafieken voor de bewegingssensor, ervoor zorgen dat leerlingen op natuurlijke wijze een connectie maken tussen de eigen beweging en de lijn in de grafiek, waarbij nieuwe inzichten gekoppeld worden aan al bestaande intuïtieve ideeën over de grafiek. De leeromgeving die we hebben ontwikkeld in het kader van dit promotieonderzoek, kan gezien worden als een domeinspecifieke operationalisatie van wiskundige HOV op het niveau van de basisschool. Dit is een waardevol resultaat voor de huidige onderwijspraktijk, aangezien er momenteel aandacht wordt besteed aan de vraag hoe HOV, als belangrijk onderdeel van 21ste-eeuwse vaardigheden, gestimuleerd kunnen worden.

Aanbevelingen voor de onderwijspraktijk

Op basis van de bevindingen van dit onderzoek kunnen aanbevelingen worden gedaan voor de onderwijspraktijk. Een eerste aanbeveling is dat we leerlingen meer fysieke mogelijkheden kunnen bieden tijdens de wiskundeles om zo wiskundige HOV te stimuleren. Hierbij is het van belang op zoek te gaan naar juist die fysieke ervaringen die ook daadwerkelijk een connectie hebben met het te leren wiskundige concept. Dit gaat verder dan enkel het aanbieden van fysieke activiteiten. Vanuit theorieën die uitspraken doen over *embodied* cognitie kunnen we stellen dat de connectie tussen de aard van de beweging en het wiskundig concept belangrijk is. Een tweede aanbeveling is om bij het aanbieden van *embodied* activiteiten in het stimuleren van het grafisch redeneren van leerlingen rekening te houden met de al bestaande intuïtieve ideeën van leerlingen over grafieken van beweging door op deze intuïtieve ideeën voort te bouwen. Daarbij kan gebruik worden gemaakt van technologie, waaronder bewegingssensoren. Het is hierbij van belang dat leerkrachten

ondersteund worden in het gebruik van technologie in het basisonderwijs, waaronder het gebruik van bewegingssensoren, en dat dit verder gefaciliteerd wordt door de leeromgeving zo in te richten dat de bewegingssensor optimaal ingezet kan worden.

Referenties

- Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, 16(3), 183–198. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.03.001>
- Duijzer, C. (2020). *Moving towards understanding: Reasoning about graphs in primary mathematics education* [Doctoral Dissertation]. Utrecht University.
- Duijzer, C., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Veldhuis, M., Doorman, M., & Leseman, P. (2019). Embodied learning environments for graphing motion: A systematic literature review. *Educational Psychology Review*, 31(3), 597–629. <https://doi.org/10.1007/s10648-019-09471-7>
- Duijzer, C., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Veldhuis, M., & Doorman, M. (2019). Supporting primary school students' reasoning about motion graphs through physical experiences. *ZDM Mathematics Education*, 51(6), 899–913. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01072-6>
- Duijzer, C., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Veldhuis, M., Boom, J., Doorman, M., & Leseman, P. (2020). Moving towards understanding: Students interpret and construct motion graphs. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 17, 25–51.
- Duijzer, C., Otten, M., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Veldhuis, M., Boom, J., Doorman, M., & Leseman, P. (2020). Fifth grade students' reasoning on graphs of motion and linear equations. Ongepubliceerd manuscript.
- Friel, S. N., Curcio, F. R., & Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32, 124–158. <https://doi.org/10.2307/749671>
- Gallese, V., & Lakoff, G. (2005). The brain's concepts: The role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive Neuropsychology*, 22(3-4), 455–479. <https://doi.org/10.1080/02643290442000310>
- Goldenberg, E. P., Shteingold, N., & Feurzeig, N. (2003). Mathematical habits of mind for young children. In F. K. Lester & R. I. Charles (Eds.), *Teaching mathematics through problem solving: Prekindergarten-grade*, (pp. 15–29). National Council of Teachers of Mathematics.
- Hall, R., & Nemirovsky, R. (2012). Introduction to the special issue: Modalities of body engagement in mathematical activity and learning. *Journal of the Learning Sciences*, 21(2), 207–215. <https://www.jstor.org/stable/23266404>
- Johnson-Glenberg, M. C., Birchfield, D. A., Tolentino, L., & Koziupa, T. (2014). Collaborative embodied learning in mixed reality motion-capture environments: Two science studies. *Journal of Educational Psychology*, 106(1), 86–104. <https://doi.org/10.1037/a0034008>
- Keijzer, R., Hendrikse, P., Bosch, R. (2021). Wiskundige communicatie: Rekenen-wiskunde in tijden van Covid-19. *Volgens Bartjens*, 40(3), 34–37.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- OECD (2019). *OECD Skills outlook 2019: Thriving in a digital world*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/df80bc12-en>
- Shah, P., & Hoeffner, J. (2002). Review of graph comprehension research: Implications for instruction. *Educational Psychology Review*, 14(1), 47–69. <https://doi.org/10.1023/A:1013180410169>
- Thijs, A., Fisser, P., & Van der Hoeven, M. (2014). *21e eeuwse vaardigheden in het curriculum van het funderend onderwijs: een conceptueel kader*. SLO.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Bodin-Baarends, C. (2004). All or nothing: Problem solving by high achievers in mathematics. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education*, 8(3), 115–121.
- Van Zanten, M., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2018). Opportunity to learn problem solving in Dutch primary school mathematics textbooks. *ZDM Mathematics Education*, 50(5), 827–838. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0973-x>
- Wilson, M. (2002). Six views of embodied cognition. *Psychonomic Bulletin & Review*, 9(4), 625–636. <https://doi.org/10.3758/BF03196322>

Stimulating fifth-grade students' reasoning with motion graphs, as an approach to incorporate higher-order thinking (HOT) in primary mathematics education was an important objective of the doctoral research of Carolien Duijzer. Also, current revisions of the primary school mathematics curriculum emphasize that more attention should be paid to activities that promote students' HOT. The graphing of motion – including both graph interpretation and graph construction activities – is rarely addressed in mathematics textbooks, although there is ample evidence that students at this age can deal with representations in which motion data are visualized. Students' reasoning about motion graphs could potentially benefit from the incorporation of bodily experiences during graph-related activities. The idea that bodily experiences – including touching, gesturing, perception, and moving one's whole body – are relevant to the field of mathematics, can be positioned within contemporary work on embodied cognition. In the context of her PhD research, Carolien Duijzer conducted a large intervention study revolving around a six-lesson teaching sequence offering students graphing activities. Two parallel versions of this teaching sequence were developed. In the first version of the teaching sequence students were offered direct embodied activities, that are activities in which their own bodily movements were visualized as a line in the graphical representation, using motion sensor

technology. In the other version of the teaching sequence students were offered indirect embodied activities, that are activities similar to the activities within the direct embodied teaching sequence, yet without the physical interaction with the graphical representation by means of motion sensor technology. It was also investigated whether a teaching sequence stimulating students' domain-specific mathematical HOT, as their reasoning about motion graphs, has the potential to affect students' reasoning in another mathematics domain, namely linear equation solving. This doctoral research shows that graphical reasoning and the related HOT can be stimulated in the primary school mathematics classroom. Moreover, it is important to provide students with ample opportunities to bodily experience the line in the distance-time graph as a response to their own movements, in order to elicit students' reasoning about the relationship between the variables on the x-axis and y-axis of the graph. Finally, although students' started to reason at higher levels after partaking in the intervention, no support was found for the hypothesis that the HOT targeted in the research transferred to the domain of linear equation solving.